СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В ПРОСТРАНСТВЕ

с подробными решениями.

Сборник составлен А. С. Некрасовым и А. А. Шубиным,

под редакцией В. М. Эйгес.

Из задач, дававшихся на упражнениях в 1922—1923 уч. г.

В Московском Высшем Техническом Училище. | В Московском Институте Инженеров Путей Сообщения.

В Механико-Электротехническом Институте им. М. В. Ломоносова

и других Высших Технических Учебных Заведениях г. Москвы.

Студенческое Издательское Т-во

„МАКИЗ".

Москва. 1923 г.

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В ПРОСТРАНСТВЕ

с подробными решениями.

Сборник составлен **А. С. Некрасовым** и **А. А. Шубиным**,

под редакцией **В. М. Эйгес.**

Из задач, дававшихся на упражнениях в 1922—1923 уч. г.

В Московском Высшем Техническом Училище. В Московском Институте Путей Сообщения.

В Механико-Электротехническом Институте им. М. В. Ломоносова

и других Высших Технических Учебных Заведениях г. Москвы.

Студенческое Издательское Т-во

„МАКИЗ“.

Москва. 1923 г.

Г Л А В А I.

КООРДИНАТЫ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ.

Расстояние между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2 + (z_2 - z')^2} \quad \ldots \quad (1)$$

Координаты (x, y, z) точки C делящей отрезок, заключенный между данными точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в данном отношении l $\left(l = \frac{M_1C}{M_2C} \right)$

$$x = \frac{x' + lx_2}{1+l}, \quad y = \frac{y' + ly_2}{1+l}, \quad z = \frac{z' + lz_2}{1+l} \quad \ldots \quad (2)$$

Углы α, β, γ, образуемые какой-нибудь прямой с осями координат связаны между собой следующим соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \ldots \quad (3)$$

Задачи.

1. Найти координаты точки равноудаленной от точек $M(2,1,-1)$ и $N(4,-1,1)$.
2. Найти центр сферы радиуса равного 5 единицам длины, касающейся координатных плоскостей xz и yz, и проходящей через точку $(2,1,1)$.
3. Найти уравнение геометрического места точек, расстояние которых от точки $(1,-2,1)$, вдвое больше, чем от точки $(2,-1,2)$.
4. Прямая образует углы: $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Найти угол с третьей осью.
5. Найти координаты центра тяжести треугольника, если вершины его суть: $A(x', y', z')$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$.
6. Найти на оси OY точку, для которой середина расстояния до точки (a, b, c) лежит на плоскости xOz.
7. Расстояние между точками $(1,3,2)$ и $(4,-1,3)$ делится на три равные части. Найти координаты точки деления.
8. Найти точку, находящуюся на расстоянии восьми единиц длины от начала координат и при том так, чтобы середина ее расстояния от точки $(4,5,1)$ была на оси Ox.

ГЛАВА II.

ПЛОСКОСТЬ.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ.

Общий вид уравнения плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (4)$$

где A, B, C и D произвольные данные числа.

Нормальное ур-ние плоскости:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (5)$$

где p длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

Нормирующий множитель, служащий для приведения (4) к виду (5) есть:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (6)$$

Знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена D.

Уравнение плоскости относительно отрезков:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (7)$$

где a, b и c отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Расстояние точки до плоскости:

$$\delta = \pm(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p) \qquad (8)$$

где (x', y', z') координаты данной точки. Знак - берется для точек, расположенных по одну сторону с началом координат, знак + для противоположных.

Угол φ между плоскостями

$$Ax + By + Cz + D = 0\ ,\quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \qquad (9)$$

Условие перпендикулярности (при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$, откуда имеем):

$$AA' + BB' + CC' = 0 \qquad (10)$$

Условие параллельности:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \qquad (11)$$

Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку пересечения трех заданных плоскостей ($Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, $A''x+B''y+C''z+D''=0$):

$$p(Ax+By+Cz+D)+q(A'x+B'y+C'z+D')+A''x+B''y+C''z+D''=0 \quad (12)$$

где p и q произвольные числа, рассматриваемые как переменные параметры.

Уравнение связки плоскостей, проходящих через заданную точку (x', y', z'):

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0 \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (13a).$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую пересечения заданных двух плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D+q(A'x+B'y+C'z+D')=0 \quad . \; . \; . \quad (14)$$

9. Исследовать, лежат ли точки: (1,2,3), (2,4,6), (3,1,3) и (1,1,2) на плоскости $2x+4y+5z-25=0$

10. Найти плоскости, проходящие:
а) через начало координат; в) через оси координат; с) параллельно плоскостям координат; d) параллельно одной оси координат, из числа следующих:

1) $2x+y=3$ 2) $2x-3y=0$ 3) $4x-2=0$ 4) $3y-5=0$
5) $z=0$ 6) $x-2y-4z+3=0$ 7) $3y+z=0$

11. Привести уравнение плоскости $6x+2y+3z+2=0$ к различным формулам уравнений.

12. Найти отрезки на осях координат, отсекаемые плоскостью:

$$2x+y-4z-3=0$$

13. Найти плоскость, проходящую через ось x и через точку (1,2,1).

14. Найти расстояние начала координат от плоскостей:

$6x+2y+3z+2=0$ и $4x+3y+2z-1=0$

15. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

$8x-6y+2z-1=0$ и $4x-3y+z+7=0$

16. Найти расстояние между точкой (1,2,4) и плоскостью

$$3x-y-2z+4=0$$

17. Найти плоскость, отсекающую равные отрезки на осях координат и проходящую на расстоянии одной единицы длины от точки $M(2,2,-1)$.
18. Найти угол между плоскостями: $x-2y+4z=3$ и $3x+y-3z=5$
19. Найти угол между плоскостями:
1) $4x+3y-z=1$ 2) $2x+8z=3$
20. Найти плоскость проходящую через точки (4,1,5) и (2,-1,3) перпендикулярно плоскостям xOy, xOz, yOz.
21. Найти плоскость проходящую через точку (2,2,2) параллельно плоскости $2x-y+z=3$
22. Определить плоскость, проходящую через точки: (1,3,2); (1,1,0) и (2,5,0).
23. Найти точки пересечения плоскостей 1) $x+3y=2$, $4x+2z=5$ и $5y+10z=8$. 2) $x+y-z=3$, $x-y+z=6$ и $x-y-z=12$
24. Провести плоскость через начало координат, точку (1,2,4) и точку пересечения плоскостей:
$x+2y=23$, $3x+4z=57$ $5y+6z=94$
25. Через точку пересечения плоскостей $x+y+z=1$, $3x-3y=2$ и $x+4y=3$ провести плоскость, параллельно плоскости $2x+z=0$
26. Провести плоскость через прямую $2x+y-z=2$; $x-3y-z=1$ и через точку (2,0,2).
27. Провести плоскость через прямую: $2x-y-z=0$, $x-y+z=2$ перпендикулярно к плоскости $x+y+z=1$
28. Провести плоскость через линию пересечения плоскостей: $3x+4y-z-2=0$ и xOz перпендикулярно к первой.
29. Найти плоскость, проходящую через точки: (1,2,1); (3,5,1), перпендикулярно к плоскости

$$2x+3y+z=1$$

Г Л А В А III.
Прямая в пространстве.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ.

