

P2.4307

ДО
ВЫДАЕ

Р 113 г

Субмодель М.В.П.У от автора
5-II-27.

И. М. РАБИНОВИЧ.

Б.И.И.
Р 113 г

24307V

Графическая статика плоских многократно - изменяемых кинематических цепей и некоторые применения ее к строительной механике.

Провер. 1935

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Основы графической кинематики плоских многократно - изменяемых цепей.

1. *Степенью свободы* кинематической цепи, как известно, называется количество независимых переменных, которыми определяется положение всех ее точек.

652285

Простая числовая зависимость, существующая между степенью свободы цепи, с одной стороны, и числом ее звеньев и различных кинематических пар, с другой стороны, обратила на себя внимание впервые в 70-х годах прошлого столетия. Она служила предметом изучения ряда исследователей, первым из которых был знаменитый русский математик П. Л. Чебышев ¹⁾, затем Burmester ²⁾, Grübler ³⁾, Sylvester ⁴⁾, Otto Mohr ⁵⁾, Maurice Lévy ⁶⁾, Сомов ⁷⁾, Rodenberg ⁸⁾ и другие. Все эти работы посвящены исключительно механизмам или статически-определимым фермам.

Для *плоской* кинематической цепи мы выразим эту зависимость в самом общем виде следующим образом. Назовем все число звеньев цепи через n , включая сюда и звено — станину или фундамент, если тако-

¹⁾ «О параллелограммах» (Посвящается Моск. Высш. Технич. Училищу). Труды съезда русских естествоиспытателей в Москве, Отдел Технологии и Практической механики, 1870, стр. 9 — 30, а также сочинения П. Л. Чебышева, т. II. СПб., 1907, стр. 86.

²⁾ Burmester: «Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten», Civilingenieur, Bd. XXVI/1880, S. 255.

³⁾ Martin Grübler: «Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten», Civiling., Bd. XXIX (1883), S. 167 — 200; «Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbefleißes», 1885, S. 179 — 223; Enz. der Math. Wissenschaften». Bd. IV₁, Heft 2, S. 27; «Getriebelehre», Berlin, 1917, §§ 15, 16 и 20.

⁴⁾ I.-I. Sylvester: «Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne», Revue Scientifique, 1874. p. 496.

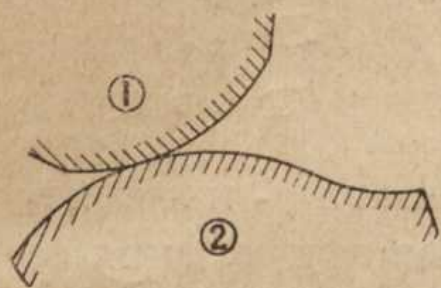
⁵⁾ Mohr, Zeitschr. d. Arch.-u. Ing.-Vereines zu Hannover, Bd, 20 (1874), S 509.

⁶⁾ Maurice Lévy: «La statique graphique». Paris 1874, p. 50 и 93 — 95.

⁷⁾ П. О. Сомов: «О степенях свободы кинематической цепи», Спб. 1888.

⁸⁾ Rodenberg: «Ein Beitrag zur systematischen Behandlung der ebenen Bewegung starrer Systeme», Zeitschr. für Math. u. Phys. 1892, S. 232 и 237.

вое имеется; приведенное число простых шарниров (считая простым или двучленным шарниром такой, который соединяет 2 звена, и принимая каждый i -членный шарнир за $i-1$ простых) — через p ; число поступательных пар — через q ; число пар, образованных взаимно-сцепляющимися зубчатыми колесами — через r ; приведенное число ремней, огибающих пару колес — через s (если какой-либо ремень огибает i звеньев, то его следует считать за $i-1$ ремней); наконец, число пар, образованных взаимно-касающимися профилями типа фиг. 1 или фиг. 2 — через t_1 , а типа фиг. 3 через t_2 . Тогда получим:



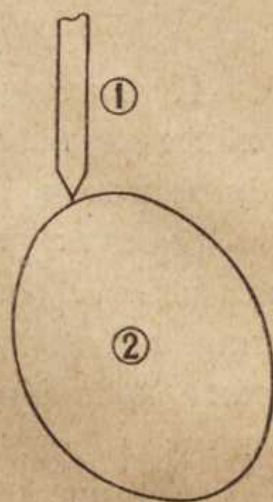
Фиг. 1.

$$V = 3n - 2p - 2q - r - s - t_1 - 2t_2 \quad \dots (1),$$

где V есть степень свободы цепи. Необходимо иметь в виду, что при выводе этой формулы предполагается не только возможность взаимных движений звеньев, но и возможность перемещения всей цепи в ее плоскости, как неизменяемого целого.

Еще более общую формулу мы получим, если будем считать *звеньями* данной цепи не только неизменяемой фигуры, но и некоторые *кинематические цепи*, входящие в ее состав. Таким образом мы получим обобщенное понятие о звене. Обозначая степень свободы каждого звена через V_i , получим:

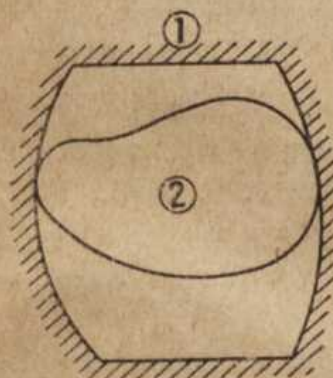
$$V = \sum_{i=1}^{i=n} V_i - 2p - 2q - r - s - t_1 - 2t_2 \quad \dots (2).$$



Фиг. 2.

Очевидно, что V есть всегда целое число.

Условие $V=3$ является характеристикой *неизменяемой фигуры*; $V=4$ характеристикой *механизма*; $V>4$ показывает, что цепь имеет большую степень свободы, чем механизм, а $V<3$ (или даже $V<0$) показывает, что данная цепь неизменяема и имеет лишние связи. Разумеется, все эти признаки являются *необходимыми*, но недостаточными признаками указанных свойств цепи. ¹⁾



Фиг. 3.

Если цепь состоит только из вращательных и поступательных пар, то $r=s=t_1=t_2=0$, и уравнение (1) переходит в

$$V = 3n - 2p - 2q \quad \dots \dots \dots (3).$$

В еще более частном случае, когда цепь содержит только вращательные пары (так называемая, шарнирная цепь), получается

$$V = 3n - 2p \quad \dots \dots \dots (4).$$

¹⁾ При наличии поступательных пар эти формулы иногда требуют поправки. См. Grübler: «Verhandl. d. Ver. z. Beförd. des Gewerbefleißes», 1885.

Заслуживает особого рассмотрения следующий частный случай, имеющий важное значение для теории стержневых ферм: шарнирная кинематическая цепь, каждое звено которой образует с другими звеньями только 2 кинематические пары; такие звенья мы будем называть двучленными. По большей части эти звенья имеют вид прямых стержней, снабженных шарнирами на концах; но форма звеньев, вообще говоря, не влияет на значение числа V . Если мы обозначим число звеньев через n , а число *различных* точек, в которых помещены центры шарниров, через p_0 , то для таких цепей, кроме вышеприведенных формул, можно также пользоваться следующей простой формулой:

$$V = p_0 - n \quad (5).$$

2. Степень свободы V , как мы уже отметили, не характеризует в отдельности ни степени *взаимной подвижности* звеньев цепи, ни подвижности последней, как одного целого. Между тем в громадном большинстве случаев прямой практический интерес представляет только первое из названных двух слагаемых.

Действительно, с тех пор как Reuleaux предложил считать неподвижный фундамент кинематической цепи за одно из ее звеньев, оказывается, что та степень свободы, которая нас обычно интересует, есть ни что иное, как степень подвижности цепи по отношению к неподвижному звену. Но так как степень свободы цепи не зависит от того, какое именно звено является неподвижным, то ясно, что в этом случае мы должны заменить понятие о степени свободы цепи другим понятием, которое характеризовало бы лишь степень относительной подвижности ее звеньев.

В других случаях, когда неподвижное звено вообще отсутствует, например, когда рассматриваемая кинематическая цепь входит в состав другой, более сложной цепи, не менее важной характеристикой является степень подвижности ее относительно любого из ее звеньев. Весьма серьезное значение эта характеристика имеет для *ферм*, в которых обычно вопрос о подвижности системы, как целого, не вызывает никаких сомнений, между тем как вопрос о *взаимной* неподвижности звеньев нередко требует внимательного анализа.

Наряду с понятием о степени свободы кинематической цепи V мы будем пользоваться также понятием о *степени изменяемости* ее, которую будем обозначать через W . Число W есть ни что иное, как степень свободы цепи, *при условии, что одно из ее звеньев сделано неподвижным*. Цепь с неподвижным звеном мы будем называть *несвободной*, в отличие от *свободной* цепи, у которой все звенья подвижны. Легко видеть, что числа V и W связаны между собой следующим простым соотношением:

$$W = V - 3 \quad (6).$$

Таким образом, по данной степени свободы V сейчас же можно определить также степень изменяемости W и наоборот.

Впервые это понятие было введено в 1887 г. Таубелес¹⁾, который рассматривал то же число с обратным знаком и обозначил его, как «степень цепи» (Grad der Kette). После него это понятие встречается только в 1914 г. у Ассур²⁾, который, однако, рассматривал исключительно механизмы.

3. На основании уравнения (6), пользуясь формулами (1) — (5), получаем соответственно:

$$W = 3n - 2p - 2q - r - s - t_1 - 2t_2 - 3 \dots (1'),$$

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} W_i + 3n - 2p - 2q - r - s - t_1 - 2t_2 - 3 \dots (2'),$$

$$W = 3n - 2p - 2q - 3 \dots (3'),$$

$$W = 3n - 2p - 3 \dots (4'),$$

$$W = 2p_0 - n - 3 \dots (5').$$

Степень изменяемости кинематической цепи является ее первой и самой важной характеристикой. Разделение цепей по этому признаку отвечает глубокому различию между их кинематическими свойствами. Мы будем различать цепи *однократно-изменяемые*, *двукратно-изменяемые* и т. д.

Нулевая степень изменяемости есть характеристика неизменяемой фигуры, не имеющей лишних связей. К этой категории кинематических цепей относятся все статически-определимые фермы и инженерные сооружения.³⁾ Отрицательная степень изменяемости показывает количество лишних связей, т.-е. таких связей, которые не являются необходимыми для обеспечения неизменяемости цепи. Такой степенью изменяемости обладают статически-неопределимые фермы и сооружения.

Однократно-изменяемая цепь обладает тем свойством, что в ней координаты всех точек любого из ее звеньев определяются всего только одной независимой переменной. Из этого следует, что в такой цепи каждая точка описывает относительно любого из ее звеньев вполне определенную траекторию. Такую цепь Reuleaux предложил называть цепью принужденного движения (zwangläufig).⁴⁾

¹⁾ Таубелес: «Ueber die Bildung ebener kinematischer Ketten», Technische Blätter Prag., 1887, S. 22.

²⁾ Ассур: «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации», Изв. С.-Птб. Политехнич. Института. Т. XX и XXI; стр. 351.

³⁾ Для статически-определимых ферм, состоящих из стержней с шарнирами по концам, А. Förppl доказал аналитически, что признак кинематической неизменяемости тождествен с признаком статической определимости. См. его «Vorlesungen über technische Mechanik», Bd. II (Graphische Statik), 1922, § 39, стр. 204 — 210.

⁴⁾ Reuleaux: «Theoretische Kinematik», Braunschweig, 1875, S. 50. Такие цепи он предлагает называть «zwangläufig geschlossen» или просто «geschlossen»; но последний термин («замкнутая цепь») употребляется теперь в другом смысле, именно указывает на отсутствие звеньев одночленных (т.-е. образующих лишь одну пару). Название «zwangläufig» или «цепь принужденного движения», как его переводит

Если придерживаться этой терминологии, то можно сказать, что *цепь однократно-изменяемая и цепь принужденного движения тождественны между собою. Иначе, механизм есть однократно-изменяемая цепь с одним неподвижным звеном.*

Множественно-изменяемые цепи, конечно, не столь часто применяются на практике, как изменяемые или однократно-изменяемые системы, однако, и они находят себе применение. Для доказательства этого достаточно будет привести несколько примеров.

Двукратно-изменяемые цепи находят себе применение в специальных приборах, предназначенных для механического производства различных измерений или преобразований над заданными кривыми. Для примера напомним пантограф Шейнера, который служит для вычерчивания фигур, подобных любой данной фигуре. Другим примером может служить известный чертежный прибор, укрепляемый на чертежной доске: он позволяет устанавливать обе масштабные линейки на чертежной доске в каком угодно положении, перемещать их параллельно, поворачивать обе вместе или каждую в отдельности на любой угол и т. д. ¹⁾ Далее назовем *планиметры*, служащие для обмера площадей, *интеграфы* для вычерчивания интегралов данных кривых, *гармонические анализаторы* для механического подбора уравнения, выражающего данную кривую, или для разложения сложной кривой на отдельные синусоиды, и т. д. ²⁾ К ним же относятся многие из, так называемых, самопишущих приборов, в которых движение карандаша, вычерчивающего ту или иную диаграмму, и движение барабана с бумажной лентой, на которой чертится диаграмма, кинематически не связаны между собой. Двукратно — или многократно-изменяемые цепи употребляются в кулисных механизмах паровозов, в различных станках, механических орудиях и т. п., в которых перед пуском в ход требуется особая взаимная установка частей. Для этого некоторые из звеньев конструируются из нескольких частей, которые по желанию могут быть определенным образом передвинуты друг относительно друга и затем закреплены. К числу многократно-изменяемых цепей относятся также

Ассур, мы не можем признать вполне удачным, так как во *всякой* кинематической цепи движение звеньев является в известной степени принужденным. В. Ассур в названной книге, (ч. I, стр. 16), вводит термин: «цепь с полным числом условий», но это выражение также — не вполне удачно, так как оно — недостаточно ясно и притом соответствует скорее неизменяемой фигуре, чем механизму. Тот же термин встречается у Sylvester'a: «Système de tiges à liaison complète», Revue Scient. 1874, p. 491. Мы будем пользоваться в дальнейшем исключительно обозначением: «*однократно-изменяемая цепь*», как совершенно точно характеризующим главное свойство цепи.

¹⁾ См. Voigt: «Kostenersparnis im Konstruktionsbureau», Maschinenbau, 1924, H. 19, S. 698.

²⁾ Описание многих приборов дано в книге Galle: «Mathematische Instrumente». См. также Abdank — Abakanowitsch: «Les integraphes et la courbe integrale», Простой прибор для графического интегрирования указан в книге H. Naatz u. E. W. Blochmann: «Das zeichnerische Integrieren mit dem Integranten», München u. Berlin, 1921. На русском языке см. А. К. Крылов: «Лекции о приближенных вычислениях» Спб. 1911, стр. 129 — 150; 203 — 211; 303 — 319.

органы движения животных и человека. ¹⁾ Всем известная из графической статики фигура «веревочный многоугольник» также является многократно-изменяемой цепью.

Наконец, как это будет видно из дальнейшего изложения, двукратно и многократно-изменяемые цепи могут найти себе большое применение при изучении движения точек механизмов и при определении усилий в неизменяемых статически-определимых или неопределимых инженерных сооружениях.

4. Внимание всех исследователей, занимавшихся кинематическими цепями, было приковано до сих пор почти исключительно к механизмам. Кинематика цепей, обладающих большей степенью изменяемости, почти не имеет литературы, если не считать теории отдельных приборов, главным образом, математических, вроде названных выше. Но специальные работы, посвященные исключительно изучению отдельных приборов, не имеют ничего общего с теорией многократно-изменяемых цепей, как особой главой кинематики. Из работ, более близко затрагивающих вопросы кинематики таких цепей, мы можем назвать лишь вышеупомянутую работу Taubeles, в которой приводится формула для определения степени изменяемости цепей, затем работу Otto Mohr о построении скоростей и ускорений для цепи с произвольной степенью свободы при наличии достаточного количества данных для такого построения ²⁾. Некоторые важные кинематические свойства двукратно-изменяемой цепи указаны в вышеупомянутой работе Роденберга.

Графический способ определения статических усилий в многократно-изменяемой шарнирно-стержневой цепи предложен Wittenbauer'ом в работе ³⁾, к которой мы еще вернемся ниже. Некоторые вопросы динамики таких же цепей затронуты в названной книге О. Fischer'a. Этим, насколько нам известно, исчерпывается все.

В настоящей статье мы остановимся вкратце на некоторых общих кинематических свойствах многократно-изменяемых цепей и затем рассмотрим более подробно основы *графической статики* таких цепей.

5. В каждой многократно-изменяемой цепи имеются такие звенья, взаимное движение которых—неопределенно. Так, в тоекратно-изменяемой цепи, изображенной на фиг. 4, следующие звенья могут перемещаться друг относительно друга произвольно: 5 и 8; 5 и 2; 6 и 1; 6 и 3; 6 и 2; 7 и 4; 7 и 3; 7 и 2 и т. д. В то же время звенья 5 и 6; 5 и 4 и т. д., будучи элементами вращательных кинематических пар, могут перемещаться друг относительно друга лишь вполне определенным образом. То же можно сказать о звеньях 3 и 1 или 2 и 4, хотя и не образующих друг с другом пар, но принадлежащих к однократно-изменяемой четырех-

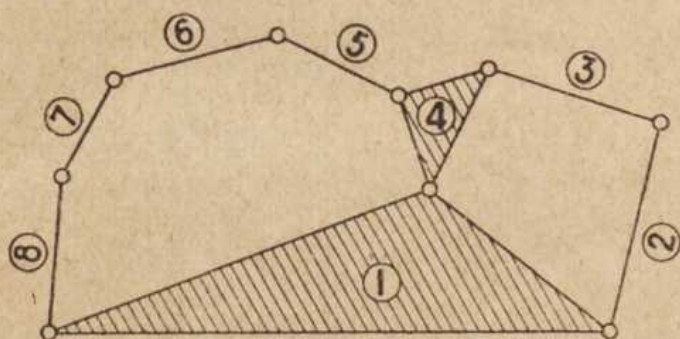
¹⁾ Интересное исследование таких органов с точки зрения механики кинематических цепей содержится в книге О. Fischer: «Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebendigen Körper», Leipz. u. Berlin, 1906.

²⁾ Otto Mohr: «Abhandlungen auf dem Gebiete der technischen Mechanik», Berlin 1914, S. 128 и след.

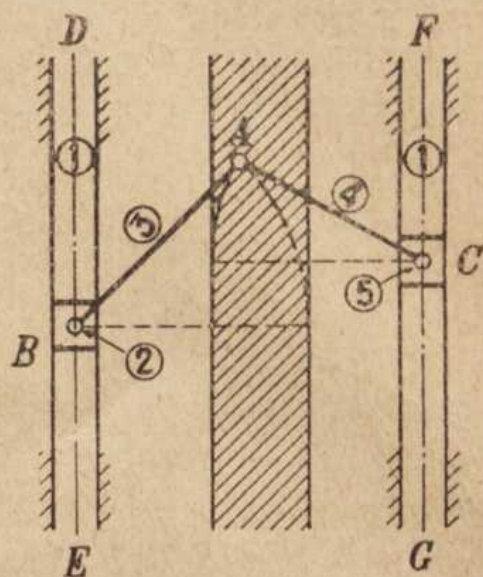
³⁾ F. Wittenbauer: «Das Gleichgewicht ebener kinematischer Ketten», сборник «Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstage», Berlin 1916, S. 212.

звенной цепи 1—2—3—4. Итак, в многократно-изменяемой цепи наряду со звеньями, перемещающимися друг относительно друга определенным образом, имеются и звенья с неопределенными взаимными движениями. Точки, принадлежащие последним звеньям, могут перемещаться друг относительно друга, как угодно.

Можно установить следующее резкое различие между двух, трех и многократно-изменяемыми цепями, с одной стороны, и однократно-изменяемой — с другой стороны. В то время, как в последней все точки движутся относительно любого из ее звеньев по *линиям* (траекториям), в остальных цепях всегда имеются точки, обе координаты которых могут быть заданы относительно какого-либо звена произвольно и независимо друг от друга. Такие точки движутся по *плоскости* и могут занимать внутри некоторой площадки любое положение. Точки обоих указанных типов можно называть *линейно-подвижными* и *плоско-подвижными*.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Рассмотрим, например, двукратно-изменяемую цепь, показанную на фиг. 5. Точки *B* и *C* скользят по двум параллельным прямым *DE* и *FG* относительно звена 1; точка *A* может занимать любое положение внутри заштрихованной на чертеже бесконечной полосы, стороны которой отстоят от прямых *DE* и *FG* соответственно на расстояниях, равных *BA* и *CA*. Свойством плоской подвижности относительно звена 1 обладает также всякая другая точка звеньев 3 и 4, находящаяся на конечном (не бесконечно-малом) расстоянии от точек *B* и *C*. Аналогичным свойством обладают точки звена 5 относительно звена 2, и т. д.

Если прямые *DE* и *FG* не параллельны между собой (фиг. 6), точка *A* описывает площадку, ограниченную заштрихованным на чертеже параллелограммом.

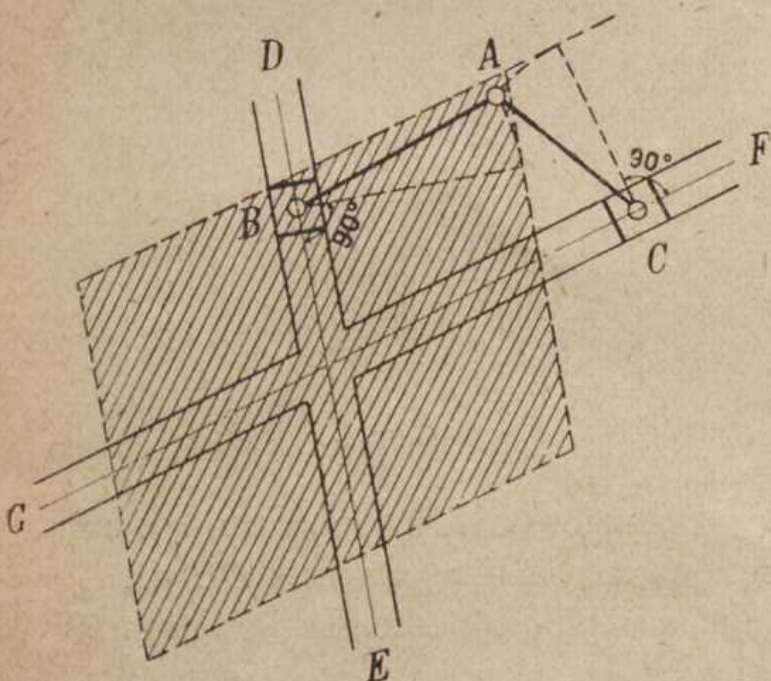
На фиг. 7, где показана другая пятизвенная двукратно-изменяемая цепь, точка *A* может занимать любое положение внутри площадки, ограниченной четырьмя дугами окружностей¹⁾.

¹⁾ То обстоятельство, что контур, ограничивающий площадку движения, является для каждой точки вполне определенным, могло бы послужить новым источником получения движений при помощи силового замыкания многократно-изменяемых цепей и принуждения некоторой точки двигаться по предельному контуру. Этот вопрос пока не освещен ни теорией, ни практикой.

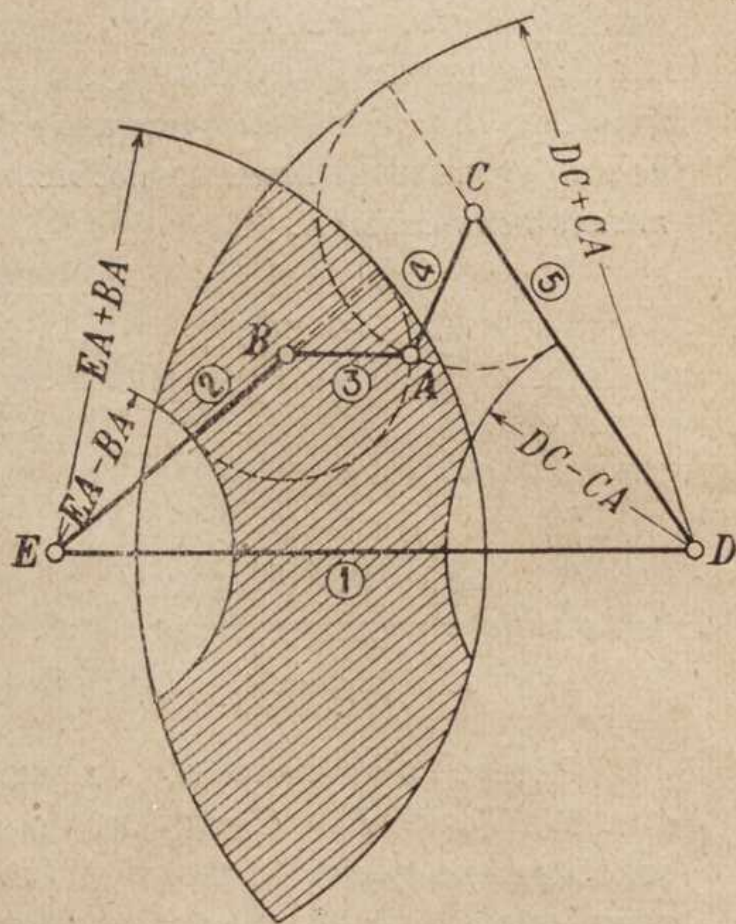
Свойством плоской подвижности относительно звена 1 обладают и другие точки звеньев 3 и 4, за исключением точек B и C и бесконечно-близких к ним.

6. Многократно-изменяемая цепь, очевидно, обладает бесконечным множеством возможных перемещений. От наложения дополнительных условий или, иначе говоря, — связей, движение может стать определенным, т. е. цепь может обратиться в однократно-изменяемую.

Например, в цепи со степенью изменяемости, равную 2, положения всех точек представляют собой функции 2 независимых переменных. Скрепим систему координат с каким-либо из звеньев цепи. Если мы зададимся 2 координатами какой-либо точки, которая может перемещаться относительно этого звена как угодно, то этим определятся координаты всех точек всех звеньев цепи. Таким обра-



Фиг. 6.

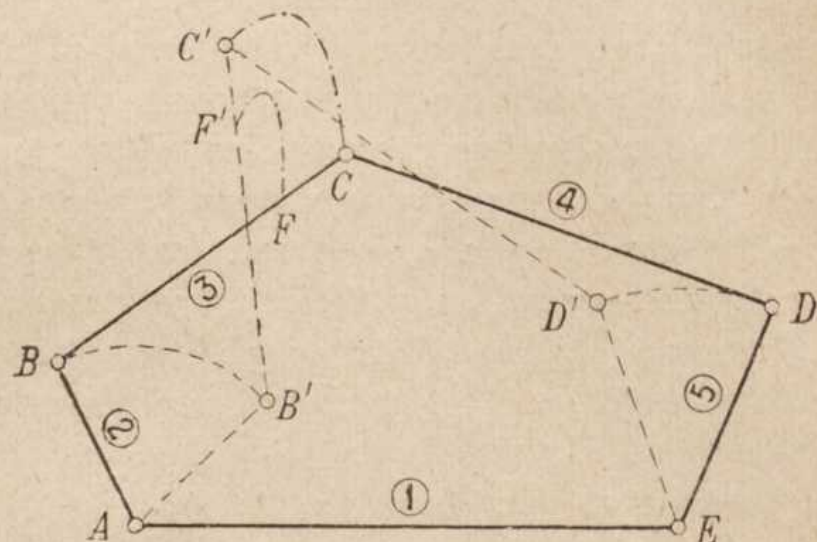


Фиг. 7.

зом, давая одной точке цепи определенное положение относительно какого-либо из ее звеньев, получим и для всех остальных точек вполне определенные положения. Иначе, если мы заставим одну точку цепи, могущую двигаться произвольно, описывать определенную траекторию, то и остальные точки будут двигаться по определенным траекториям, или если мы такой точке дадим определенное перемещение, то и остальные точки переместятся вполне определенным образом.

В качестве иллюстрации рассмотрим 5-звенную двукратно-изменяемую цепь, показанную на фиг. 8. Если мы возьмем произвольную точку F звена 3 и переместим ее в произвольное положение F' , то все звенья займут определенные положения, указанные на чертеже пунктиром. Двигая точку по произвольной кривой, мы этим заставим все остальные точки двигаться по определенным траекториям (на чертеже показана траектория точки C). Можно также задаться *направлениями перемеще-*

ний двух точек, например, точек F и H (прямые FG и HJ , фиг. 9). Соответствующие перемещения остальных точек найдутся тогда следующим образом: разъединим звенья 3 и 4 в шарнире C , затем будем двигать точки F и H по указанным направлениям и строить для правой и левой частей цепи траекторию точки C . Действительное положение C' последней найдется на пересечении обеих траекторий. Такой же результат получится, если мы зададимся по отношению к звену 1 одной координатой какой-либо точки звена 2 и одной координатой точки звена 5. Например, задавши по одной координате точек B и D , мы сейчас же найдем на описываемых ими окружностях положения самих точек, а затем — положение точки C .



Фиг. 8.

Аналогичные рассуждения применимы и к цепям с большей степенью изменяемости.

7. Чтобы разобраться в бесконечном множестве возможных перемещений многократно-изменяемой цепи, необходимо найти для них простое и наглядное изображение. Мы найдем его, исходя из самого понятия о степени изменяемости цепи.

Пусть дана цепь, степень изменяемости которой равна n , где $n \geq 2$. Обозначим те n независимых переменных, которыми определяется положение всех точек цепи по отношению к какому-либо из ее звеньев, соответственно через

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n.$$

Эти аргументы могут быть выбраны произвольно, но непременно должны быть независимыми друг от друга.

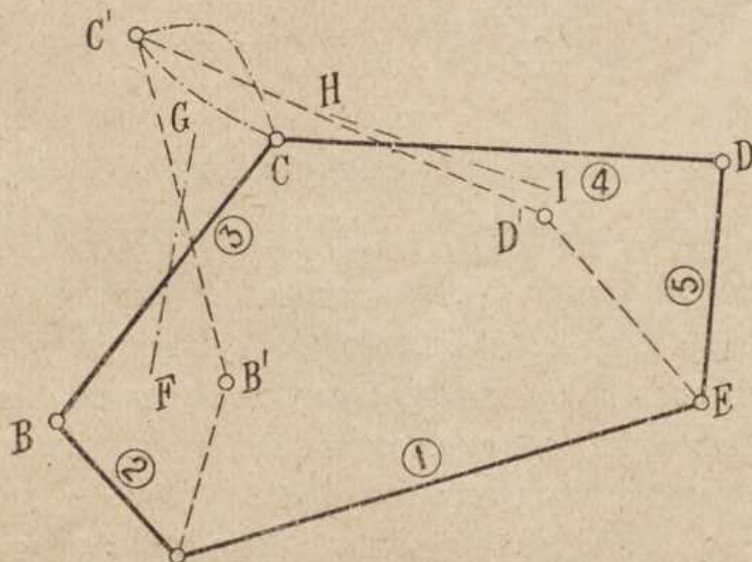
Для координаты любой точки какого-либо из звеньев будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= f_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ y_i &= \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned} \right\} \quad (7),$$

где f_i, φ_i — некоторые функции от этих переменных.

Составим полные дифференциалы этих функций:

$$\left. \begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_n} d\alpha_n \\ dy_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_n} d\alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (8).$$



Фиг. 9.

В правых частях этих тождеств первое слагаемое выражает собою приращение координат изучаемой точки при условии, что изменяется один только аргумент α_1 , а все остальные независимые переменные остаются без изменения. Но движение цепи, вызываемое изменением одной только независимой переменной, есть движение *однократно-изменяемой* цепи. Точно так же второе слагаемое выражает собою результат движения однократно-изменяемой цепи, которая получится, если мы введем $n-1$ условий о неизменяемости аргументов $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ и дадим возможность изменяться одному только аргументу α_2 .

Продолжая это рассуждение, мы придем к следующему выводу: *всякое бесконечно-малое движение цепи, имеющей n степеней изменяемости, может быть представлено, как геометрическая сумма независимых друг от друга движений, из которых каждое принадлежит некоторой однократно-изменяемой цепи. Каждая из последних получается из данной цепи путем введения $n-1$ независимых друг от друга связей. Амплитуда каждого из составляющих движений пропорциональна приращению соответствующего аргумента $d\alpha_i$.*

Эту теорему нетрудно распространить и на движения конечные.

Далее возьмем, вместо дифференциалов dx_i, dy_i , производные по времени $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}$. Получим выражения двух проекций скорости любой точки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_n} \cdot \frac{d\alpha_n}{dt} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_n} \cdot \frac{d\alpha_n}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

Выражения

$$\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}$$

можно рассматривать, как скорости изменения аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Складывая обе проекции, $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}$, как векторы, получим следующий вывод: *скорость любой точки цепи при всяком возможном перемещении последней может быть представлена, как геометрическая сумма скоростей этой точки в ее n независимых друг от друга перемещениях, из которых каждое относится к некоторой однократно-изменяемой цепи.* Эта теорема, как видим, непосредственно вытекает из предыдущей.

Первая из этих двух теорем, по нашему мнению, является фундаментом для всей кинематики и статики многократно-изменяемых цепей.

Все дальнейшее содержание нашего исследования основано непосредственно на ней.

Однако, прежде чем перейти к их применениям, заметим, что вышеуказанный способ представления всевозможных движений многократно-изменяемой цепи не является единственным. Действительно, суммы, стоящие в правой части уравнений (8), можно получить, комбинируя слагаемые каким угодно способом в группы. Таким образом *всевозможные*

перемещения цепи, имеющей n степеней изменяемости, можно получить из цепей, имеющих степени изменяемости, соответственно равные $k_1, k_2, \dots, k_r$, при условии, что

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$$

Можно также получить движение цепи, взявши

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r > n,$$

но при этом некоторые движения будут общими для различных цепей. Для примера рассмотрим цепь, для которой $W=3$. Из уравнения (8) мы видим, что бесконечно-малое движение цепи характеризуется приращениями аргументов

$$d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3.$$

Заменяя дифференциалы весьма малыми приращениями, можем представить их в виде:

$$\mu_1 \cdot \Delta\alpha_1, \mu_2 \Delta\alpha_2, \mu_3 \Delta\alpha_3,$$

где

$$\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3 —$$

числа произвольные, но определенные, а μ_1, μ_2, μ_3 , — не-

определенные. Возьмем два движения, характеризуемые соответственно приращениями:

$$\begin{aligned} \mu_1 \Delta\alpha_1, \mu_2 \Delta\alpha_2, 0, \\ \mu'_1 \Delta\alpha_1, 0, \mu_3 \Delta\alpha_3. \end{aligned}$$

Мы получим две двукратно-изменяемые цепи. Совокупность всех этих движений, очевидно, дает нам возможные движения 3-кратно-изменяемой цепи. Вместе с тем легко видеть, что среди ∞^2 возможных перемещений первой цепи и такого же количества перемещений второй имеется ∞^1 общих движений. Последние характеризуются приращениями

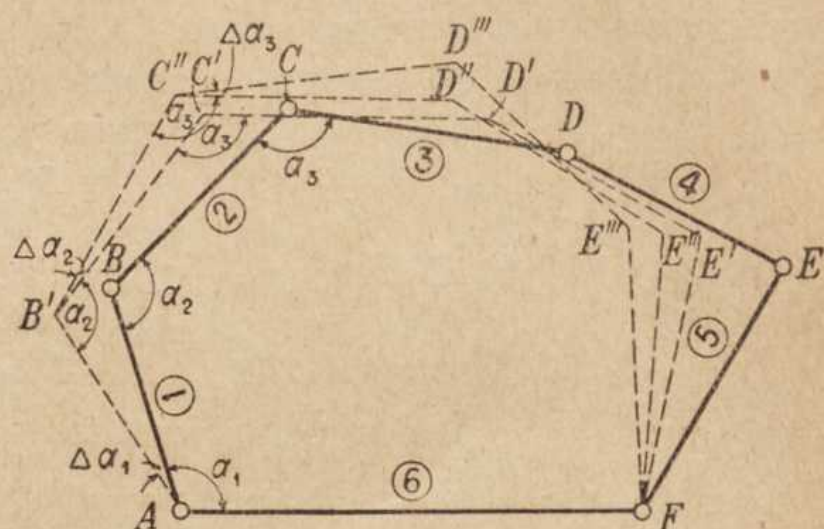
$$\mu_1 \Delta\alpha_1, 0, 0$$

или

$$\mu'_1 \Delta\alpha_1, 0, 0$$

и принадлежат одному и тому же механизму, движение которого определяется аргументом α_1 . ¹⁾

8. Для иллюстрации этих теорем, рассмотрим всевозможные движения шарнирного шестиугольника, имеющего степень изменяемости $W=3$, (фиг. 10).



Фиг. 10.

¹⁾ Очевидно, что теоремы, высказанные здесь для несвободной цепи, имеющей n степеней изменяемости, могут быть применены и к свободной цепи, имеющей n степеней свободы.

Во избежание повторений, отметим здесь, что в дальнейшем мы будем говорить исключительно о *бесконечно-малых* движениях.

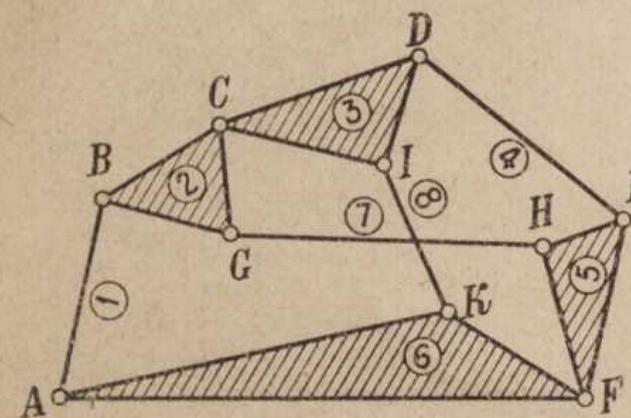
Примем за независимые переменные—углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, обозначенные на чертеже. Мы можем задать произвольно приращения

$$\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3$$

этих углов. Изменим сначала угол α_1 на величину $\Delta\alpha_1$, не меняя остальных углов. Тогда стержни 1, 2, 3 будут двигаться, как одно целое, а цепь обратится в 4-звенный механизм $ADEF$; в результате такого перемещения цепь займет положение $AB'C'D'E'F$. После этого оставим без изменения значения $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$ и α_3 , а углу α_2 дадим приращение $\Delta\alpha_2$. Тогда точка B останется на месте, звенья 2 и 3 сольются в одно звено, и цепь обратится в 4-звенный механизм $BDEF$. Наконец, изменяя один

только угол α_3 , мы достигнем того, что точки B и C останутся на месте, а цепь переместится, как 4-звенный механизм $CDEF$. В результате этих трех частных перемещений мы получим суммарное перемещение, удовлетворяющее всем поставленным условиям.

Давая приращениям $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3$ всевозможные бесконечно-малые или конечные значения, мы получим всевозможные перемещения цепи.



Фиг. 11.

Совершенно таким же образом решилась бы задача, если бы, вместо амплитуд $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3$ трех составляющих движений, были даны *скорости* изменения этих амплитуд, т. е. угловые скорости:

$$\omega_{16} = \frac{d\alpha_1}{dt}, \quad \omega_{21} = \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \omega_{32} = \frac{d\alpha_3}{dt}.$$

В рассматриваемом примере все 3 условия задачи легко и непосредственно удовлетворяются каждое в отдельности. В более сложных случаях приходится брать амплитуды отдельных движений *неопределенными* по величине, т. е. вводить в каждое такое движение неопределенный множитель, а затем подобрать эти множители так, чтобы удовлетворились все заданные условия. Значения неопределенных множителей определяются при этом из системы совместных уравнений.

Пусть, например, требуется дать той же цепи такое бесконечно-малое перемещение, при котором были бы соблюдены следующие 3 условия: 1) угловая скорость звена 3 относительно звена 4 имела бы данное значение ω_{34} ; 2) расстояние между точками G и H (фиг. 11) оставалась без изменения; 3) расстояние между точками J и K также осталось бы без изменения. Так как цепь—троекратно-изменяемая, то наличие 3-х данных создает совершенно определенное перемещение. Составим это перемещение из трех простых перемещений того же вида, как в предыдущем примере. В первом движении возьмем угловую скорость звена 1

относительно звена 6 равною произвольной величине ω_1' . Так как при этом цепь движется, как четырехзвенный механизм $AD\ EF$, то из многоугольника скоростей сейчас же определяется угловая скорость взаимного вращения звеньев 3 и 4, а также скорости сближения точек J и K , G и H ; обозначим эти скорости соответственно через ω_{34}' , a' , b' .

Во втором движении назовем угловую скорость звена 2 относительно звена 1 через ω_{21}'' , а вышеупомянутые скорости, которые найдутся из нового многоугольника скоростей, соответственно через ω_{34}'' , a'' , b'' . Наконец, в третьем движении пусть имеем угловую скорость звена 3 относительно звена 2 равно ω_{32}''' , а значения тех же 3 скоростей — ω_{34}''' , a''' , b''' . Для того, чтобы сумма трех выбранных нами перемещений удовлетворила требованиям задачи, помножим эти перемещения соответственно на неопределенные множители μ_1 , μ_2 , μ_3 и выразим условия в виде уравнений

$$\begin{aligned}\mu_1 \omega_{34}' + \mu_2 \omega_{34}'' + \mu_3 \omega_{34}''' &= \omega_{34}, \\ \mu_1 a' + \mu_2 a'' + \mu_3 a''' &= 0, \\ \mu_1 b' + \mu_2 b'' + \mu_3 b''' &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда найдутся коэффициенты μ_1 , μ_2 , μ_3 .

Так как выбранные нами 3 движения независимы друг от друга, т. е. ни одно из них не может получиться путем повторения и сложения остальных двух, то значения μ_1 , μ_2 , μ_3 окажутся конечными и определенными. Определив эти коэффициенты, мы сможем определить и движение любой точки цепи. Например, если скорости какой либо точки в трех составляющих движениях соответственно равны v' , v'' , v''' , то в окончательном движении скорость будет:

$$v = \overline{v'} + \overline{v''} + \overline{v'''},$$

где черточки указывают на *векториальное сложение*.

Этот способ применения неопределенных коэффициентов указан Мором. ¹⁾

9. Применим сначала основную теорему к вопросу о нахождении мгновенных центров вращения для звеньев кинематической цепи. ²⁾ Для этой цели обратимся прежде всего к двукратно-изменяемым цепям, которые из всех многократно-изменяемых имеют для нас наибольшее значение. Докажем для них замечательное свойство бесконечно-малых перемещений, установленные впервые Rodenberg'ом. ³⁾

Любое возможное движение двукратно-изменяемой цепи есть сумма двух движений, из которых каждое принадлежит некоторому определен-

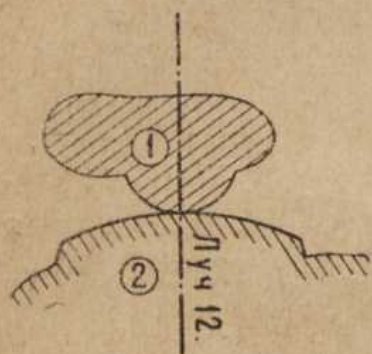
¹⁾ Mohr: «Abhandlungen»... 1914, S. 130.

²⁾ Мы не можем согласиться с точкой зрения Ассура о ненужности и бесполезности построения мгновенных центров вращения (см. его работу, ч. вторая стр. 11-12). Особенно важное значение они имеют, как мы увидим ниже, в *графической статике* кинематических цепей при определении усилий в элементах цепи и при построении инфлюэнтных линий по кинематическому методу.

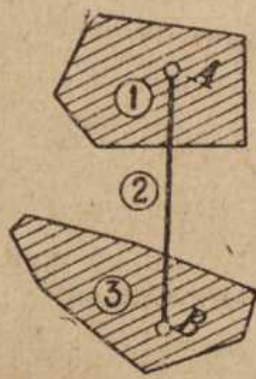
³⁾ «Ein Beitrag zur systematischen Behandlung der ebenen Bewegung starrer Systeme», Z. f. Math. u. Phys., 1892. S. 223

ному механизму. Выбрав эти два механизма, с помощью которых можно представить все бесконечно-малые движения цепи, мы тем самым получаем для каждого звена два определенных мгновенных центра вращения. Но два последовательных бесконечно-малых поворота около каких-либо точек O_1 и O_2 , как известно, равносильны повороту около некоторой точки O_3 , лежащей на прямой $O_1 O_2$ или на ее продолжении. Меняя угловые скорости каждого из двух названных вращений, мы тем самым изменяем суммарное перемещение цепи, но точка O_3 от этого только передвигается ближе к полюсу O_1 или O_2 , не сходя с этой прямой. Итак, мы получили следующую теорему: *в двукратно-изменяемой цепи геометрическое место мгновенных центров взаимного вращения двух любых звеньев при всевозможных бесконечно-малых перемещениях цепи есть прямая линия.* Это и есть теорема Роденберга ¹⁾.

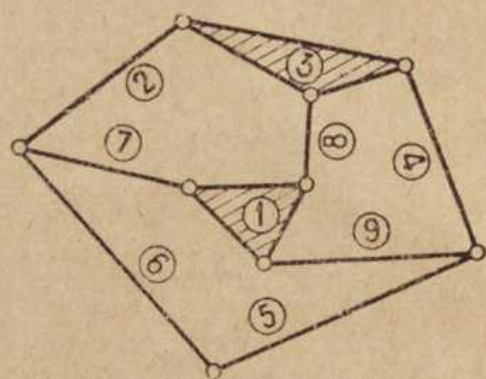
Каждую такую прямую Роденберг называет «нормальным лучем».



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

В дальнейшем мы будем обозначать нормальные лучи, как и самые полюсы, двумя числами, указывающими номера соответствующих звеньев. Например, луч или полюс, характеризующие взаимное движение звеньев 1 и 2, будем называть соответственно лучем или полюсом 12, и т. д.

В каждой двукратно или даже многократно-изменяемой цепи некоторые нормальные лучи бывают даны непосредственно. Например, если два звена 1 и 2 (фиг. 12) образуют высшую кинематическую пару, то нормальный луч для их взаимного движения, очевидно, лежит на общей нормали к обоим соприкасающимся профилям.

Если два звена связаны между собою шарниром или поступательной парой, то это равносильно заданию *двух* нормальных лучей, пересекающихся в центре шарнира (в случае поступательной пары шарнир лежит в бесконечности).

Если какое-либо звено 1 шарнирно связано с двумя звеньями 2 и 3 (фиг. 13), то прямая AB играет роль нормального луча 13. Действительно точки, A и B являются мгновенными центрами вращения 12 и 23, поэтому, согласно известной теореме Аронгольда ²⁾, при всех возможных

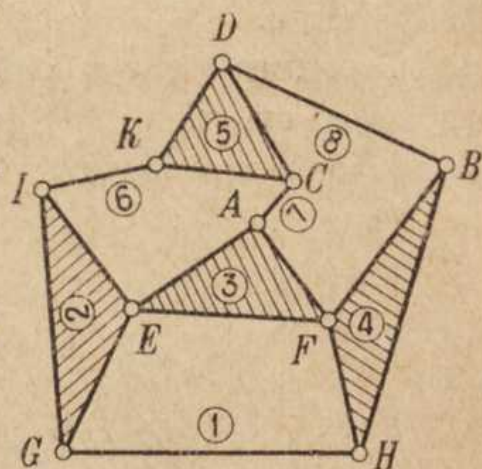
¹⁾ Доказательство Роденберга отличается от приведенного здесь. Теорема эта была найдена автором самостоятельно в 1923 г., когда работа Роденберга была еще ему неизвестна.

²⁾ Aronhold: «Grundzüge der kinematischen Geometrie», Verhandl. des Vereines z. Beförd. d. Gewerbefleisses, 1872, S. 137.

перемещениях цепи полюс 23 должен лежать на прямой AB . На этом основании можно сказать, что в фиг. 14, где изображена 9-звенная двукратно-изменяемая цепь, стержень 8 играет роль нормального луча 13, стержень 7 — нормальных лучей 12 и 16, стержень 9 — нормальных лучей 14 и 15, стержень 2 — лучей 37 и 36 и т. д. Самую цепь можно считать не 9-звенной, а, например, 6-звенной, если считать стержни 7, 8 и 9 за нормальные лучи, не причисляя их к звеньям. Исходя из общих соображений, Роденберг в упомянутой работе считает, что *задание достаточного числа нормальных лучей для движения данных звеньев есть наиболее общий способ задания движения в кинематических цепях.*

Из приведенных примеров ясно, что задание какого-либо нормального луча ik — равносильно наложению на движение звеньев i, k , одной связи. Если дано n звеньев и m нормальных лучей, не лежащих в бесконечности, то степень изменяемости такой цепи, вообще говоря, будет:

$$W = 3n - m - 3 \dots (10).$$



Фиг. 15.

При пользовании этой формулой необходимо только иметь в виду, что те звенья, которые фигурируют, как нормальные лучи, не должны входить в счет числа n .

Пользование свойствами нормальных лучей облегчает решение многих задач для сложных кинематических цепей с любой степенью изменяемости.

10. Покажем применение их к построению мгновенных центров вращения для таких механизмов, для которых пользование одною только теоремой Аронгольда о трех мгновенных центрах вращения оказывается недостаточным.

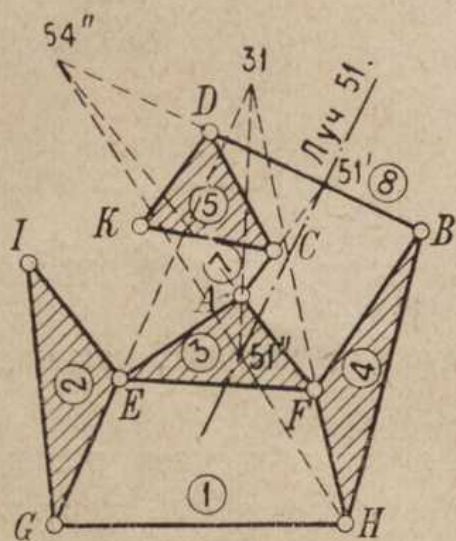
Рассмотрим 8-звенный механизм, показанный на фиг. 15. Он образован из 4-звенного механизма 1 — 2 — 3 — 4, к которому при помощи трех стержней — 6, 7 и 8 присоединено звено 5. Требуется построить мгновенный центр вращения 51.

Поступим следующим образом: удалим из данной цепи какой-либо стержень или вообще удалим одну из ее связей. Тогда остальные звенья составят двукратно-изменяемую цепь, и можно будет искать положение нормального луча 51. После этого вернем стержень на прежнее место, но удалим какую-либо другую связь и в полученной новой двукратно-изменяемой цепи опять найдем луч 51. На пересечении этих двух лучей и будет лежать искомый мгновенный центр вращения 51. Действительно, движение данного механизма есть одновременно возможное перемещение как первой, так и второй двукратно-изменяемых цепей.