Нормальная система уравнений прямой

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma} \qquad (15)$$

где (x', y', z') координаты данной точки прямой; α, β и γ углы, образуемые прямой с осями координат.

Система уравнений прямой с угловыми коэффициентами:

$$\frac{x-x'}{M}=\frac{y-y'}{N}=\frac{z-z'}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

где M, N и P угловые коэффициенты, пропорциональные направляющим косинусам прямой.

Нормирующий множитель

$$\mathcal{L}=\pm\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

служит для приведения (16) к виду (15)

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \\ \cos\beta &= \pm\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \\ \cos\gamma &= \pm\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Двойной знак соответствует двум направлениям прямой.

Угол между двумя прямыми:

$$\frac{x-x'}{M}=\frac{y-y'}{N}=\frac{z-z'}{P} \quad (1) \qquad \frac{x-x'_1}{M'}=\frac{y-y'_1}{N'}=\frac{z-z'_1}{P'} \quad (2)$$

определится по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{MM'+NN'+PP'}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}\,\sqrt{M'^2+N'^2+P'^2}} \quad . \quad . \quad (19)$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$MM'+NN'+PP'=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{M}{M'}=\frac{N}{N'}=\frac{P}{P'} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Условие перпендикулярности прямой к двум другим прямым

$$M:N:P=\begin{vmatrix} N_1 & P_1 \\ N_2 & P_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_1 & M_1 \\ P_2 & M_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (22)^*$$

ж/Формула легко выводится из формулы решения пары однородных уравнений

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=0 \\ a'x+b'y+c'z&=0 \end{aligned} \qquad x':y':z'=(bc'-b'c):(ca'-c'a):(ab'-a'b)$$

30. Привести систему уравнений $5x-2y+z=1$ и $10x-6y+5z=2$ к виду ф. (16).

31. Тоже для прямой
$$\begin{aligned} 3x+y-2z&=0 \\ z-2&=0 \end{aligned}$$

32. Тоже для прямой
$$\begin{aligned} x-3y+8&=0 \\ x+y&=0 \end{aligned}$$

33. Найти уравнение прямой параллельной: 1) плоскости xy; 2) плоскости xz ; 3) плоскости yz .

34. Определить уравнение прямой параллельной 1) оси x ; 2) оси y ; 3) оси z .

35. Найти уравнение прямых, пересекающих 1) ось x ; 2) ось y ; 3) ось z .

36. Найти уравнение прямой составляющей равные углы с осями координат и проходящей: а) через точку (x,y,z); в) через начало координат.

37. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (x,y,z) и составляющую с осью x угол, равный $\pi/4$, а с осью z угол, равный $\pi/3$.

38. Найти косинус угла между прямой
$$\begin{aligned} y&=2x-7 \\ z&=2x+5 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} y&=3/2\,x+8 \\ z&=3x \end{aligned}$$

39. Найти угол между прямыми
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x+y&=1 \\ z&=3 \end{aligned}$$

40. Найти прямую, проходящую через точку (2,5,3) парал - лельно прямой $x=5$; $y=3z$

41. Провести прямую через точки (1,2,1) и (2,2,2).

42. Найти прямую, проходящую через (3,2,1) перпендикулярно к прямым
$$\begin{aligned} 3x-4y&=0 \\ z&=0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-0}{1}$$

Г Л А В А IV.

П л о с к о с т ь и п р я м а я.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ.

Угол между прямой $\frac{x-x'}{M}=\frac{y-y'}{N}=\frac{z-z'}{P}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определится из формулы
$$\sin\varphi=\frac{AM+BN+CP}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{M^2+N^2+P^2}}$$

Условие параллельности $\varphi=0 \quad \sin\varphi=0$

следовательно имеем

$$AM+BN+CP=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (24)$$

Условие перпендикулярности

$$\frac{A}{M}=\frac{B}{N}=\frac{C}{P} \quad \cdot \quad \cdot \quad (25)$$

Точка пересечения прямой

$$\frac{x-x'}{M}=\frac{y-y'}{N}=\frac{z-z'}{P}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

выразится в виде

$$x=x'+MS\ ,\ y=y'+NS\ ,\ z=z'+PS \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (26)$$

где $S=-\dfrac{Ax'+By'+Cz'+D}{AM+BN+CP}$

Условие совпадения плоскости и прямой

$$Ax'+By'+Cz'+D=0 \quad \text{и} \quad AM+BN+CP=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (27)$$

Условие, что три плоскости не имеют одной общей точки(равносильно условию, что прямая $Ax+By+Cz+D=0$, $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ параллельна плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$)

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (28)$$

43. Найти угол между плоскостью $4x+y-z=0$ и прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{3}$

44. Найти угол, образуемый прямой $x+z-3=0 \quad y+4=0$ с плоскостью $x-6y-18z=2$

45. Из точки (1,2,1) опустить перпендикуляр на плоскость $2x+z=1$ и найти его длину.

46. Через точку (2,1,2) провести плоскость, перпендикулярную к прямой $x=2 \quad y-z=1$

47. Через ось y провести плоскость параллельную прямой

$$x+y-z=3\ ;\ x+y=2$$

48. Через прямую $x-3y+2=0 \quad x-y=0$ провести плоскость, параллельную прямой $x+3y-2z=0 \quad z-2=0$

49. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ с плоскостью $x-y+2z-1=0$

50. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{2}$$

перпендикулярную к плоскости $4x+2y-z+1=0$

51. Найти уравнение проэкции прямой зад. № 50 на плоскость задачи № 50.

52. Определить координаты точки симметричной данной точки (1,2,1) по отношению к данной прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{3}$

53. Определить величину d при которой плоскость $x+y-6z+d=0$ содержит прямую

$$x=2z-9 \qquad y=4z-23$$

54. Доказать, что если прямая AB перпендикулярна к плоскости P, то всякая плоскость, параллельная AB, также будет перпендикулярна к плоскости P

55. Через точку (1,1,-1) провести прямую, параллельную прямой

$$x+y+z=1 \qquad 2x-y+z=3$$

56. Найти плоскость, проходящую через точку (3,-4,1) и через прямую $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-0}{1}$

57. Найти прямую в плоскости $x+y+z=1 \ldots (1)$ пересекающую прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{3} \ldots (2)$$

перпендикулярную к ней же.

58. Из точки (2,2,2) опустить перпендикуляр на прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$$

59. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-0}{0} \ldots (1)$$

параллельно прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{1}$

60. Через точку (2,1,2) провести прямую параллельно плоскости: I $x-y=0$; II $x+y=0$ III $z=1$

и перпендикулярно к прямой $x+y=0$; $z=1$;

61. Найти кратчайшее расстояние между прямыми:

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{5}=\frac{z-1}{-2} \ldots (1) \qquad \frac{x+7}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3} \ldots (2)$$

62. Найти длину и уравнение кратчайшего расстояния между прямыми:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-0}{1} \ldots (1) \text{ и } \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1} \ldots (2)$$

(решить не применяя связку плоскостей).