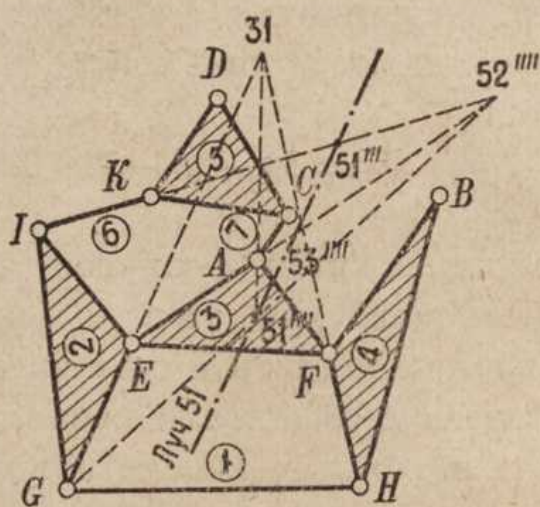
Удалим, например, стержень 6 и рассмотрим какие-либо два перемещения остающейся цепи (фиг. 16). В качестве первого перемещения возьмем то, которое получится, если между точками A и B временно

вставить стержень AB . Тогда звенья $1-2-3-4$ сольются в одно звено, и полюс $51'$ найдется на пересечении лучей AC и BD . Для получения второго перемещения удалим введенный нами стержень AB , но вставим стержень AD . Тогда звенья $5-7$ сольются в одно звено, и полюс 51 найдется двукратным применением теоремы Аронгольда: на пересечении прямых $53-54$ и $58-84$ лежит полюс 54 , а на пересечении лучей $53-31$ и $54-41$ — искомый полюс $51''$. После этого нужно соединить точки $51'$ и $51''$ прямою, которая и будет искомым нормальным лучом 51 . Этим будет закончено изучение полученной двукратно-изменяемой цепи.

Вернемся теперь снова к данному механизму и удалим из него, например, стержень 8 (фиг. 17). В новой двукратно-изменяемой цепи опять придется искать нормальный луч 51 , причем можно поступить



Фиг. 16.



Фиг. 17.

совершенно так же, как мы это сделали выше: сначала рассмотреть механизм, который получится от присоединения стержня JA , а потом — механизм, получаемый от присоединения стержня $AК$. Таким образом получаются еще две точки, $51'''$ и $51''''$, а следовательно, еще один луч 51 . После этого останется только найти пересечение обоих нормальных лучей — и тем самым задача будет закончена. Все изложенное построение может быть проделано в несколько минут.

В случае, если звенья рассмотренной нами цепи образуют симметричную фигуру, достаточно построить только *один* луч 51 . Пересечение его с осью симметрии и будет полюсом 51 .

11. Произведенное здесь построение допускает различные видоизменения. Так, например, вместо удаления стержня 6 или 8 , можно было бы удалить стержень 7 . Вместо введения нового стержня AD , можно было бы вставить стержень DF , или CF , или CB , и т. д.

Можно вообще отказаться от введения новых стержней, а осуществлять новые связи другим способом. Например, *уничтожил шарнир в точке C* ; по существу это будет означать слияние звеньев 7 и 3 в одно целое, что равносильно введению стержня AD .

Можно избрать также следующий способ: в двукратно-изменяемой цепи — *задаться положением какого-либо полюса на его нормальном луче*. Так, например, на фиг. 2 нормальным лучем 81 будет прямая BH ; поместив полюс 81 в любой точке прямой, мы обратим цепь в однократно-изменяемую. Помещение полюса 81 в точке H — равносильно слиянию звеньев 8 и 4 (или введению стержня FD), а перенос полюса в точку B — равносильно слиянию звеньев 4 и 1. Перенос его в случайную точку K линии NB — равносильно добавлению стержня MN , проходящего через точку K .

Можно, конечно, придумать и другие способы наложения одной связи. Например, присоединить новую точку при помощи трех стержней или новое звено при помощи четырех стержней, и т. д. Однако *простейшими* из этих приемов являются присоединение одного стержня или назначение положения одного полюса на луче.

Выбор того или иного приема должен определяться стремлением к простейшему решению задачи или желанием по возможности избежать построения полюсов, выходящих за пределы чертежа. Это разнообразие путей может быть использовано также для *проверки* построения. Таким образом, применение этого метода представляет исследователю большой простор.

Наиболее выгодным способом нахождения полюсов в общем случае является комбинированное применение двух основных теорем — Аронгольда и Роденберга, как мы это и сделали в рассмотренном примере.

12. Рассмотрим несколько примеров построения нормальных лучей. Выберем, по возможности, общие случаи, которые могут встретиться при исследовании сложных кинематических цепей, и будем пользоваться указанными выше рассуждениями.

Возьмем сначала двукратно-изменяемую цепь, *в состав которой входит какая-либо однократно-изменяемая цепь*. Докажем, что *нормальные лучи всех звеньев этой однократно-изменяемой цепи по отношению к какому-либо из остальных звеньев данной цепи пересекаются в одной точке*.

Доказательство не нуждается в чертеже. Назовем звенья однократно-изменяемой цепи через 1, 2, 3, . . . n , а какое-либо из остальных звеньев — через a . Введем в цепь 1 — 2 — 3 — . . . n одну связь. Тогда эти звенья сольются в одно неизменяемое звено, а данная цепь станет однократно-изменяемой. Назовем мгновенный центр этого слитного звена через $1a$. Так как для рассматриваемого возможного перемещения эта точка одновременно играет роль мгновенных центров вращения $1a, 2a, 3a, . . . na$, то она лежит на всех нормальных лучах, имеющих то же название. Этим теорема доказана.¹⁾

Так, в предыдущем примере (фиг. 16) нормальные лучи 51, 52, 53, 54 проходят через одну и ту же точку 51'.

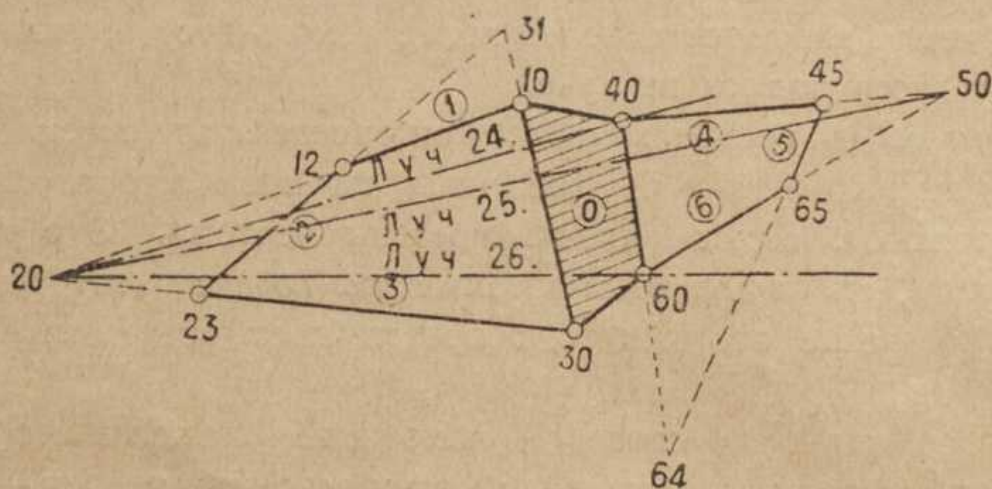
¹⁾ Для частных случаев теорема эта доказана при помощи геометрических соображений в книге проф. И. П. Прокофьева: «Теория сооружений», ч. I. Москва 1926, стр. 151 и кинематическим путем в книге Grüning: «Die Statik des ebenen Fachwerks» Berlin 1925, S. 169.

В частном случае, если два из нормальных лучей $1a, 2a, 3a, \dots$ на параллельны между собою, то и все остальные должны иметь то же направление.

Далее рассмотрим случай, когда в состав данной двукратно-изменяемой цепи входят 2 однократно-изменяемые цепи, имеющие одно общее звено. Если звенья обеих цепей назовем соответственно через:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \end{aligned}$$

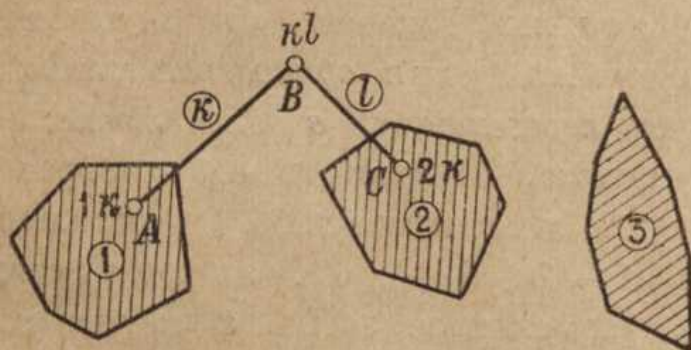
а общее звено — через c , то сейчас же можно найти все нормальные лучи вида $a_i b_j$, т.-е. лучи для движения любого звена 1-й цепи относи-



Фиг. 18.

тельно любого звена 2-й. Для этого нужно только в каждой из названных двух цепей найти мгновенные центры взаимного вращения звеньев. Действительно, повторяя предыдущее рассуждение, можно сказать, что все лучи вида $a_i b_1$ проходят через мгновенный центр вращения cb_1 ; все лучи

$a_i b_2$ — через мгновенный центр cb_2 и т. д. Отсюда ясно, что, например, луч $a_1 b_2$ должен пройти одновременно через мгновенные центры вращения cb_2 и ca_1 ; точно также любой луч $a_i b_j$ должен пройти одновременно через мгновенные центры вращения ca_i и cb_j . Тот же вывод, очевидно, можно было бы получить и из теоремы Аронгольда.



Фиг. 19.

На фиг. 18 показан один из простейших примеров такой двукратно-изменяемой цепи. Общее звено обозначено цифрою 0. Нормальные лучи 24, 25, 26 построены на чертеже.

В качестве третьего примера решим следующую задачу. К некоторой двукратно-изменяемой цепи $1-2-3-4 \dots$, которая кинематически вполне изучена, присоединены два звена, $k-l$ (фиг. 19); требуется построить нормальные лучи $k2, k3, k4 \dots, l1, l3, l4, \dots$

Очевидно, что луч $k2$ совпадает с прямою BC . Будем искать лучи $k3, k4, k5, \dots$. Для этого зададимся на луче 12 двумя положениями

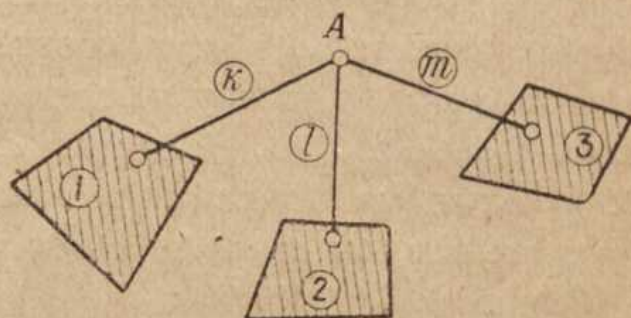
полюса 12, которые обозначим через 12' и 12". Положения остальных мгновенных центров вращения, соответствующие этим двум возможным положениям центра 12, будем также отмечать значками ' и ". После того можно применить теорему Аронгольда.

Условимся обозначать символически прямую, соединяющую какие-либо две точки, как *произведение* этих двух точек; точку пересечения двух прямых — как *сумму* этих прямых; наконец, совпадение двух точек выражать знаком $\equiv$. В данном случае построения, основанные на теореме Аронгольда, могут быть выражены, например, следующими символическими равенствами:

луч 13	
$k1 \cdot 12' + \overbrace{k1 \cdot 12}^{\text{луч 13}} = k2'$	$k1 \cdot 12'' + k1 \cdot 13'' = k2''$
$k1 \cdot 13' + k2' \cdot 22' = k3'$	$k1 \cdot 13'' + k2'' \cdot 23'' = k3''$
$k1 \cdot 14' + k2' \cdot 24' = k4'$	$k1 \cdot 14'' + k2'' \cdot 24'' = k4''$
.	
.	

Прямая, соединяющая точки $k3'$ и $k3''$, и будет лучем $k3$; прямая $k4' \cdot k4''$ — лучем $k4$, и т. д. Аналогичным путем строятся также лучи $l3$, $l4$ и т. д. Написанный здесь ряд символических равенств может быть также заменен другими.

Четвертый пример. К двукратно-изменяемой цепи 1—2—3—4, кинематически изученной, присоединена новая точка А при помощи трех стержней k, l, m (фиг. 20). В полученной таким образом однократно-изменяемой цепи требуется построить все мгновенные центры вращения.



Фиг. 20.

Отбросим стержень m ; тогда получим двукратно-изменяемую цепь, для которой, согласно предыдущему примеру, сможем построить все нормальные лучи. То же самое можно

будет сделать, откинувши, вместо звена m , стержень k или l . Любой из искомых мгновенных центров вращения найдется на пересечении двух нормальных лучей, полученных из этих обоих построений.

Применяя аналогичные рассуждения, можно разрешать и более сложные задачи о построении нормальных лучей.

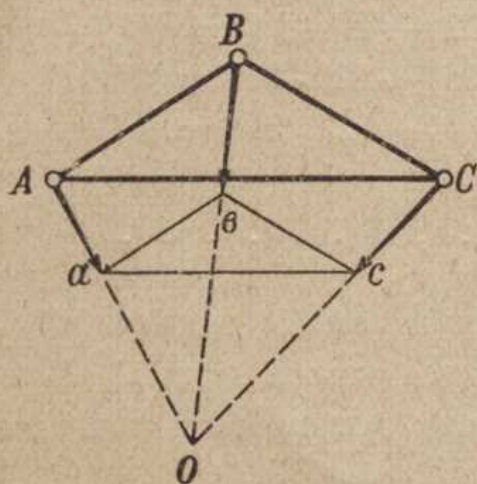
13. Из всего вышесказанного—ясно, что применение теоремы Роденберга сводит задачу о нахождении мгновенных центров вращения для механизма к задаче о построении нормальных лучей для двукратно-изменяемой цепи. Тот, кто умеет решать вторую задачу, тем самым владеет также решением первой.

14. Перейдем теперь к рассмотрению свойств *плана скоростей* многократно-изменяемой цепи.

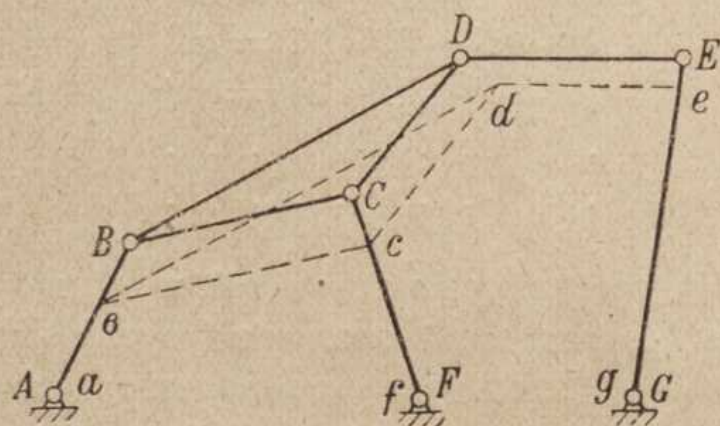
Картиной или *планом скоростей* мы будем называть графическое изображение скоростей характерных точек кинематической цепи. Конеч

вектора, выражающего собой скорость какой-либо точки A , мы будем рассматривать, как *изображение* этой точки, и обозначать малой буквой a . При этом мы будем рассматривать картины так называемых *нормальных* или *повернутых* скоростей, т. е. таких, которые повернуты относительно действительных на 90° .

Напомним, что планы скоростей употребляются обычно в одном из следующих двух видов. Во-первых, вектор повернутой скорости проводится из каждой точки A фигуры. Получаемое изображение неизменяемой фигуры подобно и параллельно самой фигуре (фиг. 21). Изображение полюса O совпадает с самим полюсом. Если фигура перемещается *поступательно*, то ее изображение оказывается равным самой фигуре.



Фиг. 21.



Фиг. 22.

Если какую-либо точку рассматривать как изображение, то в различных звеньях ей будут соответствовать *различные* точки. Наоборот, если какую-либо точку последовательно рассматривать, как точку различных звеньев, то ей будут соответствовать *различные* изображения. Если некоторая точка служит мгновенным центром взаимного вращения двух звеньев, то для нее и только для нее оба изображения сливаются в одну точку.

Пример изображения скоростей кинематической цепи по этому способу показан на фиг. 22, где $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $bd \parallel BD$ и т. д., а повернутые скорости точек B , C , D выражаются векторами Bb , Cc , Dd и т. д. Этот прием впервые встречается у Proell ¹⁾, у Schadwill ²⁾, затем у Burmester'a ³⁾.

Во-вторых, все векторы проводятся из *одной точки*, которая тогда носит название полюса плана скоростей. Последний мы будем для краткости называть *полярным планом скоростей*. Изображение каждой неизменяемой фигуры при этом также получается подобным и параллельным самой фигуре. Если фигура перемещается поступательно, то ее изображение сливается в одну точку. Построение по этому способу для той же

¹⁾ Proell: «Graphische Dynamik», 1874, S. 158.

²⁾ C. Z. Schadwill: «Das Gliedervierseit als Grundlage der ebenen Kinematik», Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbeleises» 1876, S. 408, 412.

³⁾ Burmester: «Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten» Civiling. 1880, S. 250.

кинематической цепи показано на фиг. 23, где $Ob \parallel AB$, $Oc \parallel FC$, $cb \parallel CB$, $bd \parallel BD$, $Oe \parallel GE$ и $ed \parallel ED$.

Этот прием впервые указан Mehmke¹⁾, но развит и введен во всеобщее употребление Мором²⁾, который однако пользовался неповернутыми скоростями.

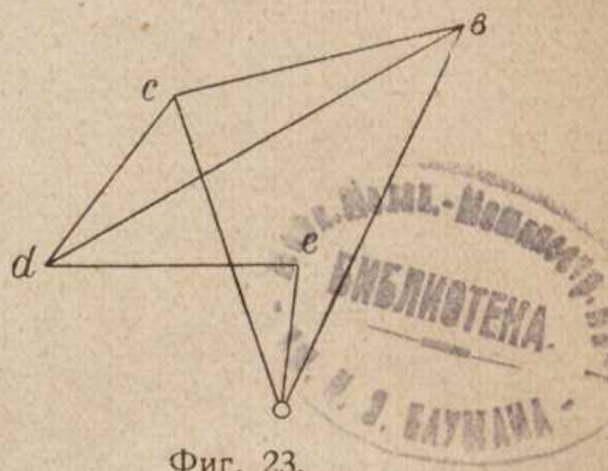
15. Для планов скоростей обоих типов мы докажем следующую теорему. Пусть дана система, имеющая n степеней свободы. Это может быть либо кинематическая цепь с одним неподвижным звеном и степенью изменяемости равною n , либо цепь, все звенья которой подвижны, а степень изменяемости равна $n-3$. Дадим этой цепи всевозможные бесконечно-малые перемещения, удовлетворяющие следующим заданным независимым условиям: число звеньев, для которых заданы угловые скорости, равно a ; число точек, для которых скорости заданы по величине и по направлению, равно b ; наконец, число точек, для которых скорости заданы только по направлению, равно c . Если

$$a + 2b + c = n - 1,$$

то при всех возможных перемещениях цепи изображения всех ее точек на плане скоростей перемещаются по прямым и описывают на них подобные, т. е. взаимно-пропорциональные пути.

Дадим сначала цепи такое перемещение, которое удовлетворяет первым $a + b$ условиям, и не будем интересоваться выполнением остальных c условий. Так как при этом цепь сохраняет еще $1 + c$ степеней свободы, то это движение, вообще говоря, может быть выполнено различными способами. Остановим свой выбор на каком-либо одном, т. е. вполне определенном (хотя и произвольном) движении. После этого наложим на систему такие связи, чтобы угловые скорости этих a звеньев и линейные скорости упомянутых b точек были равны нулю, т. е. воспрепятствуем этим звеньям поворачиваться, а названным точкам—двигаться. Кроме того, введем такие связи, которые удовлетворяют остальным c условиям, т. е. заставляют данные c точек двигаться по заданным направлениям. В результате мы получим систему, имеющую только одну степень свободы. В такой системе, как известно, направления скоростей всех точек определены, а их величина неопределенна, но пропорциональна угловой скорости ведущего звена (т. е. любого из звеньев).

Итак, мы доказали, что скорость каждой точки складывается из определенного вектора, соответствующего первому движению, и из вектора,



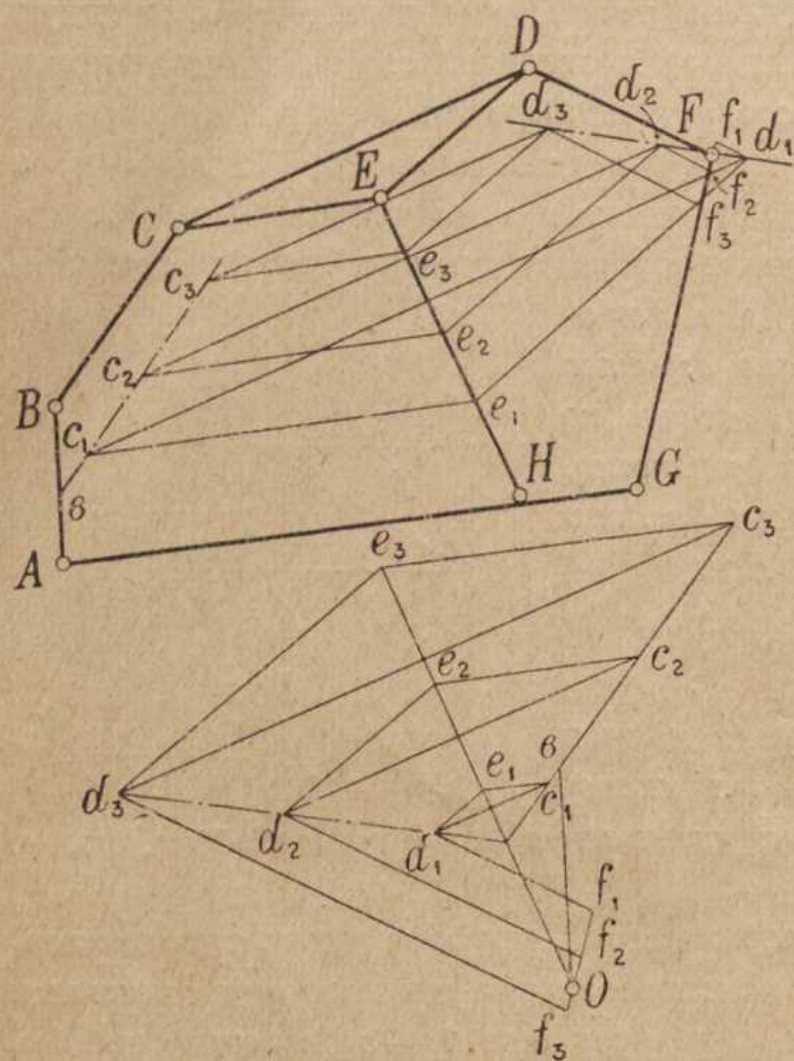
Фиг. 23.

¹⁾ Mehmke: «Ueber die [Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich—veränderlichen ebenen Systems», Civiling, 1883, S. 492.

²⁾ Mohr: «Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne», Civiling. 1887, S. 631; «Beiträge zur Geometrie der Bewegung», Z. f. Math. u. Phys., 1903.

имеющего постоянное направление и неопределенную длину. Этим теорема доказана.¹⁾

При $n=2$, $b=c=0$ теорема обращается в следующую: если в двукратно-изменяемой цепи, имеющей одно неподвижное звено, угловая скорость вращения какою-либо звена остается постоянной, то при всевозможных перемещениях цепи изображение скорости любой точки любой звена перемещается по прямой.²⁾



Фиг. 24.

Для примера на фиг. 24 показаны планы скоростей, построенные по обоим способам для двукратно-изменяемой цепи $ABCDEFGH$, у которой задана угловая скорость звена AB . На плане скоростей точка b остается постоянной, а остальные точки перемещаются по прямым (см., например, точки $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ и т. д.) На фиг. 25 показано построение планов скоростей для той же цепи при условии, что скорость точки C задана по направлению (прямая MN); опять оказывается, что точки d_1, d_2, d_3 и т. д. располагаются на прямых.

16. Остановимся несколько подробнее на свойствах планов скоростей двукратно-изменяемой цепи. Мы видели, что при заданной угловой скорости одного из звеньев все изображения описывают подобные прямолинейные ряды точек. Легко доказать, что все прямые, по которым движутся изображения точек одною звена, пересекаются в одной точке.

Для этого достаточно лишь иметь в виду, что изображение неизменяемой фигуры подобно и параллельно самой фигуре, следовательно,

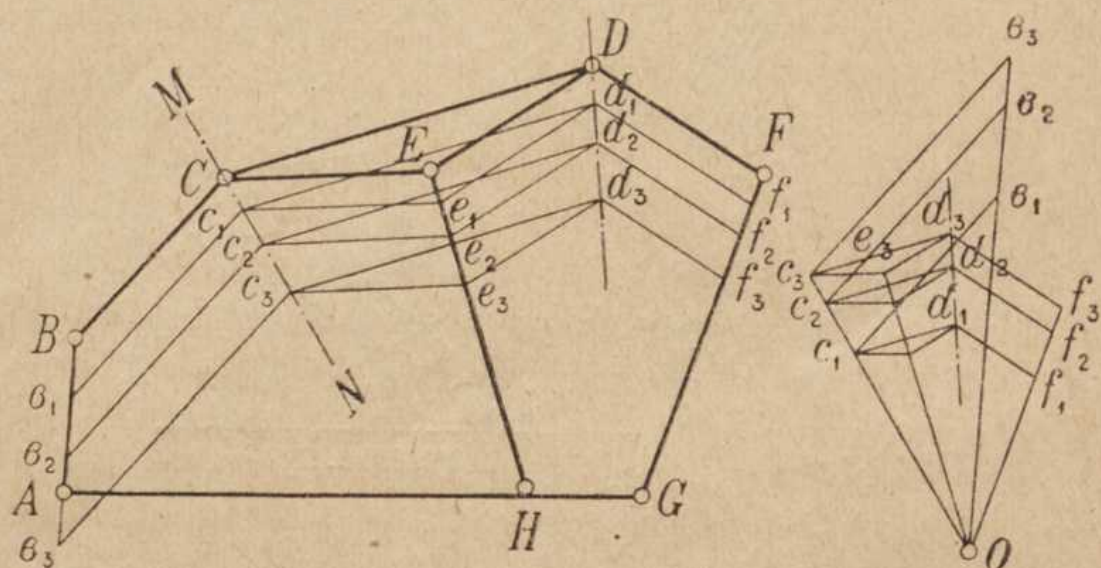
Мы видели, что при заданной угловой скорости одного из звеньев все изображения описывают подобные прямолинейные ряды точек. Легко доказать, что все прямые, по которым движутся изображения точек одною звена, пересекаются в одной точке.