63. Пересекаются ли прямые:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{2} \ldots (1) \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{3} \ldots (2)$$

64. Пересекаются ли прямые:

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{5}=\frac{z-1}{-2}\ldots(1)\quad \frac{x+7}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}\ldots(2)$$

65. Доказать, что в тетраэдре прямые, соединяющие средины противоположных ребер, пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам.

66. Найти высоту тетраэдра, у которого боковыми гранями служат плоскости:

1) $x+y=3$ 2) $4x+2z=5$

3) $5y+10z=8$; а основанием служит плоскость

$$x-2y+2z=1$$

67. Через прямую $x+y+z-4=0;\ 2x-5y-8=0$ провести плоскость, параллельно плоскости $3x-y+2z=0$

68. Через прямую $x-z+2=0;\ y-5z-3=0$ провести плоскость параллельно плоскости $4x-y+z-1=0$

Г Л А В А V.

Поверхности 2-го порядка.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ.

Координаты центра $(x_c\, y_c\, z_c)$ определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= Ax+By+Dz+G=0\\ \tfrac{1}{2} f'_y &= Bx+Cy+Ez+H=0\\ \tfrac{1}{2} f'_z &= Dx+Ey+Fz+J=0 \end{aligned}\right\}\ldots(29)$$

где
$$f(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+$$
$$+Fz^2+2Gx+2Hy+2Jz+K=0$$
есть уравнение поверхности.

Канонические уравнения:

сферы: $$x^2+y^2+z^2=R^2\ldots\ldots(30)$$

эллипсоида: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ldots\ldots(31)$$

двуполого гиперболойда:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\ldots\ldots(32)$$

однополого
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ldots\ldots(33)$$

конуса
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\ldots\ldots(34)$$

эллиптического параболойда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad \cdots\cdots \quad (35)$$

Преобразовать к центру уравнения следующих поверхностей и найти их главные полуоси:

69. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + 5 = 0$
70. $10x^2 + 14y^2 + 15z^2 - 60z = 0$
71. $9x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 18x - 8y + 13 = 0$
72. $4x^2 + 5y^2 - 5z^2 - 10z + 15 = 0$
73. $x^2 + y^2 - 9z^2 - 2x + 4y - 5 = 0$
74. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 4 = 0$
75. Найти геометрическое место точек, расстояние которых от точки (1,-2,1) вдвое больше, чем от точки (2,-1,2).
76. Найти радиус сечения шара:

$x^2 + z^2 + y^2 = 25$ плоскостью $z = 4$

77. Найти радиус сечения шара $z = 10\cos\theta$ плоскостью $z = 8$

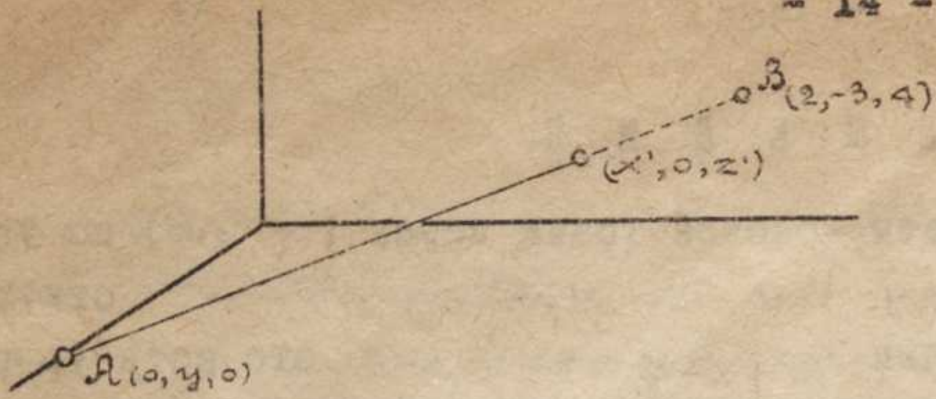
(θ - угол, образуемый радиусом вектором с осью z).

В следующих задачах требуется найти полуоси эллиптического сечения двух поверхностей и уровень сечения.

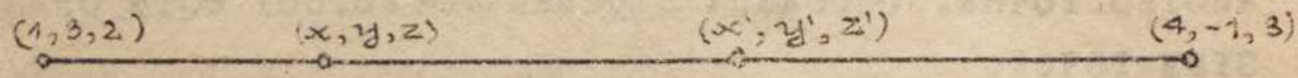
78. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 25$ и $z = 6$ и $x = 12$
79. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и $4x^2 + 4y^2 = 9z$
80. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{15} + \frac{z^2}{12} = 1$ и $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$
81. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = -9$ и $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = \frac{3z^2}{16}$
82. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$ $4x^2 + 5y^2 + 15z^2 = 100$
83. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = \frac{z}{5}$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$

Р Е Ш Е Н И Я.

1. Обозначив координаты искомой точки через (x,y,z) по условию имеем: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(x-4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$ откуда окончательно получим $4x-4y+4z-12=0$ это есть ур-ие плоскости. Условию задачи удовлетворяет бесчисленное множество точек. Середина отрезка MN $(3,0,0)$ есть одна из этих точек.
2. Радиусы, проведенные в точки касания сферы с плоскостями XZ и YZ, перпендикулярны к этим плоскостям и представляют собой не что иное, как координаты x и y центра сферы. Итак, $x=y=5$. Остается определить координату z. Приравнивая пяти расстояние между центром сферы $(5,5,z)$ и точкой $(2,1,1)$ найдем $z=1$
3. Обозначив через (x,y,z) коорд. любой точки искомого геометрического места, а через d_1 и d_2 ее расстояние от данных точек, мы можем написать $d_1^2=(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$ и $d_2^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$; приравняв отношение d_1/d_2 двум, получим:
$$\frac{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=4$$
откуда окончательно получим
$$x^2+y^2+z^2-\frac{14}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{14}{3}z+10=0$$
Это есть ур-ние шара.
4. Из соотношения $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ найдем: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cos^2\gamma=1$ откуда $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$ и $\gamma=60°$ и $120°$
5. Применяя формулы (2) сперва к стороне AB, которая точкой $D(x_m;y_m;z_m)$ делится пополам ($\ell=1$), а потом к медиане CD, которая искомой точкой $O(x,y,z)$ делится в отношении 2 : 1 ($\ell=2$), получим координаты центра тяжести (x,y,z):
$$x=\frac{x'+x_2+x_3}{3};\ y=\frac{y'+y_2+y_3}{3};\ z=\frac{z'+z_2+z_3}{3}$$
6. Искомая точка, как лежащая на оси Y имеет координаты $(0,y,0)$ Средина отрезка AB, по условию, лежит в плоскости ZOX. Следовательно ее координаты $y'=0$, а x' и z' пока неизвестны. Для нахождения искомой координаты Y, точки A берем формулу (3) для координат средины отрезка $0=\frac{-3+y}{2}$ откуда $y=3$. Следовательно искомая точка $(0,3,0)$.



7. Решаем аналогично зад.№ 5 по ф.(3)



Для первой точки $x=2$; $y=5/3$; $z=7/3$ $(l=1/2)$

Для второй точки

$x'=3$; $y'=1/3$; $z'=8/3$ $(l=2)$

8. Пусть искомая точка будет (x,y,z). Середина ее расстояния от точки (4,5,1), находясь на Ox , имеет координаты $(x,0,0)$; тогда: $0=\frac{y+5}{2}$; $0=\frac{z+1}{2}$ т.е. $y=-5$ $z=-1$. Взяв расстояние точки $(x,-5,-1)$ от начала координат (0,0,0), имеем:

$$8=\sqrt{x^2+(-5)^2+(-1)^2} \quad \text{т.е.} \quad x=\pm\sqrt{38}$$

Точек будет две: $(\sqrt{38},-5,-1)$ и $(-\sqrt{38},-5,-1)$.

9. Так как точки (1,2,3) и (3,1,3) удовлетворяют уравнению плоскости, то они лежат на плоскости, а точки (2,4,6) и (1,1,2), - как не удовлетворяющие этому уравнению не лежат.

10. а) Через начало координат проходят плоскости 2-ая, 5-ая, 7-ая;
в) через оси координат: 2-ая - через z ; 7-ая - через x;
с) параллельно плоскостям координат: Oz , 3-я параллельно плоскости yz ; 4-ая плоскости xz ; 5-ая сливается с плоскостью xy . 1-ая параллельна оси z

11. Нормальный вид

$$-\frac{6}{7}x-\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z-\frac{2}{7}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

Относительно отрезков

$$\frac{x}{-1/3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-2/3}=1$$

12. Ответ:

$$a=3/2 \; ; \; b=3 \; ; \; c=-3/4$$

13. Уравнение плоскости проходящей через ось x имеет вид $By+Cz=0$, но так как искомая плоскость проходит еще

через точку (1,2,1), то $2B+C=0$, и следовательно, уравнение плоскости будет $y-2z=0$

14. Ответ

$$d_1=+2/7 \qquad d_2=\frac{1}{\sqrt{29}}$$

15. Приведем к нормальному виду оба уравнения:

$$\frac{4}{\sqrt{26}}x-\frac{3}{\sqrt{26}}y+\frac{1}{\sqrt{26}}z-\frac{1}{2\sqrt{26}}=0;\quad -\frac{4}{\sqrt{26}}x+\frac{3}{\sqrt{26}}y-\frac{1}{\sqrt{26}}z-\frac{7}{\sqrt{26}}=0$$

следовательно

$p=\frac{1}{2\sqrt{26}};\ p'=\frac{7}{\sqrt{26}}$. Так как знаки коэффициентов при в обоих уравнениях противоположные, то плоскости расположены по разные стороны от начала координат и потому

$$d=p+p'=15/2\sqrt{26}$$

16. По формуле (8) найдем:

$$d=\frac{3\cdot1-1\cdot2-2\cdot4+4}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{-3}{\sqrt{14}}$$

17. Расстояние d_0 данной точки M до плоскости, по форм. (8) равно $\pm\frac{2+2-1-a}{\sqrt{3}}$ знак двойной, так как неизвестно с какой стороны плоскости находится данная точка. По условию $d=1$, следовательно $\frac{a-3}{\sqrt{3}}=\pm1$ откуда $a=3\pm\sqrt{3}$

Поэтому уравнение плоскости: $x+y+z=3\pm\sqrt{3}$

18. Непосредственно применяя форм. (9), имеем

$$\cos\varphi=\pm\frac{1\cdot3-2\cdot1-3\cdot4}{\sqrt{1+4+16}\sqrt{9+1+9}}=\pm\frac{11}{\sqrt{399}}$$

19. Аналогично задаче № 18 найдем $\cos\varphi=0$ т.е. $\varphi=\pi/2$ плоскости взаимно перпендикулярны.

20. Возьмем ур-ние искомой плоскости в общем виде и выразим требование, чтобы данные точки (4,1,5) и (2,-1,3) лежали на этой плоскости $4A+B+5C+D=0$ (1) $2A-B+3C+D=0$ (2) $4A+B+5C=2A-B+3C$ или $A+B+C=0$. Сделаем ее перпендикулярною к плоскости xy ($z=0$). Из условия перпендикулярности имеем $A\cdot0+B\cdot0+C\cdot1=0$ или $C=0$, откуда $A=-B$; подставляя это значение в уравнение (1) или (2) найдем D: $D=3B$. . Откуда искомое уравнение плоскости: 1) $x-y-3=0$ точно также 2) $x-z+1=0$ 3) $y-z+4=0$

21. Условие параллельности плоскостей выражается пропорциональностью коэффициентов при соответствующих текущих координатах, т.е. $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, следовательно уравнение

всякой плоскости параллельной данной, будет иметь вид: $2x-y+z+D=0$ Из условия прохождения ее через точку (2,2,2), получим $D=-4$, а искомая плоскость будет

$$2x-y+z=4$$

22. По формуле 13 и принимая во внимание координаты второй точки, имеем:

$$A(x-1)+B(y-1)+Cz=0$$

Так как координаты первой и третьей точки должны удовлетворять этому уравнению, то имеем:

$$2B+2C=0$$

$$A+4B=0$$

Следовательно: $B=-C$ и $A=4C$.

но $D=-Ax-By-Cz$, где x,y,z произвольные точки плоскости, например (1,1,0). Итак $D=-A-B=-3C$

Выразив все коэффициенты уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ через C, получим: $4Cx-Cy+Cz-3C=0$ или сократив на C, окончательно $4x-y+z-3=0$

Можно получить тот же ответ и непосредственно с помощью четырех детерменантов (см. форм.13-а)

$$x\begin{vmatrix}3&2&1\\1&0&1\\5&0&1\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&0\\2&5&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&3&1\\1&1&1\\2&5&1\end{vmatrix}=0$$

23. Решая детерменантами, получим:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&3&0\\5&0&2\\8&5&10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&0\\4&0&2\\0&5&10\end{vmatrix}}=\frac{61}{65}\qquad y=\frac{23}{65}\ ;\qquad z=\frac{81}{130}$$

24. Уравнение искомой плоскости, принадлежащей к связке плоскостей, будет: $p(x+2y-23)+q(3x+4z-57)+5y+6z-94=0$ параметры p и q определим из условий прохождения искомой плоскости через начало координат и точку(1,2,4) Эти условия представятся в виде: $23p+57q+94=0 \dots (1)$ и $9p+19q+30=0$ (2) решив уравнения (1) и (2) найдем $p=1$ $q=-39/19$ искомое уравнение будет:

$$98x-133y+42z=0$$

25. Решая аналогично зад.№ 24, имеем: $p(x+y+z+1)+q(x+4y-3)+(3x-3y-2)=0$ преобразуем в виде

$$(p+q+3)x+(p+4q-3)y+pz-(p+3q+2)=0$$

Условие параллельности искомой плоскости с плоскостью: $2x+z=0$ дает: $\frac{p+q+3}{2}=\frac{p}{1}$ или $p-q-3=0$ и $p+4q-3=0$ откуда $p=3$ $q=0$ Подставляя p и q, получаем $6x+3z-5=0$

Задачу можно решить иначе: найдем точку пересечения данных трех плоскостей: $\frac{17}{15}, \frac{7}{15}, -\frac{9}{15}$. Уравнение искомой плоскости имеет вид: $2x+z+D=0$ Подставляя сюда значения: $x=\frac{17}{15}$ и $z=-\frac{9}{15}$, отыскиваем D : $\frac{34}{15}-\frac{9}{15}+D=0$ $D=-5/3$ и уравнение искомой плоскости оказывается как и прежде $6x+3z-5=0$

26. Искомая плоскость может быть представлена уравнением

$$2x+y-z-2+q(x-3y-z-1)=0$$

Условие прохождения ее через точку (2,0,2) дает: $4-2-2+q(2-2-1)=0$ откуда $q=0$;следовательно первая из данных плоскостей и есть искомая.