¹⁾ В книге Wittenbauer: «Graphische Dynamik», Berlin 1923, s. 264 дана без доказательства теорема, которая является частным случаем доказанной здесь. Другие частные случаи этой теоремы доказаны на основании иных соображений, чем это сделано здесь, Ассуром в «Исследовании плоских стержневых механизмов», часть вторая, стр. 38, 103. Там же содержится ряд общих теорем о свойствах скоростей кинематической цепи.

²⁾ Можно было бы высказать также следующую теорему: если в системе с двумя степенями свободы задано направление скорости такой точки A , которая может двигаться по всевозможным направлениям, то при всех возможных перемещениях этой системы изображения всех ее точек перемещаются по прямым линиям. Но эта теорема не является существенно новой, так как при указанном условии, очевидно, цепь превращается в механизм.

прямые, по которым движутся изображения, должны пересекаться в центре подобия. Таким образом, при некотором возможном перемещении цепи изображения всех точек звена сливаются в одну точку. На фиг. 26а, изображено звено и на нем некоторый треугольник ABC ; на фиг. б—неполярный план скоростей, на нем два изображения $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ этого треугольника, а также прямые aa , bb , cc , пересекающиеся в некоторой точке p ; на фиг. с—полярный план скоростей с полюсом O и точкою p_0 пересечения прямых. Для краткости мы будем называть точки p и p_0 нулевыми изображениями звена.

Превращение изображения звена в одну точку совершается на неполярном и полярном планах скоростей *не* при одном и том же перемещении цепи. Когда на неполярном плане изображение звена обращается в точку p , то нормальные скорости всех точек звена выражаются векторами, соединяющими эти точки с p . Таким образом точка p есть один из возможных



Фиг. 25.

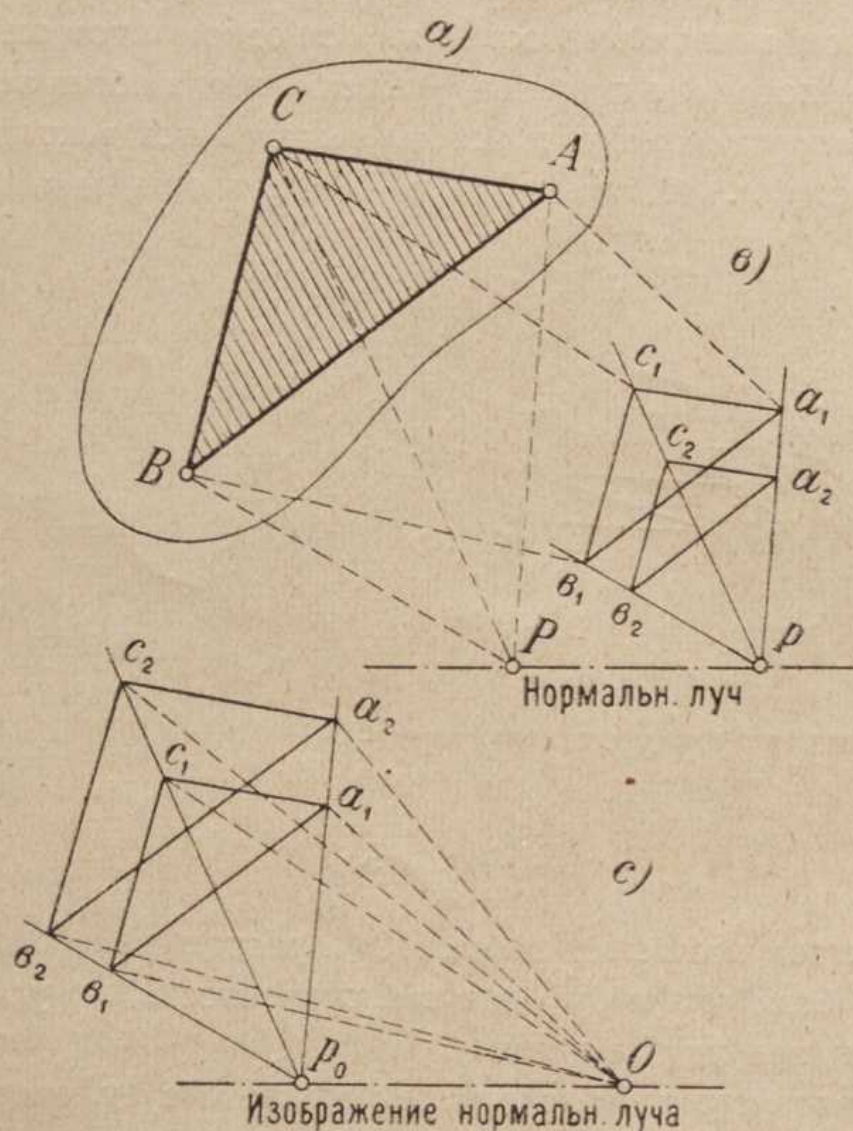
мгновенных центров вращения звена. Она расположена поэтому на нормальном луче. Если она не уходит в бесконечность, то угловая скорость вращения вокруг нее *не* равна нулю.

Точка p_0 полярного плана скоростей соответствует, очевидно, другому возможному перемещению звена, именно *поступательному*. Действительно, только при таком движении полярное изображение звена может обратиться в точку. Вектор Op_0 выражает собою нормальную скорость этого поступательного перемещения.

Хотя точки p одного плана скоростей и p_0 другого плана изображают звено при двух различных движениях, они объединены важным общим свойством. Если мы будем искать ту точку P звена, которая изображается на соответствующих планах точкою p или p_0 , то найдем одну и ту же точку. Действительно, для этого достаточно провести на основной фигуре из точки A прямую $AP \parallel aa$, а из точки B —прямую $BP \parallel bb$; на пересечении их найдется точка P . Из фигуры ясно, что эта точка P получится одна и та же при всевозможных перемещениях цепи. Итак, в каждом звене существует такая точка P , которая при всевозможных перемещениях цепи изображается на плане скоростей одною и

тою же точкою и сохраняет скорость, постоянную по величине и направлению.¹⁾ Эта скорость выражается на не полярном плане вектором $\overline{Pr}$, а на полярном — вектором $\overline{Op}_0$.

Мы уже видели из полярного плана скоростей, что скорость точки P есть скорость звена в том возможном перемещении, когда оно движется поступательно. То же самое можно доказать на неполярном плане. На фиг. 26 проведем из точек A, B, C по направлению, параллельному линии $\overline{Pr}$, прямые Aa_3, Bb_3, Cc_3 до пересечения с лучами aa, bb, cc , (эти прямые на чертеже не показаны).



Фиг. 26.

Очевидно, что,

$$Aa_3 = Bb_3 = Cc_3 = \overline{Pr}; a_3P = AP; b_3P = BP; c_3P = CP,$$

поэтому:

$$a_3b_3 \neq AB, a_3c_3 \neq AC, b_3c_3 \neq BC.$$

Итак, треугольник $a_3b_3c_3$ есть такое изображение, основного треугольника ABC , при котором последний перемещается поступательно со скоростью $\overline{Pr}$.

17. Нетрудно объяснить, почему скорость точки P при всех возможных перемещениях остается постоянной. Скорость любой точки звена,

¹⁾ Напоминаем основную предпосылку — речь идет о таких движениях, при которых задана угловая скорость одного из звеньев.

например, точки A , при любом возможном перемещении выражается следующим образом: на полярном плане (фиг. 26с)

$$V_A = \overline{0a_1} = \overline{0p_0} + \overline{p_0a_1} = \overline{V_P} + \overline{p_0a_1}.$$

Но из подобия фигур $ABCP$ и $a_1b_1c_1p_0$ следует, что вектор p_0a_1 изображает скорость вращения звена около точки P . Итак, *скорость любой точки есть геометрическая сумма постоянной скорости поступательного перемещения звена и переменной скорости вращения его около точки P* . На неполярном плане получаем:

$$V_A = \overline{Aa_1} = \overline{Aa_3} + \overline{a_3a_1} = \overline{Pp} + \overline{a_3a_1},$$

а так как $ABCP = a_3b_3c_3p$, то опять получается тот же вывод.

На этом основании движение звена представляется следующим образом:

1) Сначала происходит перемещение, определяемое двумя условиями, именно поставленным выше общим условием для всех возможных перемещений цепи (угловая скорость определенного звена N^oi равна ω_i), и, кроме того, добавочным условием, согласно которому угловая скорость рассматриваемого звена ABC равна нулю. Последнее условие можно формулировать так же, как задание бесконечно-далекого мгновенного центра вращения на нормальном луче. В результате этих двух условий получается совершенно определенное перемещение звена.

2) Затем происходит перемещение, определяемое лишь одним условием: опять задается угловая скорость звена N^oi , но только теперь она берется равной нулю. При этом движении скорости всех точек остаются неопределенными по своей численной величине, но каждое звено получает вполне определенный мгновенный центр вращения. *Точка P и является этим мгновенным центром вращения звена ABC* . Она участвует только в первом движении и приобретает скорость $\overline{Pp}$; во втором движении, независимо от угловой скорости звена ABC , она, разумеется, никакой скорости не приобретает.

18. Из сказанного следует также, что *прямая $\overline{Pp}$ совпадает с нормальным лучем*. Действительно, обе точки, P и p , как мы видели, являются мгновенными центрами звена ABC . Прямая $\overline{Op}$, как проходящая через полюс O плана и параллельная нормальному лучу, *является изображением нормального луча на полярном плане скоростей*.

Всякая прямая основной фигуры, проходящая через точку P , обладает следующим свойством: *при всех возможных перемещениях цепи изображения всех точек такой прямой располагаются всегда на одной и той же прямой плана скоростей*. Так, например, геометрическое место изображений прямой AP (фиг. 26), очевидно, есть прямая $\overline{a_1p}$ неполярного плана и $\overline{a_1p_0}$ — полярного. К числу этих прямых принадлежит и нормальный луч; на неполярном плане он совпадает со своим изображением, а на полярном — проходит через полюс плана.

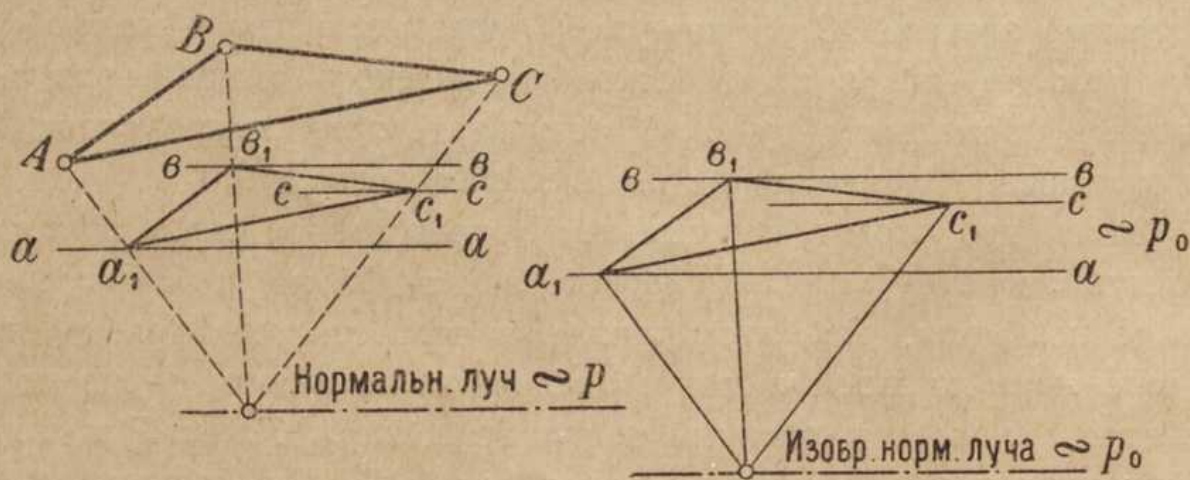
Все предыдущие рассуждения велись нами в предположении, что точка P не находится в бесконечности. Если же она уходит в бесконечность, то вместе с нею удаляются, очевидно, и ее изображения p и p_0 на

обоих планах скоростей. Все прямые, которые должны были на плане скоростей пересечься в нулевом изображении звена, становятся параллельными друг другу. Тогда при всевозможных перемещениях цепи изображение звена будет перемещаться по плану скоростей поступательно, не изменяя своей величины. Этот случай изображен на фиг. 27, где обозначения сохранены те же, что и на фиг. 26. Согласно основному свойству планов скоростей, имеем:

$$\omega = k \frac{a_1 b_1}{AB} = k \frac{a_1 c_1}{AC} = \dots \text{ (для полярного плана),}$$

$$\omega = k \left(1 - \frac{a_1 b_1}{AB} \right) = k \left(1 - \frac{a_1 c_1}{AC} \right) = \dots \text{ (для неполярного плана), где}$$

k — коэффициент, зависящий от масштаба плана скоростей. Так как величина изображения остается постоянной, то и угловая скорость ω оказывается постоянной. Итак, удаление нулевых изображений звена в бесконечность происходит в том случае, когда рассматриваемое звено при всевозможных перемещениях цепи сохраняет постоянную угловую скорость.



Фиг. 27.

На фиг. 28 показан такой пример. Звено 1 вращается с заданной угловой скоростью. Очевидно, что звено 2, образующее с ним поступательную пару, будет также сохранять эту угловую скорость. Изображениями точек звена 1 на обоих планах скоростей служат не прямые, а точки (например, точки b_1, c_1). Изображения же точки звена 2 движутся по прямым $b_2 b_2, c_2 c_2$ и т. д., которые проходят через точки b_1, c_1 перпендикулярно к оси пары.

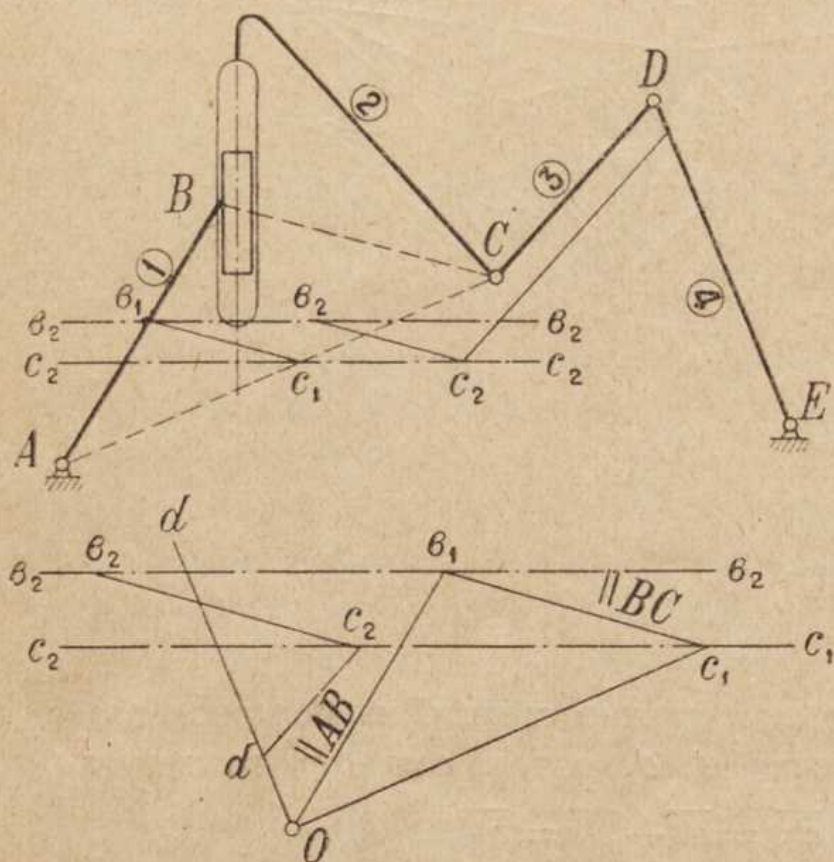
Тот же вид планов скоростей получился бы и в том случае, если бы была задана угловая скорость не звена 1, а другого звена, сцепленного с ним при помощи круглых зубчатых колес.

19. Отметим еще один частный случай — расположение точек P, p, p_0 для звена, образующего с неподвижным звеном вращательную или поступательную пару. В первом случае, очевидно, нормаль к скорости любой точки этого звена проходит через центр шарнира. Поэтому точка P совпадает с центром шарнира, точка p совпадает с ним же, а точка p_0 полярного плана совпадает с полюсом последнего. Если же оно образует с неподвижным звеном поступательную пару, то точка P удаляется в бес-

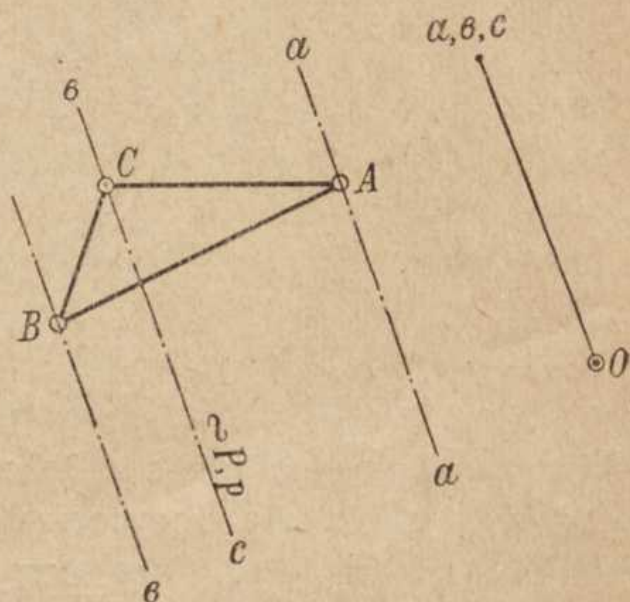
конечность по направлению нормали к оси пары. Неполярный и полярный планы скоростей принимают вид, показанный на фиг. 29. Этот случай отличается от случая, изображенного на фиг. 28 тем, что здесь $\omega = 0$.

20. Мы говорили до сих пор только об изображении скоростей всех звеньев по отношению к неподвижному звену. Если на плане скоростей это построение сделано, т. е. если каждое звено, обладающее двумя

степенями свободы, представлено, по крайней мере, двумя прямыми, по которым перемещаются изображения определенных двух точек его, то можно



Фиг. 28.



Фиг. 29.

легко построить также изображение *относительных* скоростей любых двух звеньев.

Пусть, например, требуется построить скорости движения некоторого звена 1 относительно звена 2 (фиг. 30). На неполярном плане поступаем следующим образом: пусть при некотором возможном перемещении изображения треугольников ABC и DEF служат abc, def . Найдем скорости точек A, C , принадлежащих звену 2. Для этого проводим прямые AE, AD, CE, CD и параллельные им $a'e, a'd, c'e, c'd$ и находим таким образом изображения a', e' . Скорость движения точки A звена 1 относительно той же точки звена 2 выражается вектором

$$\overline{Aa} - \overline{Aa'} = \overline{Aa} + \overline{a'A} = \overline{a'a}.$$

Аналогично этому

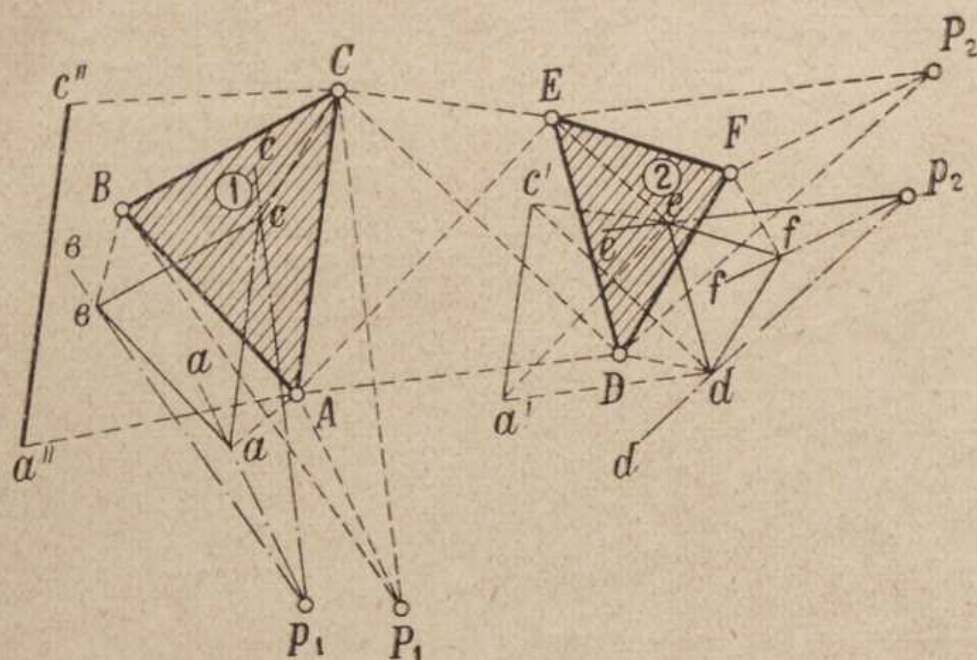
$$\overline{Cc} - \overline{Cc'} = \overline{c'c}.$$

Проведя

$$\overline{Aa''} \neq \overline{aa'} \text{ и } \overline{Cc''} \neq \overline{c'c},$$

получаем точки a'', c'' , которые являются изображениями точек A, C для движения звена 1 относительно звена 2. Пересечение прямых Aa'' и Cc'' служит мгновенным центром вращения звена 1 относительно 2 и лежит на нормальном луче 12. Имея изображение двух точек A и C , мы тем

самым имеем изображение всего звена 1. После этого проделываем такое же построение для другого возможного перемещения и получаем два других изображения a''_1, c''_1 (не показанных на чертеже) тех же точек. Пересечение прямых $a''a''_1$ и $c''c''_1$ определит точку p_{12} — нулевое изображение звена 1. После этого нетрудно построить все остальные.



Фиг. 30.

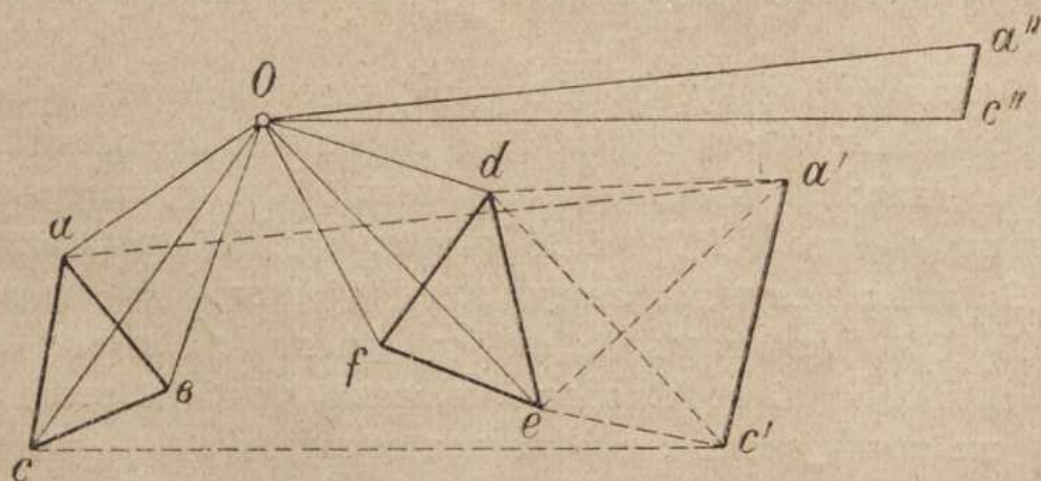
Совершенно такое же построение можно сделать на полярном плане (фиг. 31): сначала построены точки a', c' , потом согласно тождествам,

$$V_{12}^A = a0 - a'0 = a0 + 0'a = aa'$$

и

$$V_{12}^C = cc',$$

проведены векторы $0a'' \neq aa'$ и $0c'' \neq cc'$.



Фиг. 31

Таким образом, найдено изображение $a''c''$ прямой AC для движения звена 1 относительно звена 2. Пересечение прямых aa' и cc' служит изображением мгновенного центра вращения 12. Изображение должно получиться одно и то же, будем ли мы считать эту точку принадлежащую звену 1 или звену 2. Такое же построение должно быть повторено для другого возможного перемещения цепи.

Нетрудно заметить, что при всевозможных перемещениях цепи взаимная относительная скорость точки P_1 звена 1 относительно точки P_2

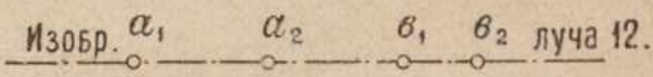
звена 2, (где P_1 и P_2 суть точки, которым соответствуют нулевые изображения этих звеньев), *остается постоянной по величине и направлению*.

Наконец, укажем, каким образом можно найти на плане скоростей изображение нормального луча 12. Заметим сначала, что этот луч можно рассматривать двойко: как прямую звена 1 и как прямую звена 2. В соответствии с этим каждая точка луча имеет *два* изображения. Однако, нетрудно доказать, что *оба изображения луча 12 образуют одну прямую*. Действительно, если a_1 есть изображение какой-либо точки луча 12 в звене 1, а a_2 — той же точки звена 2, (фиг. 32), то взаимная скорость этих двух точек, согласно определению нормального луча, должна быть параллельна лучу, т. е.

$$a_1 a_2 \parallel b_1 b_2 \parallel a_1 b_2 \parallel b_1 a_2 \parallel a_1 b_1 \parallel a_2 b_2,$$

откуда ясно, что ряды точек $a_1 b_1 \dots$ и $a_2 b_2 \dots$ образуют одну прямую. Нетрудно видеть, что эта прямая является *единственной*, обладающей таким свойством.