27. Искомую плоскость представим так:

$$2x-y-z+q(x-y+z-2)=0 \quad \text{или}$$

$$(2+q)x-(1+q)y+(q-1)z-2q=0$$

Из условия перпендикулярности имеем: $(2+q)\cdot1-(1+q)\cdot1+(q-1)\cdot1=0$ откуда $q=0$, первая из данных плоскостей есть искомая.

28. Берем уравнение плоскости xoz в виде $y=0$, тогда искомая плоскость представится в виде $3x+4y-z-2+qy=0$ или $3x+y(4+q)-z-2=0$

Условие перпендикулярности дает: $3\cdot3+4(4+q)+(-1)\cdot(-1)=0$ откуда $q=-13/2$ Искомая плоскость будет: $6x-5y-2z=4$

29. По формуле B имеем $A(x-1)+B(y-2)+C(z-1)=0$. Так как вторая точка лежит на искомой плоскости, то $2A+3B=0$ Запишем теперь условие перпендикулярности искомой плоскости с данной: $2A+3B+C=0$; $A:B=3:(-2)$

Берем $A=3$; $B=-2$; $C=0$ и получаем уравнение искомой плоскости $3x-2y+1=0$

30. Так линия пересечения плоскостей перпендикулярна к их нормали, то по формуле 22 имеем:

$$M:N:P=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -6 & 5\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 10\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}5 & -2\\ 10 & -6\end{vmatrix}=-4:(-15):(-10)$$

Таким образом уравнение прямой примет такой вид:

$$\frac{x-x_1}{4}=\frac{y-y_1}{15}=\frac{z-z_1}{10}$$

Для определения произвольной точки прямой, положим $z_1=0$. Тогда из данных ур-ний определяется x_1 и y_1, а именно $x_1=\frac{1}{5}, y_1=0$ и система уравнений представится в таком виде:

$$\frac{x-\frac{1}{5}}{4}=\frac{y}{15}=\frac{z}{10} \text{ или } 5(3x-1)=15y=6z$$

31. Подставляя в первое уравнение постоянное значение z, получаем: $3x+y=4$ или $\frac{x-4/3}{1}=\frac{y-0}{-3}$. Так как $\cos\gamma=0$, то мы можем к этим двум отношениям прибавить третье $\frac{z-2}{0}$ и получаем $\frac{x-4/3}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{0}$ при чем последнее отношение выражает только ту мысль, что $z-2=0$ или что $z=$ постоянной величине.

32. Обе данные плоскости перпендикулярны к плоскости Координаты x и y прямой имеют постоянные значения $y=2$ $x=-2$; прямая параллельна оси Z $\left(z=\frac{0}{0}\right)$. Возьмем точку (-2, +2, 0). Тогда уравнение прямой будет: $\frac{x+2}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$

33. Настоящая задача представляет собой обобщение задачи N 32. Прямая, параллельная плоскости xy может быть рассматриваема, как пересечение некоторой вертикальной плоскости ($ax+by=p$) и некоторой горизонтальной плоскости ($z=c$). Первое из этих уравнений всегда может быть представлено в виде $\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}$. Сюда можно присоединить отношение $\frac{z-c}{0}$, так как $P=0$. Получаем:

$$\text{I} \quad \frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-c}{0}$$

Точно также прямая, $\parallel$ плоскости xz выразится системами уравнений: $\frac{x-x_1}{M}=\frac{z-z_1}{P}$ и $y=b$ или

$$\text{II} \quad \frac{x-x_1}{M}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-z_1}{P}$$

а прямая, $\parallel$-ая плоскости YZ

$$\text{III} \quad \frac{x-a}{0}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}$$

или $\frac{y-y_1}{N} = \frac{z-z'}{P}$; $x=a$

34. Эта задача есть обобщение задачи N 31.

$$\mathrm{I}.\ \frac{x}{a} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{0} \text{ или } y=b, z=c \ (x=\tfrac{0}{0})$$

$$\mathrm{II}.\ \frac{x-a}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-c}{0} \text{ или } x=a, z=c \ (y=\tfrac{0}{0})$$

$$\mathrm{III}.\ \frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z}{1} \text{ или } x=a, y=b, (z=\tfrac{0}{0})$$

35. Так как в уравнении оси x; $b=0$ и $c=0$, то искомая прямая, пересекающая ось x будет иметь вид:

1) $\frac{x-x_1}{M} = \frac{y}{N} = \frac{z}{P}$

Аналогично этому для прямых, пересекающих ось y или z

2) $\frac{x}{M} = \frac{y-b}{N} = \frac{z}{P}$ $\quad \frac{x-x_1}{M} = \frac{y}{N} = \frac{z}{P}$

3) $\frac{x}{M} = \frac{y}{N} = \frac{z-c}{P}$

36. Ответ: 1) $x-x_1 = y-y_1 = z-z_1$; 2) $x=y=z$.

37. Из соотношений $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ найдем $\cos\beta$: $\frac{1}{2} + \cos^2\beta + \frac{1}{4} = 1$ и $\cos\beta = \pm \frac{1}{2}$

откуда уравнение прямой будет:

$$(x-x_1)\sqrt{2} = \pm(y-y_1)2 = (z-z_1)2$$

38. Преобразовав

$$\begin{aligned} y &= 2x-7 \\ z &= 2x+5 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} y &= \tfrac{3}{2}x+8 \\ z &= 3x \end{aligned}$$

к виду формулы 16 :

$$\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z}{6}$$

по соответствующей формуле найдем:

$$\cos\varphi = \pm \frac{1.2+2.3+2.6}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+9+36}} = \pm \frac{20}{21}$$

39. Представив $x+y=1$; $z=3$ в виде:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{0}$$

по соответствующей формуле найдем:

$$\cos\varphi = \pm \frac{2\cdot1-2\cdot1+1\cdot0}{\sqrt{4+4+1}\ \sqrt{1+1}} ; \ \varphi = \pi/2$$

т.е. прямые взаимно перпендикулярны.

40. Уравнения $x=5$, $y=3z$ представим в таком виде:

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \qquad (1)$$

Искомая прямая, проходящая через точку (2,5,3) имеет вид:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y-5}{n}=\frac{z-3}{p} \qquad (2)$$

m, n и p определим из условия параллельности (1) и (2):

$$\frac{m}{0}=\frac{n}{3}=\frac{p}{1}$$ и уравнение будет

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-3}{1}$$ или $x=2$ и $y-3z+4=0$

41. Решим сперва эту задачу в общем виде для пары точек (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2). Написав связку прямых, проходящих через (x,y,z)

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

выберем из этой связки прямую, проходящую через вторую точку (2,2,2)

$$x_2-x_1=y_2-y_1=z_2-z_1$$

Исключив m, n и p, найдем искомое уравнение прямой

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Подставив численные данные из условия задачи, получим

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{1}$$ или $x+z=0$; $y=2$

42. Представив уравнение $3x-4y=0$; $z=0$ в виде:

$$\frac{x-0}{4}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-0}{0} \qquad (1)$$

Пишем уравнения связки прямых, проходящих через точку (3,2,1)

$$\frac{x-3}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-1}{p} \qquad (2)$$

Выберем из этой связки прямую, перпендикулярную к прямым (1) и (2) $4m+3n=0$ и $2m+4n+p=0$. Из этих уравнений можно найти отношение угловых коэффициентов; делим на какой либо коэффициент, например n обе каждого из этих уравнений $\frac{m}{n}=-\frac{3}{4}$; $\frac{2m}{n}+4+\frac{p}{n}=0$

Отсюда $p/n=-5/2$ следовательно $m:n:p=3:(-4):10$ Заменяя m, n и p в уравнении (2) пропорциональными им числами, получим:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{10}$$

Этот же результат можно было получить непосредственно, применяя формулу 22.

43. По соответствующей формуле имеем:

$$\sin\varphi = \frac{4\cdot 2 + 1\cdot(-5) + 3\cdot(-1)}{\sqrt{16+1+1}\ \sqrt{4+25+9}} = 0$$

т.е. $\varphi = 0$. Плоскость и прямая взаимно параллельны.

44. Прямая выражается (см.зад.30):

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{0} = \frac{z}{-1}\ ; \quad \sin\varphi = \frac{1-18(-1)}{\sqrt{1+1}\ \sqrt{1+36+324}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ; \varphi = 45^\circ$$

45. Напишем уравнение связки прямых, проходящих через точку (1,2,1)

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z-1}{p} \qquad (1)$$

Условие перпендикулярности данной плоскости с (1) дает: $\frac{m}{2} = \frac{p}{1} = \frac{n}{0}$ откуда искомая прямая представится

такой системой уравнений $\frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{1} = \frac{y-2}{0}$ или

$x-2z+1=0$ и $y=2$. Длина перпендикуляра $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$

46. Приведем ур-ния $x=2, y-z=1$ к виду:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1} \qquad (1)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку 2,1,2 таково: $A(x-2)+B(y-1)+C(z-2)=0$. Здесь коэффициенты A, B, C должны быть пропорциональны угловым коэффициентам прямой (1), т.е. числам 0 : 1 : 1. Подставив эти значения вместо A, B, C получим $y-1+z-2=0$ или окончательно

$$y+z-3=0$$

47. Плоскость, проходящая через ось Y, имеет вид: $Ax+Cz=0$ (1)
Представив данную прямую в виде такой системы уравнений:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{0} \qquad (2)$$

Из условия параллельности (1) и (2) будем иметь: $A=0$
следовательно $z=0$, т.е. плоскость (xy).

48. Искомая плоскость будет одной из пучка: $x-3y+z+q(x+y)=0$
или $x(1+q)+y(q-3)+z=0$ (1)
Другую данную прямую преобразуем к виду:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-2}{0} \qquad (2)$$

Условие параллельности дает: $3(1+q)-(q-3)=0$; $q=-3$

Откуда искомая плоскость будет: $x+3y-1=0$

49. По формулам: $x=x_1+ms$; $y=y_1+Ns$ и $z=z_1+Ps$ где

$$S=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{AM+BN+CP}$$

x,y,z-координаты точек, лежащих на данной прямой, имеем:

$$x=1/9\ ;\ y=14/9 \text{ и } z=11/9$$

50. Пишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку (2,-1,3):

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0$$

и выберем из этой связки, плоскость параллельную данной прямой и, следовательно, проходящую через нее:

$$A-3B+2C=0 \quad (1)$$

и перпендикулярную к данной плоскости:

$$4A+2B-C=0 \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем: $A:B:C=1:(-9):(-14)$. Подставив в уравнение (1) значения $A=1, B=-9, C=-14$ получим уравнение искомой плоскости $x-9y-14z+31=0$ (3)

51. Проекция прямой на плоскость получится, как пересечение данной плоскости

$$4x+2y-z+1=0$$

с плоскостью (3), проведенной через прямую, перпендикулярно к данной плоскости.

Следовательно (см.зад.50), искомая проекция выразится системой уравнений: $\left.\begin{aligned}4x+2y-z+1&=0\\ x-9y-14z+31&=0\end{aligned}\right\}$ Чтобы представить эту систему в нормальной форме (с угловыми коэффициентами), применим формулу 22:

$$M=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -9 & -14\end{vmatrix}\quad N=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -14 & 1\end{vmatrix}.\ P=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 9\end{vmatrix}$$

Отсюда:

$$\frac{x-x_1}{37}=\frac{y-y_1}{-55}=\frac{z-z_1}{38}$$

52. Если мы через (x', y', z') обозначим координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки A на данную прямую и через $(x_2\, y_2\, z_2)$ координаты точки A' симметричной точке A относительно данной прямой, то

$$x'=\frac{1+x_2}{2}\ ;\ y'=\frac{2+y_2}{2} \text{ и } z'=\frac{1+z_2}{2}$$

откуда $x_2 = 2x'-1$; $y_2 = 2y_1-2$; $z_2 = 2z'-1$.
и задача сводится к определению координат x', y' и z'.
Уравнение плоскости, проведенной через точку A перпендикулярно к данной прямой, будет

$$2x'-y'+3z'-3=0.$$

Теперь решая аналогично задачу № 49, определим:

$$x_1 = -1/7;\quad y_1 = -17/7 \quad \text{и} \quad z' = 2/7$$

откуда искомая точка будет:

$$x_2 = -9/7 \quad y_2 = -48/7 \quad \text{и} \quad z = -3/7$$

53. Представим прямую $x = 2z-9$ и $y = 4z-23$ в виде:

$$\frac{x+9}{2} = \frac{y+23}{4} = \frac{z-0}{1} \quad \ldots\ldots (1)$$

Из условия совпадения данной плоскости с (1) найдем D

$$-1\cdot 9 - 1\cdot 23 + D = 0 \quad \text{и} \quad D = 32$$

(Второе условие ($AM+BN+CD=0$) выполнено, так как $2+4-6=0$).

54. Пусть уравнения прямой будут:

$$\frac{x-a}{M} = \frac{y-b}{N} = \frac{z-c}{P}$$

и $Ax+By+Cz+D=0$ Уравнение плоскости P ;тогда по условию задачи:

$$(1) \quad \frac{M}{A} = \frac{N}{B} = \frac{P}{C}$$

Уравнение всякой плоскости, параллельной прямой AB, будет

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$$

при условии, что

$$A_1M + B_1N + C_1P = 0$$

а это последнее соотношение в силу равенств (1) преобразовывается в следующее:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

что и требовалось доказать.