Каждому возможному перемещению цепи соответствует особое изображение луча 12. Все эти изображения, конечно, параллельны между собой, как изображенной и той же прямой.

Каждое из них проходит через соот-  Изобр. α_1 α_2 β_1 β_2 луча 12.

Фиг. 32.

ветствующее рассматриваемому возможному перемещению изображение мгновенного центра 12. Построение изображения этой точки уже указано нами.

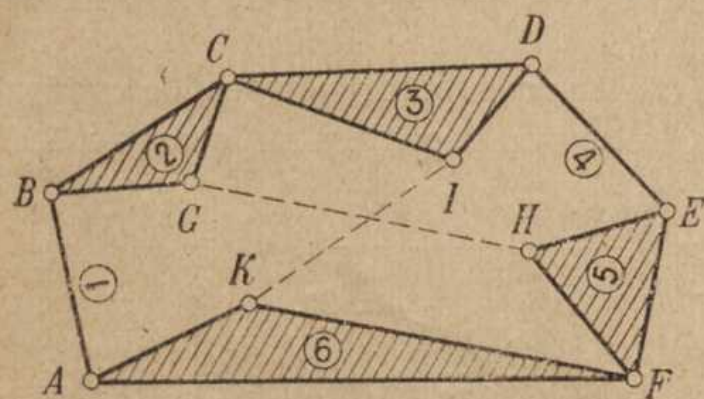
Чтобы получить изображение луча 12, нужно поступить следующим образом. Для двух возможных перемещений цепи найти изображения одноименного с ним мгновенного центра. Пусть это будут точки 12' и 12''. Затем найти в первом из этих двух перемещений изображение той точки, которая во втором перемещении изображается точкою 12''. Изображение может быть найдено либо, как для точки звена 1, либо, как для точки звена 2. Таким образом найдется точка 12'''. Прямая $12'' - 12'''$ и будет изображением нормального луча 12 для первого возможного перемещения. Для проверки можно найти изображение точки 12''' для другого из двух звеньев; все три точки должны расположиться на одной прямой. Аналогичным образом может быть найдено изображение луча 12 для любого возможного перемещения.

21. Мы знаем, что план скоростей для *механизма* может считаться законченным, если на нем имеется изображение двух точек каждого звена. Для *двукратно-изменяемой* цепи на основании вышесказанного, достаточно иметь на плане скоростей по две *прямых* для каждого звена. Совокупность этих прямых служит наиболее компактным и вместе с тем полным изображением скоростей цепи для всего бесконечного множества ее возможных перемещений.

22. Пользуясь свойствами планов скоростей многократно-изменяемых цепей, можно строить скорости также для сложнейших механизмов. Действительно, всякая однократно-изменяемая цепь может рассматриваться

как многократно-изменяемая цепь, на движение которой наложен ряд условий. Освободив данную однократно-изменяемую цепь от тех или иных связей, мы обращаем ее в многократно-изменяемую; возможное для нее перемещение представляется тогда в виде одного из бесконечного множества перемещений более свободной цепи.

Самое построение скоростей можно производить, либо пользуясь способом неопределенных коэффициентов по Мору, либо теоремами о планах скоростей, доказанными выше. Так, например, если требуется построить план скоростей для механизма, изображенного на фиг. 11, то можно поступить следующим образом: откинем стержни 7 и 8 и обратим таким образом цепь в трехкратно-изменяемую (фиг. 33). Для нее построение плана скоростей с соблюдением неизменяемости расстояния между точками J и K , а также G и H изложено было выше по способу Мора. Этот план скоростей, очевидно, и является искомым для данного механизма.



Фиг. 33.

Способ Мора является отчасти графическим, отчасти аналитическим. Чисто графическое решение получается при пользовании приемами, основанными на вышеуказанных теоремах. Ход действий таков: удалив из данной однократно-изменяемой цепи одну из связей, обращаем цепь в двукратно-изменяемую. Рассматривая два, по возможности простых перемещения

последней, находят два изображения A_1 и A_2 какой-либо точки A и тем самым — прямую A_1A_2 , которая служит геометрическим местом изображений этой точки для возможных перемещений полученной цепи. После этого восстанавливают удаленную связь, удаляют, вместо нее, какую-либо другую связь и в новой двукратно-изменяемой цепи находят опять геометрическое место изображений той же точки A . Действительное изображение последней будет лежать на пересечении обоих геометрических мест. Обыкновенно бывает достаточно найти таким образом изображение одной точки, непосредственное построение которой затруднительно; построение остальных изображений совершается после этого легко.

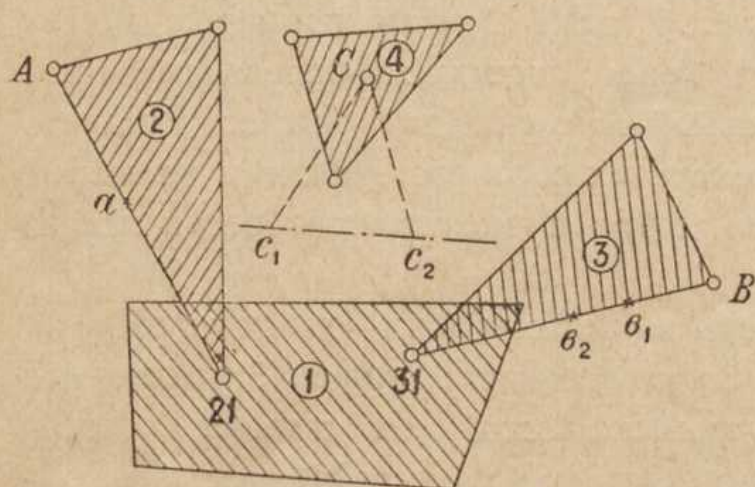
Если после удаления одной связи получается такая двукратно-изменяемая цепь, в которой невозможно найти геометрические места изображений, то приходится удалить *несколько* связей и к полученной многократно-изменяемой цепи последовательно применять теоремы о планах скоростей.

23. Нахождение геометрических мест для изображений точек двукратно-изменяемой цепи может быть упрощено следующим образом. Неподвижное звено 1 цепи ¹⁾ образует кинематические пары, по крайней мере, с двумя звеньями 2 и 3 (фиг. 34). Одно из них, например, 2,

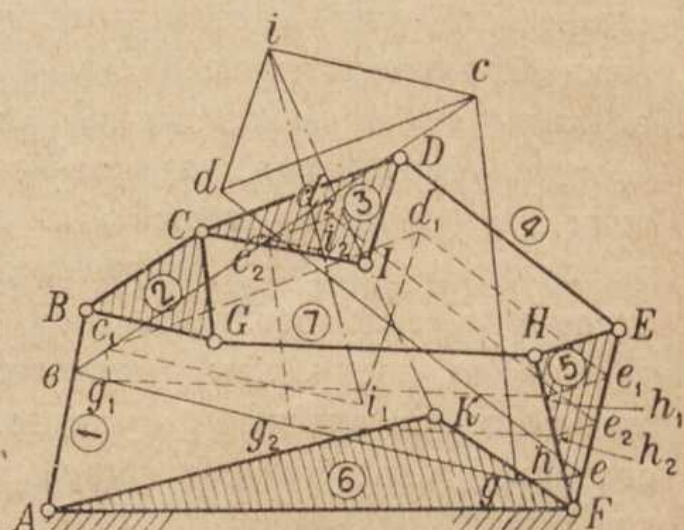
¹⁾ Правильнее сказать — то звено, относительно которого мы ищем скорости всех остальных звеньев.

пусть имеет постоянную угловую скорость. Тогда изображение a точки A будет неподвижно. Очевидно, что изображение точки B должно лежать на прямой $B-31$. Если мы на этой прямой возьмем какую-либо точку, например, b_1 , и примем ее за изображение точки B , то цепь обратится в однократно-изменяемую, и для нее можно будет построить изображения всех точек. Например, для точки C звена 4 это будет некоторая точка c_1 . Таким же образом берем второе изображение b_2 точки B и находим изображение c_2 . Прямая $c_1 c_2$ и будет геометрическим местом изображений точки C .¹⁾

Для примера рассмотрим вторично механизм, показанный на фиг. 33. Пусть скорость точки B будет задана; изображением ее пусть служит точка b . Удаляем сначала стержень 7, тогда геометрическим местом изображений точки J , очевидно, будет служить прямая JK . Затем восстанавливаем стержень 7 и удаляем стержень 8 (фиг. 35). Задаемся на прямой



Фиг. 34.



Фиг. 35.

HF двумя изображениями h_1 и h_2 точки H . Затем последовательным проведением параллелей без труда находим по 2 изображения всех остальных точек. Пересечение прямой $i_1 i_2$ с прямой JK дает нам искомое изображение точки J , после чего построение плана скоростей может быть закончено без труда. Совершенно в такой же последовательности может быть построен и полярный план скоростей Мора.

Мы не рассматриваем более сложных примеров так как идея применения многократно-изменяемых цепей к построению скоростей для механизма понятна и из приведенных простых примеров.²⁾

¹⁾ Аналогичный прием указан был Burmester'ом без доказательства, на основании иных изображений, причем двукратная изменяемость цепи молчаливо подразумевалась. См. «Ueber die momentane Bewegung der ebenen Mechanismen», Techn. Blätter, Prag 1890, S. 19. Сходный прием, изложенный как «метод ложных построений» см. также у Ассура: «Исслед. плоск. стержн. механизмов», часть вторая, стр. 26.

²⁾ Построение ускорений для сложных механизмов также значительно облегчается при помощи обращения таких цепей в многократно или двукратно-изменяемые. Мы не занимаемся здесь этим вопросом так как в графической статике ускорения не играют никакой роли; они нужны лишь для динамики. Но мы вернемся к этому вопросу в другом месте.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Основы графической статики кинематических цепей.

Возможность равновесия кинематической цепи.

24. В настоящей главе мы ставим себе задачей изучение вопросов равновесия кинематической цепи в произвольном, но *определенном* ее положении. Иными словами, мы совершенно не будем рассматривать конечных перемещений цепи, а лишь *бесконечно-малые* движения около заданного ее положения.

Не подлежит сомнению, что и цепь, обладающая многими степенями изменяемости и свободы, может уравнивать некоторые заданные внешние нагрузки. Простым, общеизвестным примером такой уравновешенной многократно-изменяемой кинематической цепи является, так называемый *веревочный* (лучше сказать — шарнирно-стержневой) многоугольник, нагруженный соответствующей ему системой сил. Другим примером может служить любая неизменяемая стержневая статически-определимая или неопределимая ферма, нагруженная какой-либо системой сил: если удалить из нее любое число стержней и заменить их соответствующими усилиями, то система останется в равновесии, хотя и может приобрести любую степень изменяемости.

В то время, как уравновешенная система сил, действующая на *неизменяемую* плоскую фигуру, должна удовлетворять только 3 уравнениям статики, уравновешенная нагрузка *кинематической цепи* связана большим числом условий. Первая должна обеспечить только *неподвижность* нагруженной фигуры, а вторая — неподвижность и неизменяемость. Отсюда следует, что система сил, которая уравнивается на кинематической цепи, должна удовлетворять тем же 3 уравнениям статики, но, сверх того, еще специальным условиям, выражающим неизменяемость фигуры.

Число независимых уравнений равновесия.

25. Число независимых уравнений, выражающих условия равновесия сил на кинематической цепи, в точности равно степени свободы цепи, т. е. равно

$$W + 3,$$

где W — степень изменяемости цепи.

Для доказательства можно поступить следующим образом. Введем между звеньями цепи W новых стержней. От этого цепь станет неизменяемой и статически-определимой. Но для того, чтобы в условиях равновесия цепи ничего не изменилось, необходимо, чтобы усилия во всех этих стержнях были равны нулю. Таким образом система сил, действующих на цепь, должна удовлетворять, кроме обычных 3 уравнений, еще дополнительным W условиям. Это доказательство принадлежит Wittenbauer'у. ¹⁾

¹⁾ Wittenbauer: «Das Gleichgewicht ebener kinematischer Ketten». Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstage, 1916, S. 212.

Тот же вывод можно получить, исходя из начала возможных перемещений Лагранжа. Если кинематическая цепь имеет V степеней свободы, то всякое возможное перемещение последней может быть представлено, как функция V независимых переменных.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v.$$

Обозначим работу всех сил, приложенных к цепи, при любом возможном перемещении через δL . Тогда из принципа Лагранжа имеем:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \alpha_v} \delta \alpha_v = 0,$$

откуда получается V независимых условий:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_v} = 0.$$

Из обоих доказательств ясно, что если цепь — *свободная*, т. е. не имеющая неподвижного звена, то число уравнений, связывающих все силы, извне приложенные к цепи, равно $W + 3$. Если же цепь имеет *неподвижное* звено, то число уравнений, связывающих все внешние силы и опорные реакции, попрежнему равно $W + 3$, а число уравнений, связывающих только внешнюю нагрузку, равно W .

Таким образом для свободной неизменяемой фигуры ($W = 0$) имеем 3 уравнения, для однократно-изменяемой — 4 и т. д.

Для *несвободной* неизменяемой фигуры число уравнений, связывающих нагрузку, $= 0$ (фигура уравновешена при *всякой* нагрузке); для механизма имеем 1 уравнение, для двукратно-изменяемой цепи — 2 уравнения, и т. д.

Каждая сила, действующая в плоскости, определяется тремя независимыми данными: либо величиной, направлением и одной из точек, через которые должна проходить ее линия действия, либо двумя проекциями силы и точкой, лежащей на ее линии действия, либо двумя проекциями силы и расстоянием ее линии действия до начала координат и т. д. Общее число неизвестных, входящих в состав нагрузки, при условии равновесия цепи, должно равняться указанному числу уравнений. Остальные данные, определяющие нагрузку, могут быть произвольными.

Например, для равновесия *механизма* нагрузка может быть выбрана совершенно произвольной по величине и расположению, за исключением лишь *одной* величины, которая и определится из условий равновесия. Такой величиной может быть либо точка приложения одной из сил, либо направление силы, либо ее отношение к какой-либо из остальных сил и т. д. Для двукратно-изменяемой цепи с неподвижным звеном произвольными элементами нагрузки должны быть лишь две величины; все остальные могут быть выбраны произвольно.

26. Допустим, что вся нагрузка несвободной цепи состоит только из *одной* силы; разберем, какова должна быть степень изменяемости цепи для того, чтобы она могла оказаться в состоянии равновесия. Величина силы, очевидно, не может быть найдена из условий равновесия, так как

от увеличения или от уменьшения таковой равновесие не возникнет и не нарушится. Поэтому величина силы должна считаться данной, а уравнения равновесия должны послужить для отыскания одного или двух из остальных аргументов силы. Отсюда следует, что степень изменяемости цепи $W \leq 2$.

В механизме следует задаться либо величиной и направлением силы, приложенной к данному подвижному звену, либо ее величиной и точкой приложения; недостающая величина найдется из условий равновесия. В двукратно-изменяемой цепи можно задаться только *величиной* силы приложенной к данному звену; ¹⁾ направление и точка приложения или, иными словами, линия действия силы, определится из условий равновесия. Таким образом в каждом звене двукратно-изменяемой цепи существует прямая, обладающая тем свойством, что любая сила, приложенная к звену по этой прямой, уравнивается. Эта теорема будет использована ниже.

Подсчет числа уравнений равновесия позволяет также решить вопрос о том, на каких несвободных или свободных цепях данная нагрузка может быть уравновешена *одной* силой, приложенной к данному звену. Так как сила определяется 3 аргументами, то цепь должна обладать степенью свободы $V \leq 3$. Если речь идет о несвободной цепи, то ее степень изменяемости должна быть $W \leq 3$. В случае механизма могут быть заданы либо величина и направление силы, либо величина и точка приложения, либо прямая действия силы; третья величина определится из уравнения. Таким образом, существует ∞^2 сил, каждая из которых, будучи приложена к данному звену, может уравновесить данную нагрузку механизма.

В случае двукратно-изменяемой цепи можно задаться только одним из аргументов уравновешивающей силы, поэтому число таких сил равно ∞^1 . В случае $W = 3$, сила целиком определяется из условий равновесия, поэтому существует только одно решение. В цепях с большим числом степеней свободы уравновешивание данной нагрузки при помощи одной силы, вообще говоря, — невозможно, а в случае $W = 3$, сила целиком определяется из условий равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению графических способов уравновешивания сил на кинематических цепях.

Заметка о графическом решении вопросов равновесия цепей по Wittenbauer'у.

27. В указанной выше статье Wittenbauer'a ²⁾ приводится несколько примеров определения нагрузки и усилий в стержнях кинематических цепей с несколькими степенями изменяемости и свободы.

Способ Wittenbauer'a сводится просто к построению диаграмм Кремона при помощи последовательного вырезания узлов с применением, в случае надобности, метода ложного положения или метода произвольного масштаба или иных аналогичных приемов, хорошо известных в графической статике обыкновенных, неизменяемых ферм.

¹⁾ Разумеется — если это звено, действительно, имеет относительно неподвижного две степени свободы.

²⁾ См. также его «Graphische Dynamik», Cap. XXII.

После подсчета числа уравнений равновесия назначаются те направления, величины и точки приложения сил, которые могут быть выбраны произвольно; тогда задача о нахождении остальных величин и направлений нагрузки, а также определения усилий в стержнях, давлений в шарнирах и опорных реакций становится совершенно определенной и ничем не отличается от обычных задач теории ферм. Определение уравнивающей силы при этом неразрывно связано с определением внутренних усилий в стержнях цепи, что должно быть причислено к недостаткам метода.

Мы не будем останавливаться подробнее на этом способе решения задачи, так как он не заключает в себе ничего принципиально нового и не открывает новых перспектив. По существу он соприкасается с кинематикой и с вопросами изменяемости цепей лишь в своей предварительной стадии, именно в подсчетах числа тех элементов нагрузки, которые могут быть выбраны произвольно. Все дальнейшее построение ничего общего с кинематикой не имеет. Между тем самая постановка задачи о равновесии цепей с несколькими степенями свободы или изменяемости имеет смысл главным образом потому, что дает надежду на помощь, которую теория ферм может получить от кинематики.

Решение задачи на
основании принципа
возможных
перемещений.

28. Глубокая связь статики и кинематики пре-
допределяется самым общим законом равновесия,
именно принципом возможных перемещений, который
является по существу кинематическим принципом.

Система с несколькими степенями свободы, благодаря разнообразию возможных перемещений, открывает исследователю большую свободу в выборе последних; благодаря этому, удастся исключать некоторые из неизвестных сил и находить простые решения. Метод, оперирующий исключительно с одной неподвижной системой стержней, лишен такой гибкости. Мы обратим поэтому особое внимание на широкое использование метода возможных перемещений.

Согласно основной теореме, доказанной в п. 7, всякое возможное перемещение свободной цепи, имеющей n степеней свободы, может быть выражено в виде суммы n независимых перемещений, из которых каждое совершается в цепи, имеющей лишь одну степень свободы. Для несвободной цепи (т. е. цепи, в которой одно звено неподвижно) теорема остается в силе с заменой выражения: «степень свободы» выражением «степень изменяемости».

Из этой теоремы с очевидностью вытекает следующее положение: *для равновесия свободной кинематической цепи, имеющей V степеней свободы, необходимо и достаточно, чтобы каждая из числа V цепей, которые получаются при наложении на эту цепь $V-1$ независимых связей, была в равновесии.*

Для равновесия несвободной кинематической цепи, имеющей W степеней изменяемости, необходимо и достаточно, чтобы каждый из W механизмов, который может быть получен при помощи наложения на эту цепь $W-1$ независимых связей, был в равновесии.

Для полноты можно добавить, что и всякая цепь с несколькими степенями свободы, которая получается из данной при помощи наложения меньшего числа связей, также должна быть в равновесии.

Этими теоремами мы сводим задачу о равновесии данной многократно-изменяемой цепи к вопросу о равновесии цепей, имеющих меньшую степень свободы, и в частности — к задаче о равновесии двукратно-изменяемых цепей или механизмов.

Равновесие *неизменяемой* системы, которая получается из данной цепи от наложения полного числа связей, также является очевидным следствием указанного общего принципа. Таким образом, способ Wittenbauer'a является одним из частных случаев общего метода решения задачи.

29. Для дальнейшего изложения необходимо вкратце остановиться на применяемых в настоящее время графических приемах решения вопросов статики механизмов.

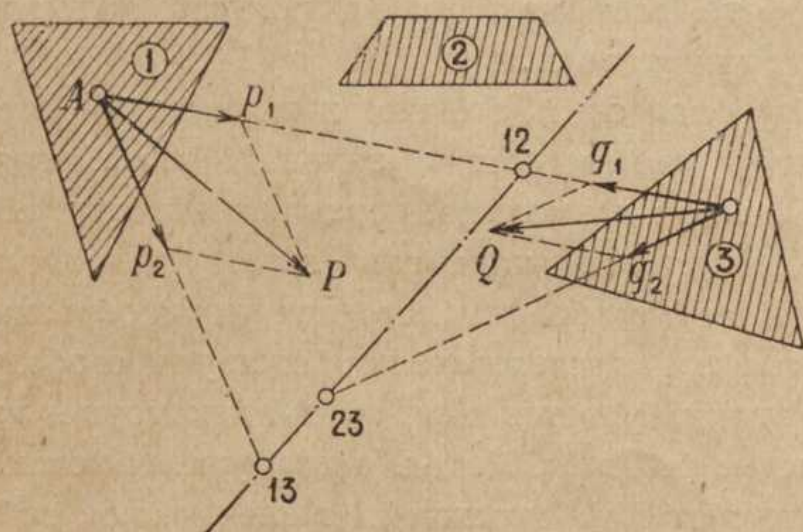
Здесь имеются две возможности: решение этих вопросов при помощи построений на самой фигуре механизма и решение при помощи построения на плане скоростей.

Последнее, в свою очередь, может производиться на полярном или неполярном плане.

Построения, производимые на основной фигуре, основываются на простой теореме, указанной Кеннеди¹⁾: *если внешние силы действуют лишь на одно звено механизма, то для равновесия последнего не-*

обходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил проходила через мгновенный центр вращения звена. Если звено движется поступательно, то равнодействующая должна быть перпендикулярна к направлению этого перемещения. Если система сил, действующих на звено, сводится к паре, то механизм будет в равновесии только в том случае, если это звено движется поступательно. Доказательство — очевидное.

Построение заключается в приведении всех действующих сил к одному звену. Пусть требуется сначала уравновесить силу P , действующую на какое-либо звено 1, силою Q , действующей на звено 2. Неподвижное звено обозначим цифрой 3 (фиг. 36).²⁾ Принимаем любую точку A линии действия силы P за ее точку приложения, и разлагаем силу на две составляющие: p_1 , направленную к мгновенному центру вращения 12, и p_2 , направленную к мгновенному центру 13. Пусть линия действия силы Q



Фиг. 36.

¹⁾ В. W. Kennedy «The mechanics of machinery», 1907, § 36, p. 264, 266.

²⁾ На фигуре звено 2 ошибочно обозначено цифрой 3 и наоборот; точка B не показана.

задана. Продолжаем p_1 до пересечения с этой линией в точке B . Сила Q должна состоять из двух слагающих: q_1 , которая равна и противоположна p_1 , и q_2 , которая направлена по линии $B-23$ и имеет совершенно произвольную величину. Действительно, силы p_2 и q_2 уничтожаются сопротивлениями неподвижных точек 23 и 13, а силы p_1 и q_1 , как приложенные к общему мгновенному шарниру звеньев 1 и 2, также уничтожаются.¹⁾ Очевидно, что сила— Q , т. е. сила Q , взятая в обратном направлении, эквивалентна силе P . От замены силы P , приложенной к звену 1, силой— Q , приложенной к звену 2, в условиях равновесия механизма ничто не нарушится. Можно сказать, что *сила— Q есть та же сила P , но приведенная к звену 2*, т. е. перенесенная на это звено.

Умея переносить силу с одного звена на другое, можно все силы собрать в одно звено, заменить их равнодействующей по обычным правилам статики, и тогда для равновесия механизма необходимо и достаточно, чтобы полученная сила удовлетворяла теореме Kennedy, приведенной выше.²⁾

Этот способ решения задачи, как и всякий способ, основанный на принципе возможных перемещений, не требует нахождения давлений в шарнирах. Несмотря на это, его нельзя считать безупречным, так как мгновенные центры вращения, нахождения которых он требует, часто выходят за пределы чертежа или же определяются из пересечения прямых, сходящихся под очень острым углом. На это неудобство указывает и Ассур в своей неоднократно цитированной нами работе.³⁾

30. Значительно удобнее и изящнее решается задача при помощи плана скоростей. При возможном перемещении цепи сумма работ всех сил выражается уравнением:

$$\sum P v dt. \cos (P, v) = 0,$$

откуда

$$\sum P v. \cos (P, v) = 0.$$

Так как план скоростей дает в готовом виде величину и направление всех скоростей, то она, очевидно, позволяет решить это уравнение и привести все силы к любому звену.⁴⁾ Однако, более удобной является та интерпретация, которая позволяет заменить *работы* сил их моментами,

¹⁾ Это построение также принадлежит Kennedy (см. там же стр. 294). В России на построение Kennedy обратил внимание В. Л. Кирпичев в «Беседах о механике», 1907, стр. 60; см. также. «Основания графической статики» его же, 1914, стр. 248.