55. Найдем по формуле (22) угловые коэффициенты данной прямой

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\quad N = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Напишем связку прямых, проходящих через точку (1,1,-1):

$$\frac{x-1}{M} = \frac{y-1}{N} = \frac{z+1}{P}$$

Выбирая из этой связки прямую, параллельную данной, найдем искомую прямую:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-3}$$

56. Возьмем связку плоскостей, проходящих через точку (3,-4,1)

$$A(x-3)+B(y+4)+C(z-1)=0 \qquad (1)$$

и выберем из связки плоскость, совпадающую с данной прямой:

$$A(5-3)+B(-2+4)+C(0-1)=0 \ . \ . \ (2)$$
$$3A-2B+C=0 \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

откуда $A=0,\ C:B=2:1$ и искомая плоскость будет:

$$y+2z+2=0$$

57. Прежде всего определим точку пересечения данной прямой с данной плоскостью. Решая совместно данные уравнения, найдем $x=1, y=-2, z=2$ Через эту же точку проходит и искомая прямая, поэтому ее уравнение будет:

$$\frac{x-1}{M}=\frac{y+2}{N}=\frac{z-2}{P}$$

Условие перпендикулярности (2) и (3):

$$2M+N+3P=0$$

и условие совпадения (1) с (3)

$M+N+P=0$ дают $M:N:P=2:(-1):(-1)$ и окончательно

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$$

58. Искомый перпендикуляр служит пересечением двух плоскостей, из которых одна

$$2x+y+3z-12=0$$

проходит через точку (2,2,2) перпендикулярна к данной прямой, а на другой $x+y-z-2=0$ . . (2) расположена та же точка (2,2,2) и данная прямая. Угловые коэффициенты этой прямой: $M=\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}=-4$;

$N=\begin{vmatrix}3&2\\-1&1\end{vmatrix}=5$; $P=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1$. Уравнение $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-2}{1}$

59. Возьмем связку плоскостей, проходящих через точку(1,-3,0).

$$A(x-1)+B(y+3)+Cz=0$$

выберем из связки плоскость, совпадающую с прямой первой (1)

$$A+3B=0$$

и параллельную (2) второй $3A+B=0$

найдем $A:B:C=-3:1:9$

и искомое уравнение

$$3x-y-9z-6=0$$

60. Преобразуем данную прямую к виду:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-1}{0}$$

Искомая прямая:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-2}{p}$$

Условие перпендикулярности (с прямой) дает $m-n=0$

Условие параллельности с плоскостью дает:

1) $m-n=0$ II $m+n=0$ III $p=0$

Откуда искомая прямая будет:

$$\text{I)}\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{p}$$

т.е. пучок прямых в плоскости $x-y=1$ II) $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{p}$

т.е. прямую, параллельную оси $z\left[\begin{matrix}x=2\\ y=1\end{matrix}\right]$ III) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$

т.е. прямую $x-y=1$ в плоскости $z=2$

61. Возьмем связку плоскостей, проходящих через точку(-7,-2,1)

$$A(x+7)+B(y+2)+C(z-1)=0 \quad (1)$$

Условие прохождения ее через прямую (2)

$$2A-4B+3C=0$$

Условие параллельности с прямой (1)

$3A+5B-2C=0$ следовательно $A:B:C=7:(-B):(-22)$

Откуда плоскость (I)

$$7x-13y-22z+45=0$$

Теперь расстояние будет (подставив 6,5,1 в нормальную форму этого уравнения)

$$d=\pm\frac{7.6-13.5-22+45}{\sqrt{49+169+484}}=0$$

т.е. прямые пересекаются. Можно расстояние отыскать по формуле

$$d=\pm\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m & n & p\\ m_1 & n_1 & p_1\end{vmatrix}M$$

здесь $$M=\frac{1}{\sqrt{(np_1-n_1p)^2+(pm_1-p_1m)^2+(mn_1-m_1n)^2}}$$

62. По формуле 22 отыскиваем угловые коэффициенты прямой, перпендикулярной к обеим данным прямым. Затем через каждую прямую проводим плоскость, параллельную к найденному направлению. Их пересечение и определяет искомую прямую. Итак:

$$M:N:P=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2:3:7$$

Первая вспомогательная плоскость $A(x-1)+B(y+3)+Cz=0$ определится из уравнений

$$2A-B+C=0$$
$$2A-3B-7C=0$$

откуда $A:B:C=5:8:(-2)$ и плоскость представится уравнением $5x+8y-2z+19=0$ (1). Вторая плоскость $A_1(x+2)+B_1(y-1)+C_1(z-3)=0$ определится из уравнений

$$A_1+3B_1-C_1=0$$
$$2A_1-3B_1-7C_1=0$$

откуда $A_1:B_1:C_1=24:(-5):9$ и плоскость представится уравнением: $24x-5y+9z+26=0$ II. Система уравнений I и II и дает искомую прямую $2(x-1)-3(y+3)-7z=0$ Искомая длина равна расстоянию точки (-2,1,3), принадлежащей прямой (2) от плоскости

$$d=\frac{-6-12-21}{\pm\sqrt{4+9+49}}=\frac{39}{\sqrt{62}}$$

63. Условие пересечения двух прямых:

$$\frac{x-x_1}{M_1}=\frac{y-y_1}{N_1}=\frac{z-z_1}{P_1}\quad(1)\quad и\quad \frac{x-x_2}{M_2}=\frac{y-y_2}{N_2}=\frac{z-z_2}{P_2}\quad(2)$$

в детерминантах выражается:

$$D=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ M_1 & N_1 & P_1\\ M_2 & N_2 & P_2\end{vmatrix}=0$$

Подставляя вместо $x-x_1=-2$; $y-y_1=-1$; $z-z_1=-2$
$M_1=2$; $N_1=1$; $P_1=2$; $M_2=3$; $N_2=1$ и $P_2=3$
их значения, получим $D=0$, так как две строчки одинаковы, следовательно прямые пересекаются.

64. Кроме решения подобного № 32, можно поступать еще так: исходя из того соображения, что в случае пересечений обе пря-

мые лежат в одной плоскости, берем связку плоскостей, проходящих через точку (6,5,1) и выбираем из этой связки плоскость, параллельную второй прямой и проходящую через(1). Поступая так же со второй прямой, найдем, что прямые лежат в одной плоскости $7x-13y-22z+45=0$

т.е. они пересекаются.

65. За оси координат примем три смежных ребра OA, OB, OC тетраэдра и обозначим OA через $2a$, OB через $2b$ и OC через $2c$. Уравнение прямой, соединяющей середины ребер OC и AB, будут:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z-c}{-c}$$

Так как уравнение прямой, проходящей через данные две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(безразлично в прямоугольной или косоугольной системе координат).

Уравнение прямых, соединяющих средину OA с срединой BC и средину OB с срединой AC, будут:

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \quad и \quad \frac{x}{a}=\frac{y-b}{-b}=\frac{z}{c}$$

Координаты точки пересечения двух первых прямых

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

и так как координаты эти удовлетворяют и уравнению третьей прямой, то задача доказана.

66. Решив совместно уравнения 3-х боковых граней, определяем координаты вершины $\left(\frac{61}{65}, \frac{23}{65}, \frac{81}{130}\right)$

Задача сводится к нахождению перпендикуляра, опущенного из точки $\left(\frac{61}{65}, \frac{23}{65}, \frac{81}{130}\right)$ на плоскость $x-2y+2z=1$ (1)

Длина его выражается

$$d=\frac{1\cdot\frac{61}{65}-2\cdot\frac{23}{65}+2\cdot\frac{81}{130}-1}{\pm\sqrt{1+4+4}}=\frac{31}{195}$$

68. Задачи такого рода только тогда допускают решение, когда заданная прямая (с угловыми коэффициентами m, n, p) па-

раллельна заданной плоскости (с угловыми коэффициентами A, B, C), т.е., если

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (1)$$

Если прямая задана, как пересечение плоскостей (A, B, C, A_1, B_1, C_1), то условие (1) преобразуется в условие (2):

$$D = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

так как $m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$ и $p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$

В нашей задаче

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 4 = 0$$

Следовательно задача возможна.

Преобразуем систему уравнений прямой к виду

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-0}{1}$$

(Эта прямая параллельна плоскости $4x - y + z - 1 = 0$,так как

$$1.4 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

Искомая плоскость, как проходящая через точку (2,-3,0) представится уравнением

$$A(x-2) + B(y+3) + Cz = 0$$

где A, B, C определятся из соотношения $A:B:C = 4:(-1):1$ в силу требования параллельности с плоскостью $4x - y + z - 1 = 0$

Окончательно уравнение:

$$4x - y + z - 11 = 0$$

√

67. Задача невозможна, так как детерменант

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю (равен - 1), следовательно заданная прямая пересекается с плоскостью.

Действительно, уравнение прямой преобразуется к виду

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{7}$$

Эта прямая не параллельна плоскости $3x-y+2z=0$ так как

$$5\cdot 3-2\cdot 1-7\cdot 2\neq 0 \ (\text{равно} -1)$$

69. Применяя формулы (29), находим:

$$x_c-1=0\,,\ y_c-2=0\ ,\ z_c-2=0$$

преобразуем наши уравнения к найденному центру с помощью формул $x=x'+1;\ y=y'+2\ ;\ z=z'+2$. Находим:
$x'^2+y'^2+z'^2=4$; это шар радиуса $R=2$

70. Поступая аналогичным образом, найдем $x_c=y_c=0\ ;\ z=2$
$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоид с полуосями $\sqrt{6}\,,\sqrt{5}\ ,2$.

71. $x_c=y_c=1\ ;\ z_c=0\ ;\qquad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$

Это конус, в сечениях которого плоскостями, параллельными плоскости xy , полуоси эллипса относятся как 3 : 2.

72.
$$x_c=y_c=0\ ;\ z_c=1$$
$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1$$

Двуполый гиперболоид с полуосями $a=\sqrt{5}$, $b=c=2$

73.
$$x_c=2 \qquad y_c=-2$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$$

Однополый гиперболоид вращения; полуоси $a=b=3\ ;\ c=1$

74.
$$x_c=-2\ ;\ y_c=1;\quad z_c=\frac{0}{0}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

Цилиндр эллипсический полуоси любого сечения $a=2;\ b=\sqrt{3}$

75. Пусть (x,y,z) - координаты любой точки искомого геометрического места, а d_1 и d_2 ее расстояния от данных точек. Тогда

$$d_1=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$

$$d_2=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$

Приравняв по условию отношение d_1/d_2 двум, получим:

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4\left[(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2\right]$ или

$$3x^2+3y^2+3z^2-14x+4y-14z+30=0$$

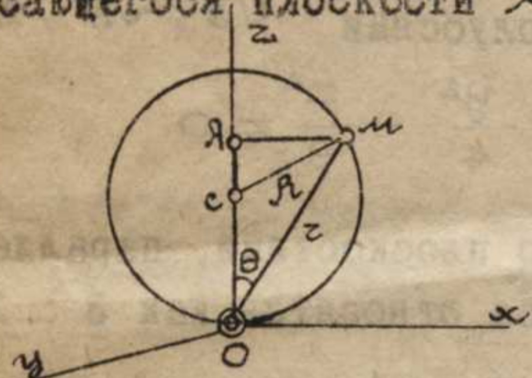
Это сфера, центр которого находится в точке $\left(2\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, 2\tfrac{1}{3}\right)$

а радиус = 2.

76. Подставляя в уравнение сферы $z=4$, найдем $x^2+y^2=9$ а это есть уравнение круга радиуса 3.

77. Заменяя $\cos\theta=\frac{z}{r}$, а $r^2=x^2+y^2+z^2$, получим уравнение поверхности в прямоугольных координатах $x^2+y^2+z^2-10z=0$

Подставляя $z=8$, получим $x^2+y^2=16$, а это есть уравнение круга радиуса 4. Можно было решить быстрее, зная, что заданное уравнение выражает сферу, радиуса 5, касающегося плоскости XY в начале координат O. Так



как $OЯ=8$, а $OC=5$, то $CЯ=3$. Отсюда находим:

$$ЯМ=\sqrt{25-9}$$

78. Преобразовав уравнение к виду

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=5^2$$

Подставим сюда значение $z/2=3$. Получим

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=4^2$$

или

$$\left(\frac{x}{12}\right)^2+\left(\frac{y}{8}\right)^2=1$$

а это есть уравнение эллипса с полуосями 12 и 8. Заданная поверхность есть растянутый эллипсоид вращения вокруг оси X.

В следующих задачах (78 - 83) следует приравнять значения группы $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$, взятые из заданных уравнений, и найти значения z_0, т.е. уровень искомого сечения, а затем методом, указанным для задачи 77, найти полуоси сечения.

79. Сфера и параболоид вращения.

$$25-z_0^2=\frac{9}{4}z_0$$

откуда

$$z_0 = 4 \qquad z_0' = -6^1/_4$$

Отрицательный ответ соответствует мнимому сечению $x^2+y^2=9$.
Полуоси $a = b = 3$.

80. Эллипсоид и эллиптический цилиндр. Полуоси сечения уже известны ($\sqrt{6}$ и $\sqrt{5}$). Остается найти уровень сечения. Умножая 1-ое уравнение на 3 и приравнивая $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5}$ получаем:

$$3 - \frac{z_0^2}{4} = 1$$

откуда:

$$z_0 = \pm 2\sqrt{2}$$

81. Двуполый гиперболоид и конус.

$$\frac{z_0^2}{4} - 9 = \frac{3}{16} z_0^2$$

Откуда

$$z_0 = \pm 12 ; \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 27 ; \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{54} = 1 ; a=9 ; b=3\sqrt{6}$$

82. Однополый гиперболоид и эллипсоид. Преобразуем второе уравнение к виду:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4} z^2 - 5$$

$$1 + \frac{z_0^2}{4} = 5 - \frac{3}{4} z_0^2 ; \quad z = \pm 2$$

Отсюда:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 2$$

Следовательно

$$a = \sqrt{10} ; \quad b = 2\sqrt{2}$$

83. Эллиптический параболоид и конус

$$\frac{z^2}{25} = \frac{2}{5} z ; \quad z_1 = 0 ; \quad z_2 = 10$$

Первому значению z, соответствует точечный - эллипс, второму z_2 - эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 6$.

О г л а в л е н и е.

Стр.

Глава I. Координаты точек в пространстве............3

Глава II. Плоскость................................4

Глава III. Прямая в пространстве...................6

Глава IV. Плоскость и прямая.......................8

Глава V. Поверхности 2-го порядка.................11

Решения задач................................13 и 32

(Главлит. № 10521)—г. Москва. Тираж 950 экз.
Типография Возд. Флота, Б. Садовая, д. 3.