²⁾ На этом можно было бы основать механический способ нахождения мгновенных центров вращения для звеньев механизма на моделях. Исследуемое звено должно быть нагружено в какой-либо точке A силой, которую необходимо поворачивать около этой точки до наступления равновесия. После этого следует переместить силу в какую-либо точку B того же звена и снова поворачивать до наступления равновесия. Точка пересечения обеих линий действия силы и будет искомым мгновенным центром вращения.

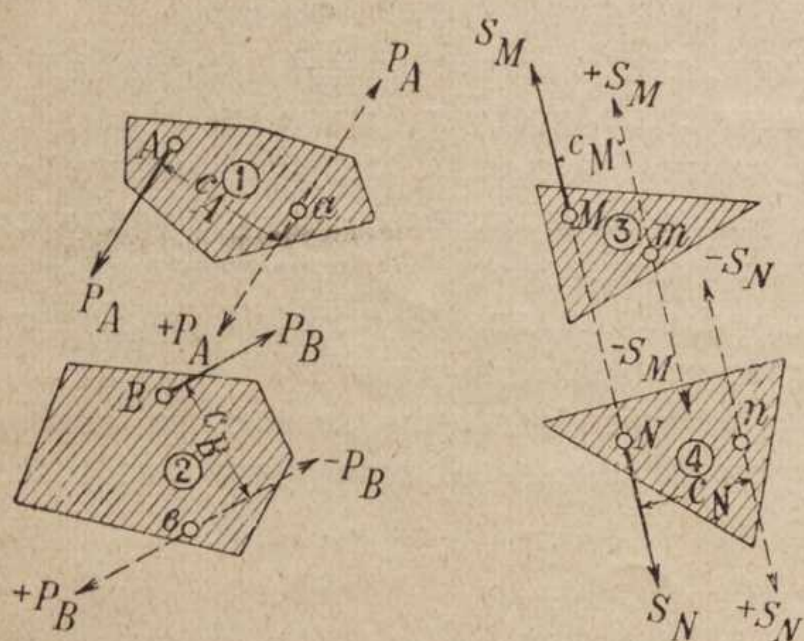
³⁾ Использование мгновенных центров вращения при помощи сведения задачи к равновесию мгновенного четырехзвенного механизма см. Wittenbauer «Graph. Dyn». S. 416. Этот прием Wittenbauer'a страдает тем же недостатком.

⁴⁾ Приведение сил по этому способу см. Wittenbauer «Gr. Dyn», S. 198, 409.

На неполярном плане скоростей, как известно, виртуальная работа каждой силы, приложенной к какой-либо точке A цепи, выражается как статический момент силы относительно точки a , которая служит изображением точки A . При равновесии сумма виртуальных работ всех сил, нагружающих кинематическую цепь, должна быть равна нулю. Таким образом, при равновесии *сумма моментов всех внешних сил относительно точек, которые служат изображениями их точек приложения, должна быть равна нулю*. Эта графическая интерпретация уравнения виртуальных работ, вытекающая из одной работы Мора,¹⁾ введена в употребление Мюллером-Бреслау²⁾.

Единственное неудобство этого метода состоит в том, что момент каждой силы приходится определять относительно отдельной точки.

31. Существенное усовершенствование указанного метода предложено F. Schur³⁾. Он рассматривает следующий частный случай, который имеет значение, главным образом, для теории ферм. Пусть данная нагрузка



Фиг. 37.

механизма должна быть уравновешена двумя равными и противоположными силами S_M и S_N , направленными по данной прямой MN ; требуется найти величину этих двух сил.

Перенесем все внешние силы, приложенные к механизму, в том числе и опорные реакции, приложенные к неподвижному звену, на *изображения их действительных точек приложения*; величины и направления сил при этом

должны оставаться без изменения. Докажем, что эта *система сил, приложенных в изображениях точек механизма, должна быть уравновешенной с точки зрения статики неизменяемой фигуры*. Действительно, при равновесии механизма нагрузка последнего, вместе с вызываемыми ею опорными реакциями, должна удовлетворять обычным уравнениям статики неизменяемой фигуры; кроме того, должно соблюдаться условие:

$$P_A c_A + P_B c_B + \dots + S_N (c_M - c_N) = 0$$

(фиг. 37). Если к изображениям приложим по две силы $\pm P_A, \pm P_B$ и т. д., то равновесие не нарушится. Но из написанного уравнения следует,

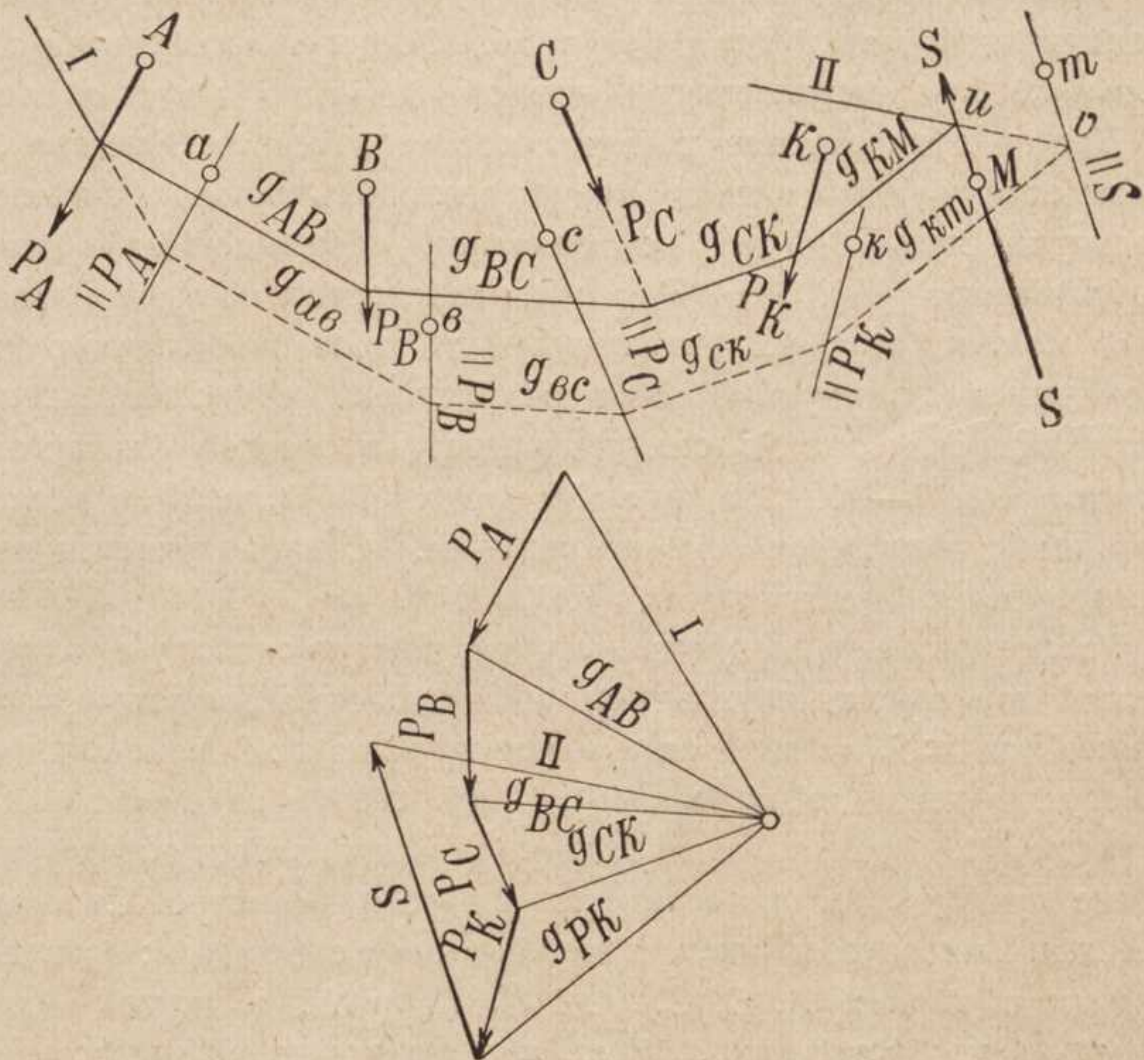
¹⁾ Civiling, 1885, S. 3.

²⁾ Schweizerische Bauzeitung 1887, S. 121; Z. d. Arch. — u. Ing. — Vereines zu Hannover, 1888, S. 191, а также в его Графической статике.

³⁾ Friedrich Schur, Math. Annalen, 1897, S. 142, а также его Vorlesungen ueber graphische Statik, 1915, S. 124.

что полученные пары сил $\pm P_A, \pm P_B, \dots \pm S_M, \pm S_N$ дают в сумме момент, равный нулю, т. е. уравниваются. Поэтому и силы, приложенные в изображениях $a, b, c, \dots m, n$, сами должны образовать уравновешенную систему, что и требовалось доказать.

Практическое применение этой теоремы состоит в следующем. Считая все звенья механизма за одно целое, находят опорные реакции от данной нагрузки; приложенные к неподвижному звену силы S_M и S_N , как равно-противоположные и направленные по одной прямой, не оказывают на реакции неподвижного звена никакого влияния. После этого заменяют все силы новыми, приложенными к изображениям, строят для них замкнутые силовой и веревочный многоугольники и находят значение сил $\pm S$, приложенных в точках m и n .



Фиг. 38.

32. Небольшим видоизменением метода Schur'a, которое мы здесь укажем, можно достигнуть того, что он будет пригоден для всех случаев равновесия механизма и не потребует определения опорных реакций. Пусть в механизме, для которого построен неполярный план скоростей, требуется уравновесить данную систему сил $P_A, P_B, P_C, \dots P_K$ (фиг. 38) силой S , известной по направлению и по точке приложения M .

Построим силовой и веревочный многоугольники для данных сил $P_A, P_B, P_C, \dots P_K$. Стороны веревочного многоугольника обозначим через $I, g_{AB}, g_{BC}, \dots g_{KM}$. Направление последней стороны (II) веревочного многоугольника остается пока неопределенным, так как оно зависит

от силы S . Строим затем веревочный многоугольник для тех же сил, приложенных в точках a, b, c , и направленных в обратную сторону. Для этого, разумеется, нет надобности строить второй силовой многоугольник. Сторону 1 оставляем общею для обоих веревочных многоугольников; остальные стороны будут взаимно-параллельными:

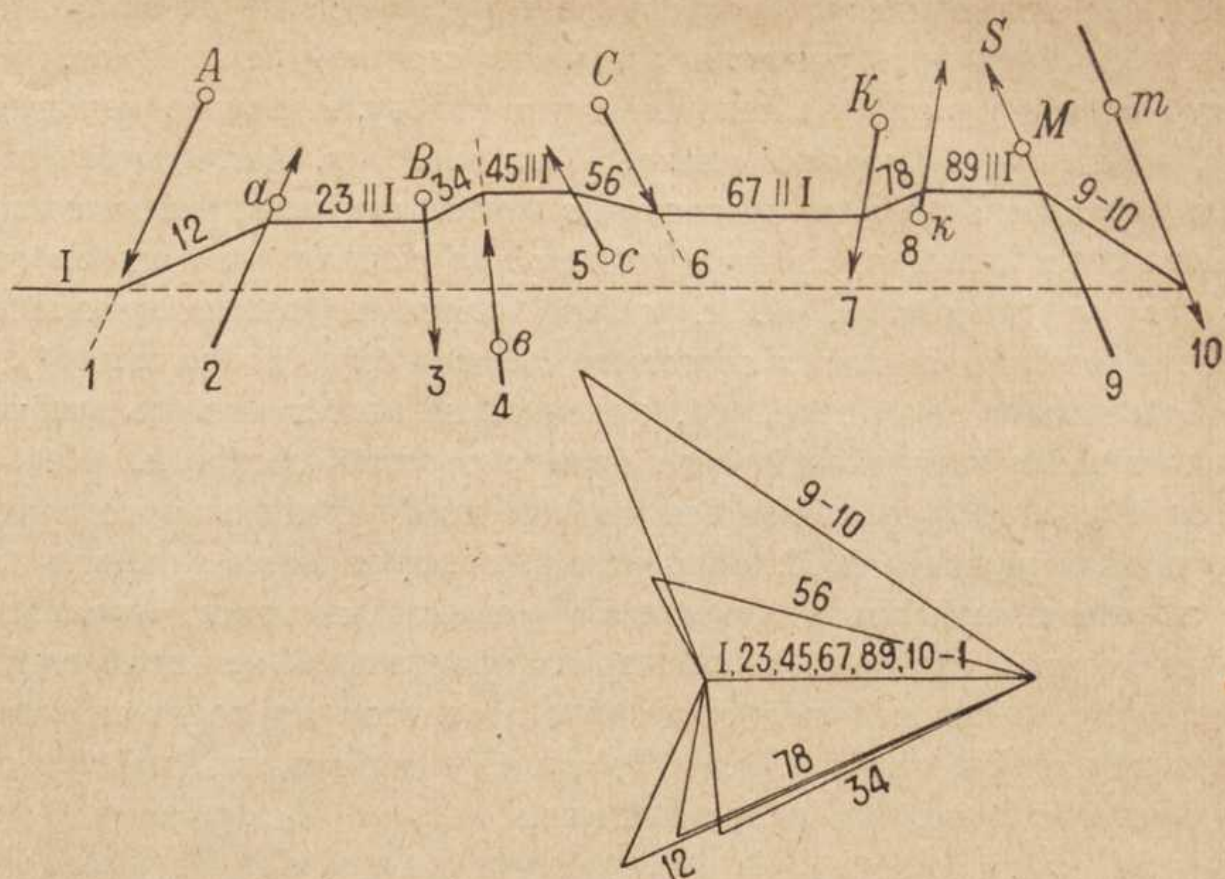
$$g_{ab} \parallel g_{AB}, g_{BC} \parallel g_{BC}, \dots g_{km} \parallel g_{KM}.$$

Получив, таким образом, крайние вершины u, v обоих многоугольников, соединяем их прямою. *Необходимо и достаточно, чтобы крайние стороны, обоих многоугольников (II) совпали друг с другом.* Действительно, в этом случае равнодействующие обеих систем сил проходят через одну и ту же точку, именно через точку пересечения прямых I и II. Но так как эти равнодействующие взаимно-равны, параллельны и противоположно направлены, то момент полученной пары будет равен нулю. Остается провести на силовом многоугольнике луч, параллельный прямой II, и мы получим искомую силу S . Таким образом, все решение производится графическим путем.

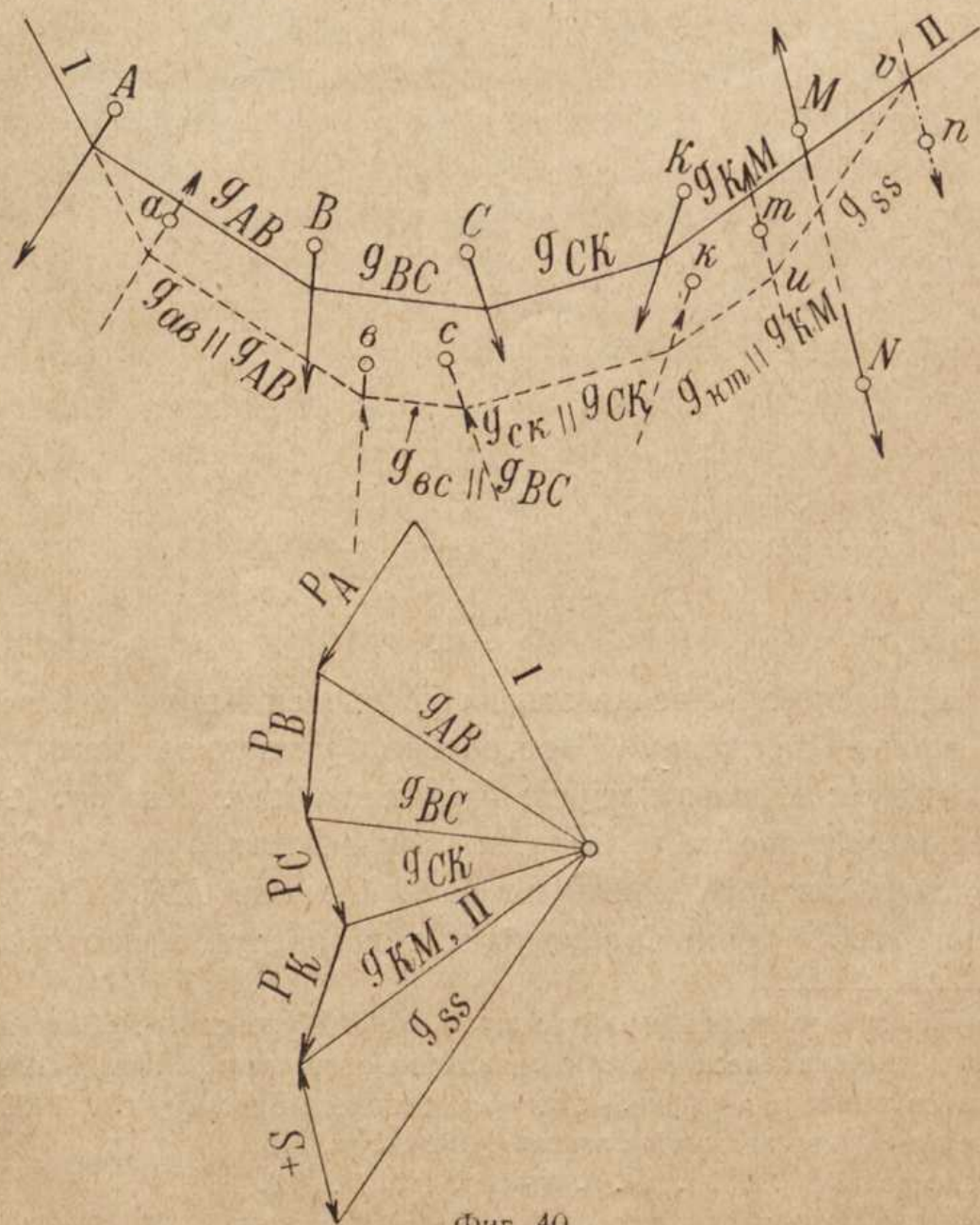
Ту же задачу можно решить иначе: построить силовой и веревочный многоугольники *сразу для всей системы сил*, приложенных в точках и в их изображениях (фиг. 39). Так как эта система состоит из пар сил, суммарный момент которых равен нулю, то веревочный многоугольник должен оказаться замкнутым. Из этого условия сейчас же определятся графически величины сил S : она получается на силовом многоугольнике между лучами I и 9—10. На фиг. 39 показаны силовой и веревочный многоугольники; построение ясно из чертежа. Сила получается из силового многоугольника между лучами sM и Mm .

33. Рассмотрим еще следующий случай: данную систему сил требуется уравновесить при помощи двух равно-противоположных и направленных по одной прямой сил $\pm S$, приложенных в данных точках M, N , изображениями которых служат точки m', n' (фиг. 40). Снова строим силовой многоугольник; в нем луч II, ограничивающий данные силы, является определенным, а направление луча g_{s-s} , ограничивающего силу S , неизвестно. Строим снова два веревочных многоугольника с параллельными сторонами: один для сил, приложенных в точках $A, B, C, \dots K, M$ и N , а другой — для сил, приложенных в изображениях a, b, m, n этих точек. В первом из них сторона g_{KM} , направление которой известно из силового многоугольника, играет роль крайней стороны (II) многоугольника. Действительно, две равно-противоположные силы S , направленные по одной прямой, не оказывают никакого влияния на веревочный многоугольник. Во втором силы S , приложенные в точках m, n , образуют пару. Крайняя сторона его должна совпасть со стороной II первого, поэтому соединяем точки u, v , как показано на чертеже, прямою g_{s-s} . На силовом многоугольнике проводим затем луч, параллельный g_{s-s} , и определяем таким образом силу S .

Разумеется, эта задача, так же, как и предыдущая, может быть разрешена при помощи *одного* веревочного многоугольника, построенного сразу для обеих систем сил. Однако, решение при помощи двух веревочных многоугольников представляется более удобным.



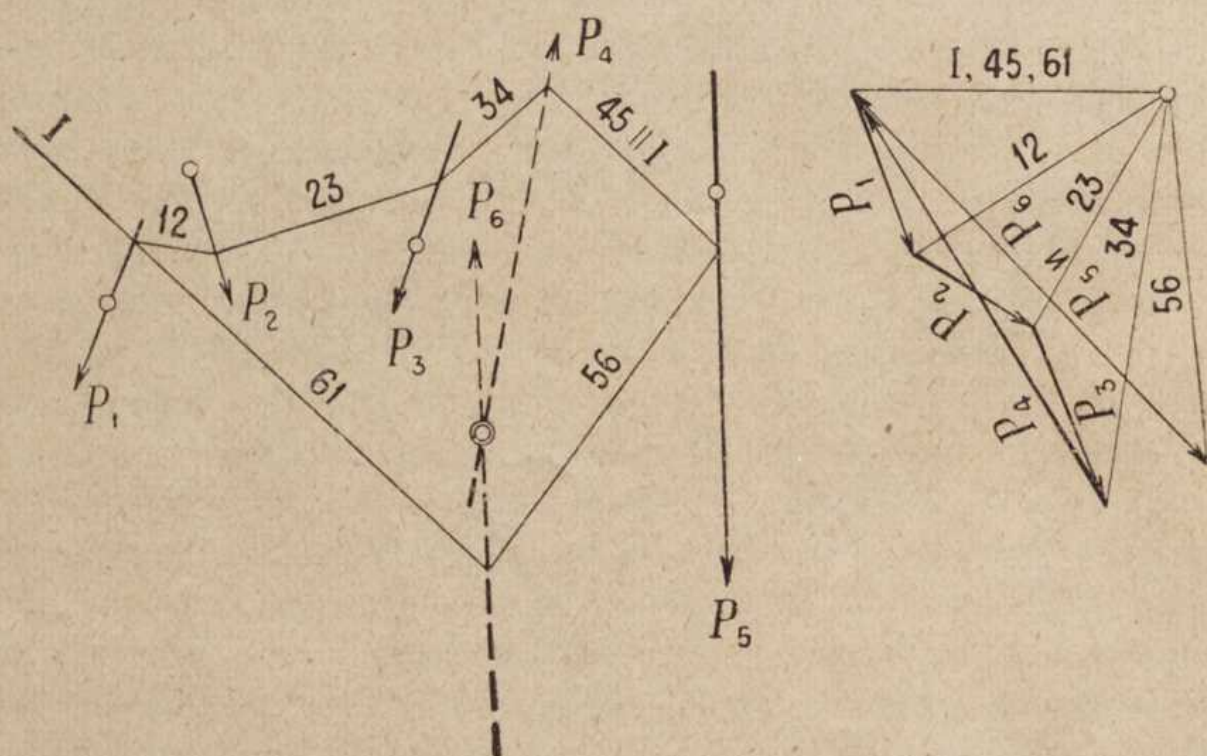
Фиг. 39.



Фиг. 40.

34. Полярный план скоростей (повернутых) является наиболее подходящей фигурой для решения задач по статике механизмов. Нужно принять план скоростей за неизменяемую фигуру, имеющую неподвижную точку вращения в полюсе плана. Как известно, после переноса всех сил из механизма на план скоростей в точки, которые являются изображениями действительных точек приложения сил, план скоростей должен оказаться в равновесии, т. е. сумма моментов всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей должна быть равна нулю ¹⁾.

Пользование этой теоремой, конечно, не может вызвать каких-либо принципиальных затруднений, если план скоростей построен. Некоторые мало существенные упрощения для графического определения моментов сил около полюса указаны В. Л. Кирпичевым, предложившим заменить данные силы эквивалентной им в отношении момента системой параллельных сил, ²⁾ и Ассуром, который рекомендовал производить на плане скоростей двойной или одиночный поворот сил с переносом их точек приложения, добавлением новых сил и т. п. ³⁾ По нашему мнению, эти приемы скорее затрудняют решение, чем облегчают его.



Фиг. 41.

Для графического решения задачи уравнивания полярного плана скоростей вполне применимо построение, указанное нами выше для неполярного плана; в данном случае оно упрощается. На фиг. 41 показано это построение. Требуется уравновесить относительно точки O ⁴⁾ систему сил $P_1 P_2 P_3$ силою, направленною по данной линии MN . Система будет в равновесии, если в точке O приложим силу, равную и противоположную

¹⁾ Теорема эта доказана в работе проф. Н. Е. Жуковского: «Сведение динамических задач о кинематической цепи к задачам о рычаге», Москва 1909, стр. 20. Она содержится также в «Графич. статике» Мюллера-Бреслау, т. I, 1908 г. стр. 41.

²⁾ «Основания графической статики», 1914, стр. 255.

³⁾ «Исследование» ч. вторая, стр. 12—18.

⁴⁾ На чертеже эта точка показана двойным кружком.

равнодействующей названных четырех сил. Строим силовой многоугольник для сил $P_1 P_2 P_3$; находим их равнодействующую и прилагаем обратную ей силу P_4 в точке O . Силу, направленную по MN , обозначаем через P_5 , а обратную ей в точке O — через P_6 . Построив замкнутый веревочный многоугольник для этой системы сил, находим искомые силы P_5 и P_6 .

35. Упомянутые простые построения позволяют решать все вопросы статики механизмов. В частности, ими решается общий вопрос о *приведении* сил в данную точку, вопросы сложения, разложения, переноса сил и т. д. Из этих построений видно, что статика механизма подчинена иным законам, чем статика неизменяемой фигуры, хотя в *основе* их лежит, конечно, один и тот же универсальный принцип механики — принцип Лагранжа. Но статика неизменяемой фигуры является частным случаем статики механизма, подобно тому, как последняя является частным случаем статики кинематической цепи вообще.

В частности, отметим, что для механизма остаются в силе все законы статики неизменяемой фигуры, поскольку речь идет о преобразовании сил, приложенных к *одному и тому же звену*.

Перечислим некоторые, наиболее важные преобразования.

К каждому звену можно прибавить сколько угодно сил, проходящих через мгновенный центр вращения. На полярном плане скоростей эти силы проходят через полюс, а на неполярном направлены от точки приложения к ее изображению. Если звено движется поступательно, то можно прибавить любое количество параллельных сил, направленных в бесконечно-удаленный мгновенный центр этого звена.

Каждую силу, приложенную в какой-либо точке A , можно изменять таким образом, что конец вектора, изображающего ее, будет скользить по прямой, параллельной лучу AO , где O — мгновенный центр вращения соответствующего звена. Это положение является следствием предыдущего.

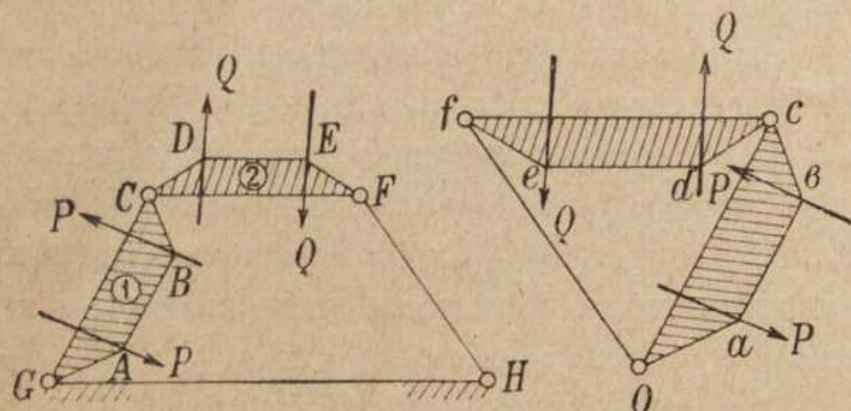
Пара сил, приложенная к подвижному звену механизма, может уравновеситься сама собою лишь в том случае, если в рассматриваемом положении мгновенный центр вращения этого звена лежит в бесконечности, т. е. последнее движется поступательно. С другой стороны, она может быть уравновешена не только парой, но и *силой*, приложенной к другому звену в любой его точке и по любому направлению.

Пара сил, из которых одна приложена к одному звену, а другая к другому, может сама себя уравновесить. Для этого необходимо, чтобы изображения их линий действия на полярном плане скоростей слились между собою или, иначе — чтобы действительные точки приложения имели по направлению, параллельному этим силам, одинаковые и одинаково направленные скорости.

Две равно-противоположные силы, направленные по одной прямой и приложенные к различным звеньям, могут уравновесить друг друга лишь при условии, что они проходят через мгновенный центр взаимного вращения этих звеньев. Очевидно, что при возможном перемещении расстояние между точками приложения этих сил остается без изменения.

Две пары, из которых одна приложена к одному звену, а другая — к другому, могут уравновесить друг друга и при неравенстве их моментов.

С другой стороны, две равные и противоположно направленные пары, приложенные к различным звеньям, не всегда уравновешивают друг друга. Так, на фиг. 42 пары, действующие на звенья 1 и 2 и направленные в противоположные стороны, при переносе на полярный план скоростей, изображенный справа, оказываются направленными в одну сторону и, следовательно, не могут уравновеситься.



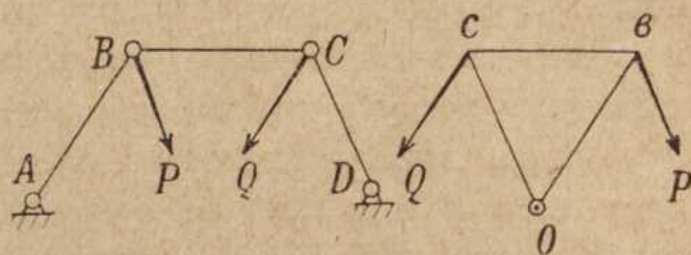
Фиг. 42.

Две равные и противоположные пары, приложенные к двум звеньям, которые образуют друг с другом *поступательные* пары, всегда изображаются на планах скоростей в виде равных и противоположных пар и поэтому взаимно уравновешиваются.

Относительно *усилий в стержнях*, образующих звенья механизма, можно сказать то же, что об усилиях в элементах ферм. Они определяются при помощи вырезания узлов, построения диаграммы Кремона и т. п. Так как изображения всех стержней на плане скоростей — параллельны самим стержням, а направление сил также остается без изменения, то определение усилий в стержнях основной фигуры можно заменить определением усилий в стержнях плана скоростей. Для неполярного плана эта идея развита Schur'ом,¹⁾ а для полярного она высказана Н. Е. Жуковским.²⁾ К этому нужно добавить, что неполярный план

¹⁾ F. Schur: «Vorlesungen», S. 122.

²⁾ В работе Н. Е. Жуковского: «Сведение динамических задач» ..., стр. 20 теорема сформулирована следующим образом: «упругие силы в звеньях цепи равны упругим силам в соответственных стержнях вспомогательного рычага». Эта формулировка — не вполне точна. Она дает повод думать, что если в полярном плане, на который перенесены действующие силы, какой-либо стержень оказывается, например, растянутым, то он и в действительной цепи будет растянут. На самом же деле это не так, что видно прямо из примера, приведенного самим Жуковским (фиг. 12). Приведем здесь более простой пример (фиг. 43): очевидно, что от действия сил



Фиг. 43.

P, Q стержень BC — сжат, между тем как на плане скоростей стержень BC — растянут. Это неполное соответствие между усилиями стержней основной и изображающей фигуры объясняется тем, что силы переносятся на план скоростей не в виде изображений, т. е. никогда не изменяя своего направления, между тем как стержни могут изменять при этом свое направление на обратное. В точной формулировке теоремы должно заключаться лишь утверждение о равенстве абсолютных величин и направлений сил, приложенных к каждому узлу.

скоростей, если считать его за кинематическую цепь, имеет такую же степень изменяемости, как сама цепь, а полярный — на 1 меньше, т. е. последний представляет собою неизменяемую фигуру.

36. Отметим в заключение одно свойство однократно-изменяемых цепей, которое позволяет получать сразу решение, удовлетворяющее равновесию целой группы цепей.

Если однократно-изменяемая цепь содержит n звеньев, то число кинематических связей между этими звеньями должно быть равно $3n - 4$. Если эти связи воплощены исключительно в низших кинематических парах (шарнирах и поступательных парах), то число последних равно

$$\frac{3n - 4}{2}.$$

Каждый данный шарнир или поступательная пара с точки зрения кинематики равносителен заданию одного мгновенного центра вращения. Все число мгновенных центров взаимного вращения звеньев равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Но при

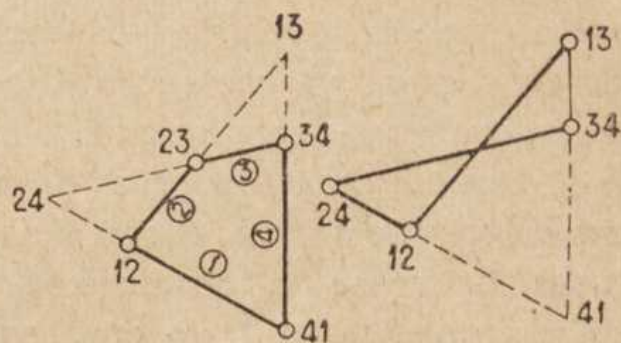
$$n > 2 \dots n(n-1) > 3n - 4,$$

т. е. полное число мгновенных центров — больше данного числа их.

Заменяем некоторые мгновенные центры, не лежащие в бесконечности, шарнирами, соединяющими соответствующие два звена, а лежащие в бесконечности — поступательными парами. Взамен этого, удалим такое же количество *данных* шарниров или поступательных пар. Таким способом можно получить множество разнообразных механизмов.

Кинематическое сродство этих механизмов, которые могут получиться совершенно непохожими друг на друга, заключается, очевидно, в следующем: они состоят из одинакового числа звеньев, и мгновенные центры взаимного вращения соответствующих звеньев у всех этих механизмов совпадают. Иначе говоря, все эти механизмы обладают одною и тою же конфигурацией полюсов. Такие механизмы можно назвать *эквиполярными*.

Простейший пример эквиполярных механизмов [показан на фиг. 44, где показаны две четырехзвенные цепи, обладающие совершенно одинаковой конфигурацией полюсов. Бесконечно-малые возможные перемещения всех эквиполярных механизмов и их планы скоростей — одинаковы¹⁾. Поэтому *нагрузка, которая уравнивается на одном из них, уравнивается и на всех остальных*.



Фиг. 44.

¹⁾ Если бы мы пожелали, чтобы не только бесконечно-малые, но и конечные перемещения всех этих механизмов оказались тождественными между собой, то взамен удаляемых шарниров данного механизма, следовало бы вводить не мгновенные центры вращения, а полодии, скрепленные с соответствующими звеньями.

Это обстоятельство, интересное само по себе, в некоторых случаях может оказаться полезным при решении задач. Некоторые примеры этого читатель встретит ниже.

Отметим, что аналогичную операцию можно произвести также с двукратно-изменяемыми цепями. Их совокупность возможных бесконечно-малых движений не изменится, если удалить некоторые из данных нормальных лучей и задаться таким же числом других лучей из той же конфигурации.

Графическая статика **двукратно-изменяемых цепей, основанная на свойствах нормальных лучей.** 37. Задача о равновесии двукратно-изменяемой несвободной цепи, как уже указывалось выше, имеет определенное решение лишь в том случае, если число неизвестных элементов нагрузки равно 2. Если число этих неизвестных превышает 2, задача становится неопределенной. Если число неизвестных равно 1, то задача, вообще говоря, — невозможна, но в частном случае, если нагрузка сама удовлетворяет дополнительному условию, задача все же может оказаться разрешимой.

Решение всех вопросов о равновесии двукратно-изменяемой кинематической цепи мы будем излагать в дальнейшем исключительно на основании теоремы, доказанной в п. 28. Для равновесия такой цепи необходимо и достаточно образовать из нее путем наложения той или иной связи два механизма и подчинить действующие на них силы следующим двум условиям: *оба механизма должны быть в равновесии.* Выполнение этих условий может быть достигнуто графическим построением либо на основной фигуре, либо на плане скоростей. Мы рассмотрим оба эти метода в последовательном порядке на ряде отдельных задач и примеров.

38. *Задача № 1.* Требуется приложить к одному из звеньев (назовем его звеном 1) двукратно-изменяемой цепи только одну сосредоточенную силу P так, чтобы цепь осталась в равновесии. Величина силы дана; линия ее действия — неизвестна.

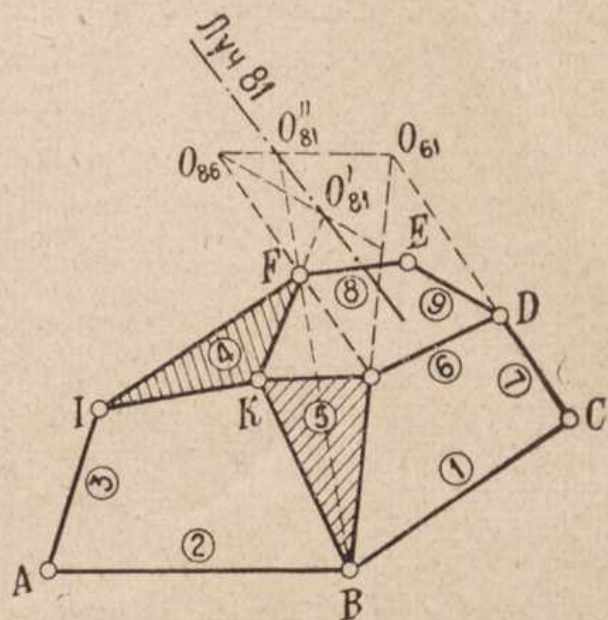
Решение. В двух различных механизмах, которые могут быть получены из кинематической цепи при помощи той или иной добавочной связи, искомая сила P должна проходить через мгновенный центр вращения звена 1 относительно неподвижного звена. Но в таком случае она будет направлена по нормальному лучу звена 1. Итак, *для того, чтобы одна сила могла уравновеситься на двукратно-изменяемой кинематической цепи, необходимо и достаточно, чтобы она была направлена по нормальному лучу этого звена относительно неподвижного.* Величина силы при этом может быть произвольной.

Полученная теорема остается справедливой, очевидно, и в том случае, если на данное звено цепи действует не одна сосредоточенная сила P , а какая угодно система внешних сил. *Нужно только понимать под силой равнодействующую (в обычном смысле этого слова) всех внешних сил, приложенных к упомянутому звену.*

Мы могли бы воспользоваться решенною здесь задачею, чтобы дать *статическое доказательство теоремы Роденберга*. Действительно, если сила P проходит через два положения мгновенного центра звена 1, то оба соответствующих механизма будут в равновесии, а потому, согласно нашей основной теореме, и вся двукратно-изменяемая цепь будет в равновесии. Но в таком случае выходит, что при всех возможных перемещениях цепи сила производит работу, равную нулю, т.-е. она всегда проходит через мгновенный центр вращения звена 1. Тем самым доказано, что все эти мгновенные центры лежат на одной прямой.

39. *Задача № 2.* При условии предыдущей задачи найти линии действия уравновешенной силы для всех звеньев цепи показанной на фиг. 45.

Решение. Звено 1 — неподвижно. Звенья 2 и 5 вращаются около постоянного центра, лежащего в точке B ; звено 6 при всех возможных перемещениях вращается около центра O_{61} . Таким образом на звене 2 может уравновеситься бесконечное множество сил, различных по величине и направлению, но проходящих через B . Аналогичное заключение относится к звеньям 5 и 6. Далее, для звена 3 нормальным лучом, очевидно, служит прямая AB ; это и есть линия действия уравновешенной силы, приложенной к звену 3. Для звена 4 нормальным лучом служит прямая KB . Остается



Фиг. 45.

только найти линию действия силы для звена 8. Задаемся два раза мгновенным центром вращения звена 4: первый раз в точке K , второй раз — в точке B . Первому заданию соответствует неподвижное состояние звеньев 5—6—7; мгновенный центр звена займет поэтому положение O_{81}' . Второму заданию соответствует слияние звеньев 4 и 5 в одно. Пользуясь теоремой Аронгольда о трех мгновенных центрах, найдем сначала точку O_{86} ; затем на пересечении прямых O_{86} , O_{61} и FB — точку O_{81}'' . Прямая O_{81}' , O_{81}'' и будет искомым нормальным лучом, а вместе с тем — и линией действия на звено 8.

40. *Задача № 3.* При каком условии две равные и противоположные силы, направленные по одной прямой и приложенные к двум звеньям цепи, взаимно уравниваются?

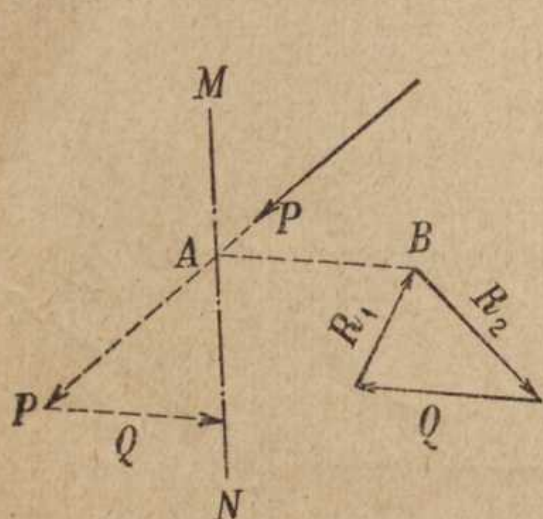
Решение. В п. 35 было указано, что в механизме такие две силы должны проходить через мгновенный центр взаимного вращения обоих звеньев. В двукратно-изменяемой цепи они должны проходить через всякий такой возможный центр. Отсюда следует, что *линия действия этих сил должна слиться с взаимным нормальным лучом этих звеньев*.

Мы могли бы прийти к этому выводу непосредственно, заметив, что работа таких двух сил может быть равна нулю лишь в случае, если при

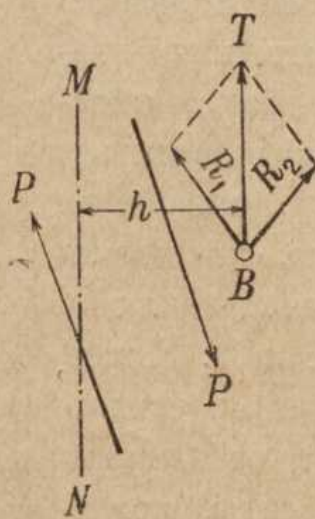
всяком возможном перемещении расстояния между их точками приложения не изменяется. Но этим свойством обладают лишь такие точки обоих звеньев, которые лежат на их взаимном нормальном луче.

41. *Задача № 4.* В двукратно-изменяемой цепи, которая находится в равновесии под действием некоторой нагрузки, требуется найти реакции в шарнирах данного двучленного звена. Известна равнодействующая P нагрузки этого звена, а также линии действия R_1, R_2 искомых реакций двух внешней звеньев, образующих с ним вращательные и поступательные пары (фиг. 46).

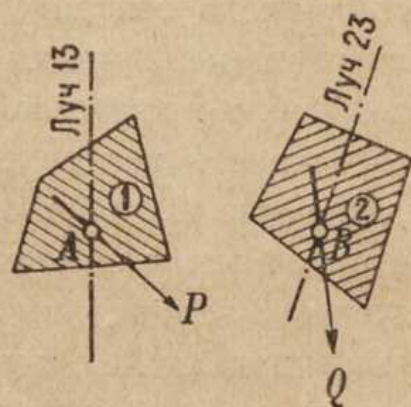
Продолжаем силы R_1 и R_2 до взаимного пересечения в точке B , а силу P — до пересечения с нормальным лучом MN в точке A . Разлагаем P на 2 слагающие: T по направлению нормального луча и $Q \parallel AB$. В точке B строим замкнутый силовой треугольник $Q R_1 R_2$, который



Фиг. 46.



Фиг. 47.



Фиг. 48.

и даст нам величину сил R_1, R_2 . Действительно, при таком разложении вся система сил, действующих на звено, сводится к одной только силе T , направленной по нормальному лучу.

42. *Задача № 5.* Решить предыдущую задачу при условии, что на данное звено действует внешняя нагрузка, которая приводится не к силе P , а к паре сил (P, P) с данным моментом M_0 (фиг. 47).

Для равновесия необходимо, чтобы система сил привелась к силе, направленной по нормальному лучу MN . Через точку B пересечения сил R_1, R_2 проводим $T \parallel MN$ и выбираем величину этой силы так, чтобы получить $Th = -M_0$. Тогда, приложив по лучу две силы $\pm T$, очевидно, мы приведем всю систему к одной силе T , направленной по лучу. Силы R_1, R_2 найдутся из разложения силы T на две параллельные, их составляющие.

43. *Задача № 6.* Данную силу Q , приложенную к звену 2 цепи, требуется уравновесить силой P , приложенной к звену 1 и имеющей данное направление (фиг. 48).

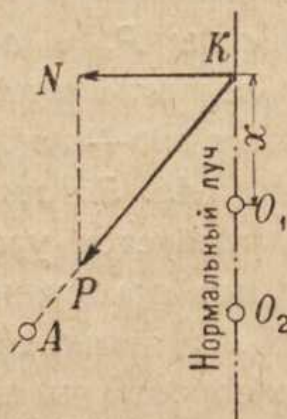
Решение. Пусть известны нормальные лучи 13 и 23, где 3 — неподвижное звено; сила Q пересекается с лучом 23 в некоторой точке B . Примем ее за мгновенный центр вращения звена 2; тогда работа силы Q в соответствующем движении будет равна нулю. Но в таком случае и работа силы P должна быть равна нулю, следовательно, она должна про-

ходить через соответствующее положение мгновенного центра звена 1. Итак, *точки пересечения обеих сил с соответствующими нормальными лучами суть взаимно-соответствующие мгновенные центры вращения этих звеньев в одном и том же возможном перемещении.* Таким образом, по данной точке B можно найти точку A , положение которой совершенно не зависит от величины и направления силы Q . После этого останется только одна неизвестная — величина силы P , которая найдется из одного уравнения с одним неизвестным.

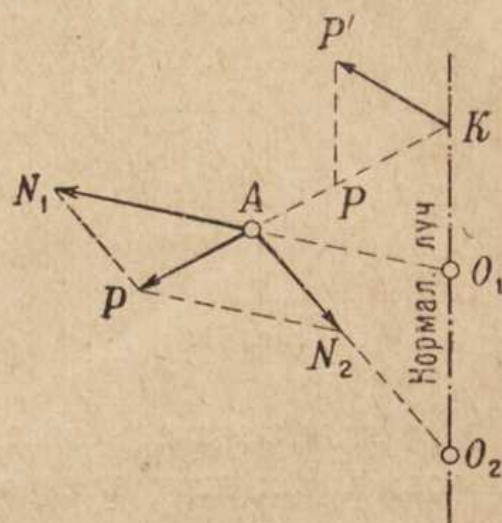
44. Задача № 7. Данную систему сил, приложенную к звеньям цепи, требуется уравновесить при помощи одной силы P , приложенной к определенному звену и заданной либо по направлению, либо по точке приложения A .

Примем за неизвестное величину слагающей N , перпендикулярной к нормальному лучу, и точку K ее пересечения с последним (фиг. 49). Дадим цепи два возможных перемещения, которым будут соответствовать мгновенные центры вращения O_1 и O_2 .

Тогда получим два уравнения, из которых можно определить абсциссу x и силу N . Затем нужно провести из точки K вектор P , параллельный данному направлению, или же провести его через данную точку A . Из построения ясно,



Фиг. 49.



Фиг. 50.

1) что мы не имеем права задаваться этой точкой на

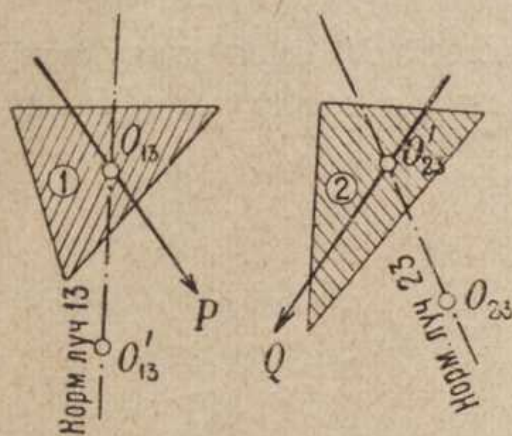
нормальном луче; 2) что *каждая сила, уравновешивающая на данном звене данную нагрузку цепи, пересекается с нормальным лучом в одной и той же точке K* ; 3) *все они имеют одну и ту же проекцию N на направление, перпендикулярное к последнему.*

Отметим еще, что решение этой задачи, очевидно, позволяет *переносить внешние силы с одного звена на другое, а также приводить все внешние силы к одному звену.*

Второе решение. Если дана точка приложения A , то соединяем ее с мгновенными центрами вращения O_1 и O_2 (фиг. 50), даем цепи соответствующие два возможных перемещения, и пишем оба раза уравнения работ. Первое из этих уравнений будет содержать только одну неизвестную N_2 , а второе — одну неизвестную N_1 ; по двум слагающим найдется потом и сила P . Если же точка A не дана, а дано направление силы, то берем точку A произвольно, производим указанное построение, затем продолжаем силу P до пересечения в точке K с нормальным лучом. После этого проводим $PP' \parallel$ нормальному лучу и $KP' \parallel$ требуемому направлению. Так как *все векторы, концы которых параллельны нормальному лучу, при любом направлении цепи производят равные работы*, то полученная сила P и будет искомой.

45. *Задача № 8.* Данную нагрузку цепи — уравновесить при помощи двух сил, приложенных к двум определенным звеньям и заданных своими линиями действия.

Пусть даны линия действия P и Q и нормальные лучи 13 и 23 обоих звеньев 1 и 2 относительно неподвижного 3 (фиг. 51). Точку пересечения луча 13 и силы P примем за мгновенный центр вращения O_{13} и найдем на луче 23 соответствующее положение мгновенного центра O_{23} . Потом примем точку пересечения силы Q с лучем 23 за мгновенный центр O'_{23} и найдем на луче 13 соответствующее положение мгновенного центра O'_{13} . Если мы для каждого из двух соответствующих возможных перемещений напомним уравнение работ, то получим два уравнения, из



Фиг. 51.

которых одно содержит одну только неизвестную P , а другое — только неизвестную Q .

Из этого решения видно, что величина силы Q не зависит от величины и направления силы P , а исключительно от точки пересечения ее с лучем 13, а величина силы P , в свою очередь, не зависит от величины и направления силы Q , а исключительно — от точки ее встречи с лучем 23.

46. *Задача № 9.* Данную нагрузку цепи требуется уравновесить при помощи двух пар, приложенных к данным звеньям 1 и 2.

В этой задаче неизвестными являются моменты обеих пар. Взяв два возможных перемещения и написав выражения работ, мы получим два совместных уравнения с этими моментами. Если желательно, чтобы каждое уравнение содержало только по одному неизвестному, то нужно задаться для первого движения бесконечно-далеком положением полюса 13, а для второго бесконечно-далеком положением полюса 23. В результате мы получим в первом движении поступательное перемещение звена 1, при котором работа пары, приложенной к этому звену, равна нулю; во втором случае будем иметь аналогичный результат для звена 2.

47. Из этих немногих примеров достаточно выясняется значение нормальных лучей для статики двукратно-изменяемых цепей. Мы рассмотрели здесь в общем виде разнообразные случаи уравнивания цепей. Так как всякая уравнивающая сила или группа сил, будучи взята с обратным знаком, является равнодействующей, то в изложенных примерах заключается одновременно также решение вопросов о преобразовании сил, об их переносе и приведении. Все эти вопросы получают простое решение при помощи нормальных лучей. Таким образом все вопросы статики несвободной двукратно-изменяемой цепи могут считаться решенными, если построены нормальные лучи для движения ее звеньев относительно неподвижного.

После того, как все силы найдены, определение внутреннего усилия в любом стержне может быть произведено при помощи последовательного вырезания узлов или другим методом, совершенно так же, как в фермах.

Можно также определить усилие в любом стержне, удалив таковой и заменив его двумя силами. Этот метод обращает цепь в трехкратно-изменяемую, поэтому изложение его относится к содержанию следующей главы.

Во всех рассмотренных задачах мы считали, что каждое звено, к которому требовалось приложить уравнивающую нагрузку, в своем движении относительно неподвижного имело нормальный луч, и ни одно не имело *постоянно* мгновенного центра вращения. То звено, которое имеет постоянный мгновенный центр, обладает *одной* степенью свободы; вопросы равновесия такого звена рассмотрены были выше.

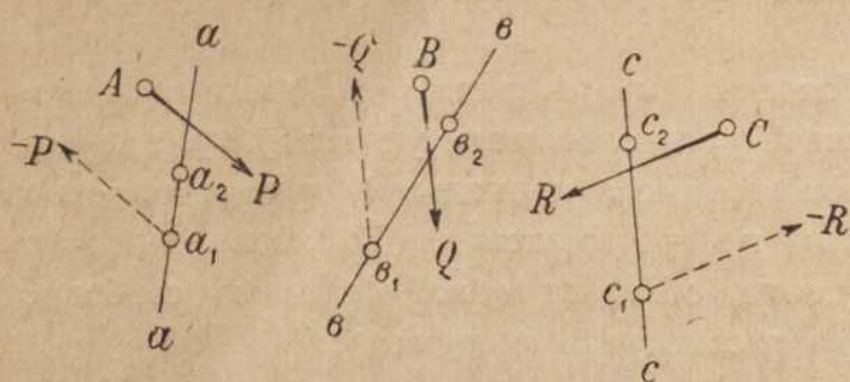
Графическая статика 48. Общий способ решения вопросов равновесия цепи на полярном или неполярном плане скоростей, двукратно-изменяемых цепей, основанная на свойствах плана скоростей. согласно указанному выше принципу, заключается в том, что цепи сообщается два возможных перемещения. В каждом из них на плане скоростей находят изображения всех точек приложения сил, затем составляют выражения работ последних. Так как в двукратно-изменяемой несвободной цепи число неизвестных не превышает 2, то из этих двух уравнений — вообще говоря, совместных, — и получается решение задачи.

Указанный ход решения задачи — несложен. Он предполагает, однако, что на плане скоростей имеется возможность быстро находить изображение любой точки цепи в любом из возможных перемещений. Во всех этих перемещениях можно принять угловую скорость одного из звеньев *постоянно*, равною некоторой (произвольной) величине ω_0 . Тогда все изображения точек, как мы знаем, будут двигаться по прямым. Совокупность этих прямых, нанесенных на план скоростей, представляет собою, как мы уже отмечали, самую общую интерпретацию всех возможных перемещений цепи. Имея таковую, нетрудно решать на чертеже все вопросы статики. В дальнейшем мы будем заниматься различными применениями таких обобщенных планов скоростей к задачам статики. Но сначала отметим несколько теорем, вытекающих из указанного свойства обобщенных планов.

49. Мы знаем, что если в двукратно-изменяемой цепи при двух возможных перемещениях сумма работ внешних сил равна нулю, то она будет равна нулю и при всех остальных возможных перемещениях. Выскажем эту теорему, приняв во внимание те способы выражения работ, которые получаются на неполярном и полярном планах скоростей.

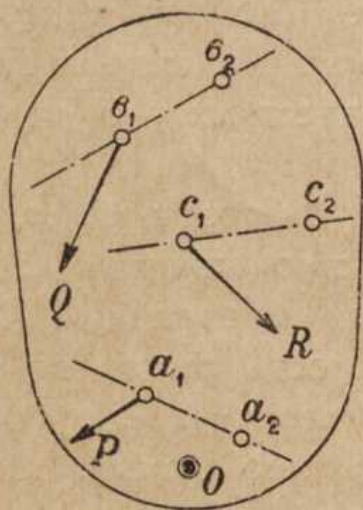
1) В неизменяемой фигуре даны постоянные точки приложения сил $A, B, C, \dots, K$ и некоторые движущиеся равномерно, хотя и с произвольными скоростями, по прямым линиям точки $a, b, c, \dots, k$. Если при двух положениях последних сумма моментов каждой силы относительно соответствующей ей точки равна нулю, то эта сумма останется равна нулю и при всех остальных положениях движущихся точек.

2) На неизменяемую фигуру действует несколько пар сил $\pm P_1, \pm Q_1, \pm R$ (фиг. 52), причем в каждой паре одна сила остается неподвижной, а другая движется с произвольной, но постоянной скоростью по некоторой прямой (сила — P — по прямой aa , сила — Q — по прямой bb , — R — по прямой cc). Такая подвижная система сил обладает следующим свойством: если при двух ее положениях сумма моментов всех пар равна нулю, то и при всех остальных положениях она будет равна нулю. Эта теорема есть прямой вывод из предыдущей; обе они выражают свойство неполярного плана скоростей.

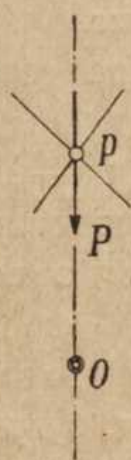


Фиг. 52.

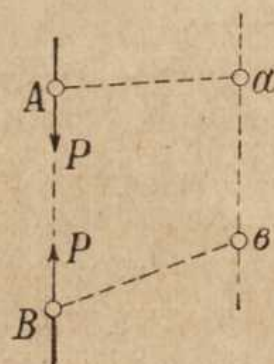
3) На неизменяемую фигуру, могущую вращаться около неподвижной точки O (фиг. 53), действует система сил $P, Q, R, \dots$, данных по



Фиг. 53.



Фиг. 54.



Фиг. 55.

величине и направлению; точки приложения этих сил $a, b, c, \dots$ движутся равномерно, с произвольными скоростями по прямым линиям. Если при двух положениях этой движущейся системы сил фигура остается в равновесии, то она останется в таком же состоянии и при всяком положении системы сил. Эта теорема представляет собою перефразировку свойства полярного плана скоростей.

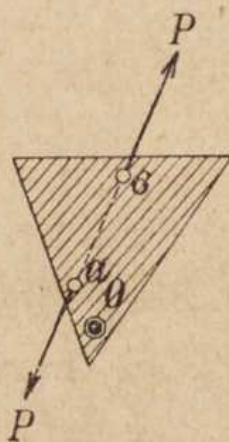
Все три теоремы нетрудно вывести также непосредственно.

50. Вернемся теперь к решению задач при помощи планов скоростей. Начнем с задачи № 1 о нахождении силы, которая одна, без всяких других сил, может уравновеситься на данной цепи. На неполярном плане скоростей эта сила должна всегда проходить через изображение своей точки приложения, следовательно, по нормальному лучу. На полярном плане она всегда должна проходить через полюс O плана (фиг. 54), следовательно, изображение точки приложения силы должно двигаться по прямой, которая проходит через точку O . Но так как все прямые проходят через нулевое изображение P , то решение задачи таково: искомая сила должна изобразиться на полярном плане скоростей в виде прямой, про-

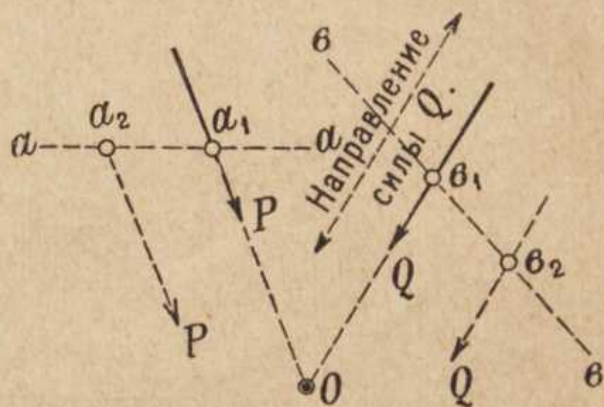
ходящей через нулевое изображение звена и через полюс. Эта прямая, как мы знаем, есть изображение нормального луча.

51. *Задача № 3* об условиях взаимной уравновешенности двух равных и противоположных сил, направленных по одной прямой и приложенных к двум звеньям цепи, решается следующим образом: на неполярном плане скоростей необходимо, чтобы изображения точек A и B (фиг. 55) перемещались по одной и той же прямой $ab \parallel AB$. Действительно, только в этом случае сумма моментов обеих сил относительно изображений их точек приложения всегда будет равна нулю. При этом условии, как легко видеть, линия ab при всевозможных перемещениях цепи будет служить одновременно изображением прямой AB как одного, так и другого звена. Но мы доказали в п. 20, что в таком случае прямая AB служит нормальным лучом 12. На полярном плане при этом обе силы P изобразятся на одной прямой (фиг. 56), т. е. прямая AB , принадлежащая обоим звеньям, изобразится опять таки одною прямою ab . Это опять доказывает, что линия AB служит нормальным лучом 12.

52. *Задачи №№ 4 и 5* проще всего решаются на планах скоростей при помощи двух совместных уравнений моментов для двух возможных перемещений цепи. На этих решениях мы останавливаться не будем.



Фиг. 56.



Фиг. 57.

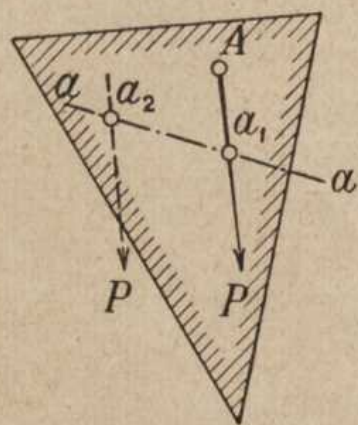
53. *Задача № 6.* О взаимном уравновешивании двух сил— P и Q , из которых первая приложена к звену 1 и дана целиком, а вторая приложена к звену 2 и дана лишь по направлению, может быть решена на планах скоростей общим способом, т. е. при помощи составления уравнения работ для двух произвольных перемещений. При этом получится совместная система двух уравнений с двумя неизвестными. Покажем, как получить уравнения, содержащие лишь по одному неизвестному.

На полярном плане поступим следующим образом (фиг. 57): пусть aa есть линия, по которой перемещается изображение точки A приложения силы P . Берем точку a так, чтобы сила P прошла через полюс O ; из этой же точки проводим $Ob_1 \parallel Q$; точка приложения силы Q , очевидно, должна изобразиться на линии Ob_1 . Берем на этой прямой произвольную точку b_1 , строим линию bb , по которой перемещается это изображение. После этого переносим силу P в другое положение, которому соответствует, например, точка a_2 , и находим соответствующее положение точки b_2 . Остается приравнять нулю сумму моментов силы P (в точке a_2) и силы Q (в точке b_2) относительно полюса O .

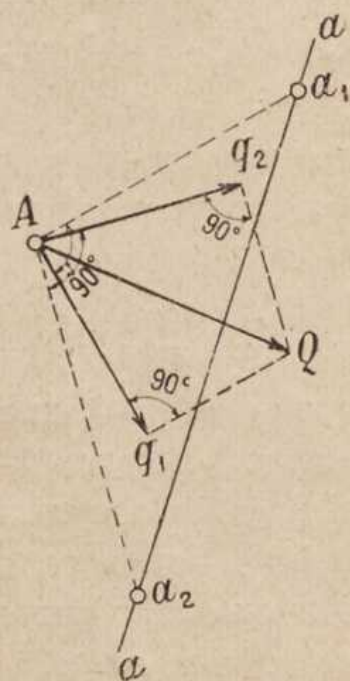
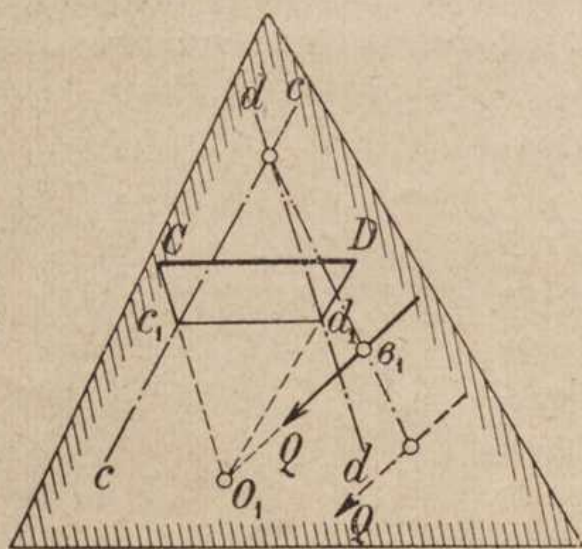
На неполярном плане (фиг. 58) изображение точки A движется по некоторой прямой aa . Принимаем точку a_1 пересечения силы P с прямою aa

за изображение точки A ; тогда и сила Q должна пройти через изображение своей точки приложения. Берем изображения c_1, d_1 двух произвольных точек C и D второго звена; на пересечении прямых Cc_1 и Dd_1 находим мгновенный центр вращения O_1 этого звена и приводим $Ob_1 \parallel Q$. Любая точка b_1 на прямой Ob_1 может быть принята за изображение точки B приложения силы Q . Затем берем любое изображение a_2 точки A и соответствующее изображение b_2 точки B и составляем уравнение моментов сил P и Q относительно этих точек. Таким способом найдется величина силы Q .

Ограничимся упоминанием о следующем видоизменении этой задачи: требуется найти силу Q по данной точке приложения последней, причем неизвестными являются ее величина и направление. Эта задача—проще предыдущей и решается аналогично ей.



Фиг. 58.



Фиг. 59.

54. Задача № 7. Уравновесить данную систему сил при помощи одной силы Q , приложенной к определенному звену и заданной либо по своему направлению, либо по точке приложения A .

Эту задачу можно решить следующим образом: перенести все данные внешние силы на упомянутое звено, пользуясь решением задачи № 6. После того как это будет сделано, их можно заменить равнодействующей по правилам обыкновенной статики. Тогда задача сведется к взаимному уравновешению на данном звене двух сил, из которых одна известна вполне, а другая—лишь по точке приложения или по направлению; иными словами, получится задача № 1.

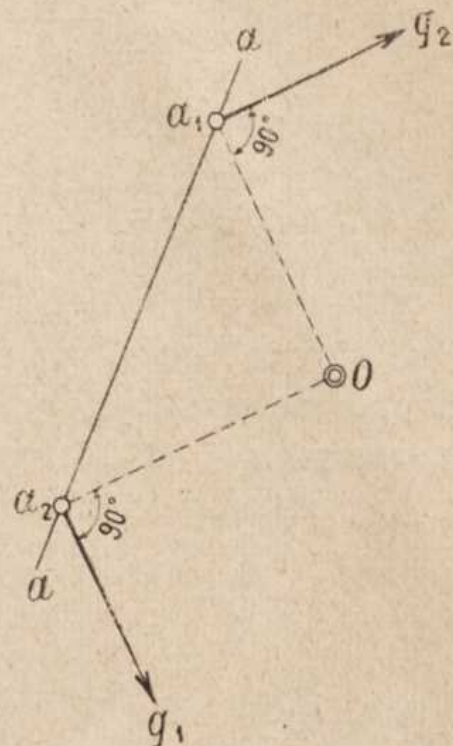
Быстрее решится задача, если мы будем рассматривать два произвольных возможных перемещения цепи. Пусть дана точка приложения A силы Q . На неполярном плане (фиг. 59) берем случайное изображение a_1 точки A , находим соответствующие изображения точек приложения остальных сил (они не показаны на чертеже) и составляем моменты всех сил относительно этих изображений. Пусть сумма этих моментов будет M_1 . Разлагаем силу Q на составляющие по линии Aa_1 и по перпендикулярному направлению. Тогда

$$q_1 \cdot Aa_1 + M_1 = 0,$$

откуда найдется слагающая q_1 . Аналогичным образом для второго возможного перемещения находим слагающую q_2 , а затем, по двум проекциям q_1 и q_2 , находим и силу Q , как показано на чертеже.

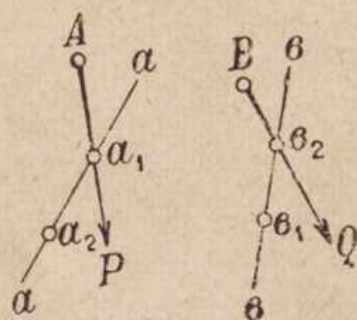
На полярном плане (фиг. 60) задача решается аналогичным путем. Взяв изображение a_1 , разложив силу Q на направления a_1O и перпендикулярное к нему, находим из уравнения моментов величину q_1 . Таким же способом находим проекцию q_2 , а затем по двум проекциям — и самую силу Q .

Если сила Q дана не по точке своего приложения, а по направлению, то решение видоизменяется следующим образом. Сначала находим силу Q_1 , по величине и направлению, задавшись произвольной точкой приложения A . После этого нужно приложить к звену дополнительную силу Q' , линия действия которой совпадает с нормальным лучом; эту операцию нетрудно произвести на плане скоростей. Величина дополнительной силы берется такая, чтобы равнодействующая сил Q и Q' имела требуемое направление.



Фиг. 60.

55. *Задача № 8.* Уравновесить данную нагрузку двумя силами P и Q , приложенными к данным звеньям и неизвестными лишь по величине — решается следующим образом: на неполярном плане скоростей (фиг. 61) отмечаем точку a_1 (пересечение линии aa с силой P) и b_2 пересечение линии bb с силой Q), затем находим соответственно точки a_2, b_1 . Если мы напишем уравнение



Фиг. 61.

моментов для перемещения, в котором точке A соответствует изображение a_1 , то найдем силу Q ; взяв затем перемещение, в котором точка B изображается в b_2 , найдем силу P . На полярном плане нужно взять те два перемещения, при которых изображение одной или другой силы проходит через полюс. Нетрудно решить задачу и в том случае, когда сила $P \parallel aa$ или $Q \parallel bb$.

Мы опустим задачу № 9, так как решение таковой не вызывает затруднений. Вместо этого мы решим несколько новых задач.

56. *Задача № 10.* Требуется уравновесить данную нагрузку цепи при помощи четырех сил: $\pm x_1, \pm x_2$, которые попарно равны, противоположны и направлены по одной прямой. Не трудно, конечно, решить эту задачу при помощи совместной системы двух уравнений, основанных на рассмотрении каких угодно двух возможных перемещений. Покажем, как определить каждую из этих сил независимо от другой.

На неполярном плане (фиг. 62) даны взаимно-соответствующие изображения a_1, b_1, c_1, d_1 и a_2, b_2, c_2, d_2 точек приложения сил. Найдем

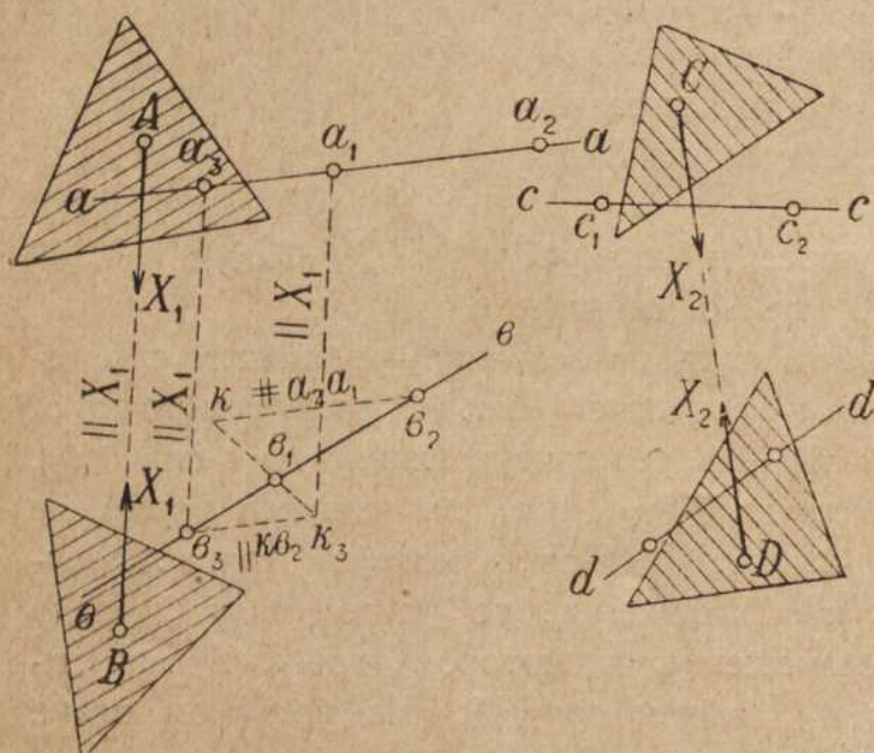
такое перемещение, при котором изображения a_3, b_3 расположатся на прямой $a_3b_3 \parallel X_1$. Для этого используем подобие точек $a_1a_2a_3$ и $b_1b_2b_3$. Из подобия имеем $\overline{a_3a_1} = m \cdot \overline{a_2a_1}$; $\overline{b_3b_1} = m \cdot \overline{b_2b_1}$, где m — некоторый коэффициент пропорциональности. Из точки b_2 проведем $b_2k \parallel a_2a_1$. Из чертежа имеем

$$\begin{aligned}\overline{a_2b_2} &= \overline{a_2a_1} + \overline{a_1b_1} + \overline{b_1b_2} = \overline{a_1b_1} + (\overline{b_1b_2} + \overline{a_2a_1}) = \\ &= \overline{a_1b_1} + (\overline{b_1b_2} + \overline{b_2k}) = \overline{a_1b_1} + \overline{b_1k} = \overline{a_1k}.\end{aligned}$$

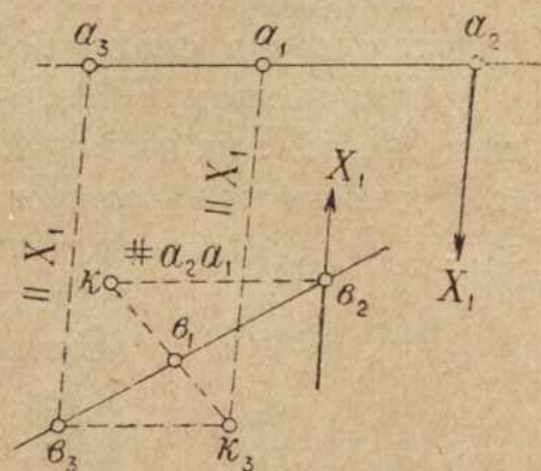
Для случайных изображений a_3, b_3 имеем:

$$\begin{aligned}\overline{a_3b_3} &= \overline{a_1b_1} + (\overline{b_1b_3} + \overline{a_3a_1}) = \overline{a_1b_1} + m (\overline{b_1b_2} + \overline{a_2a_1}) = \\ &= \overline{a_1b_1} + m \cdot \overline{b_1k} = \overline{a_1k_3}.\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что геометрическое место точек k_3 есть прямая kb_1 . Чтобы решить задачу, необходимо расположить точку k_3 так, чтобы получить $a_1k_3 \parallel X_1$. Поэтому продолжаем прямую b_1k , проводим $a_1k_3 \parallel X_1$ до пересечения с линией b_1k , затем $k_3b_3 \parallel b_2k$ до пересечения с линией bb_1 ; наконец, прямую $b_3a_3 \parallel X_1$ до пересечения с прямой aa_1 . При таком расположении изображений a_3, b_3 сумма моментов двух сил X_1 от-



Фиг. 62.



Фиг. 63.

носителем этих точек будет равна нулю. Найдя соответствующие изображения c_3, d_3 точек C и D , получим для определения X_2 одно уравнение с одним неизвестным. Дальнейшее решение не нуждается в пояснении.

На полярном плане (фиг. 63) также найдем такое положение точек a_3, b_3 , при котором $a_3b_3 \parallel X_1$. Ход действий остается такой же, как на неполярном плане (обозначения на фиг. 63 — те же, что на фиг. 62).

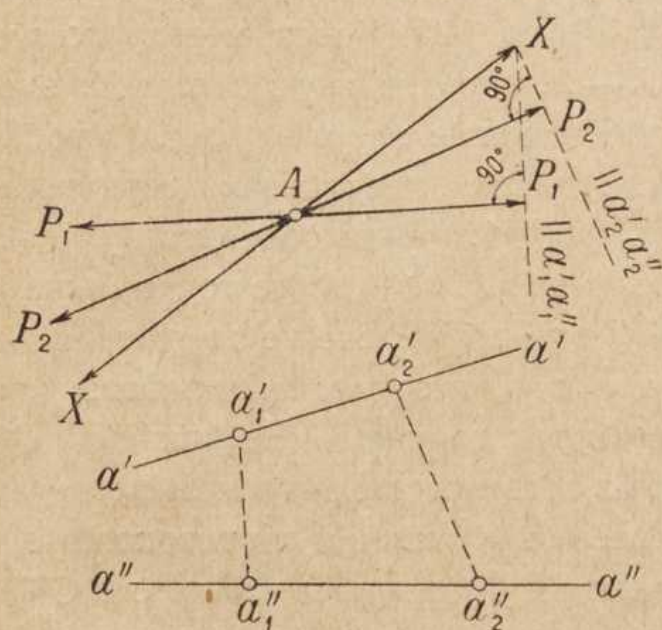
57. Задача № 11. В двух совпадающих друг с другом точках каких-либо двух звеньев (точка A звеньев 1 и 2 на фиг. 64) требуется приложить две равно-противоположные силы X , которые должны уравновесить данную нагрузку цепи. Требуется определить направление и величину сил X . Такая задача может возникнуть при определении взаимодействия двух звеньев шарнирной неизменяемой фигуры в каком-либо шарнире A ;

разъединив звенья, мы получим двукратно-изменяемую цепь, которая находится в равновесии под действием данной нагрузки и двух сил X , заменяющих шарнирную связь между звеньями.

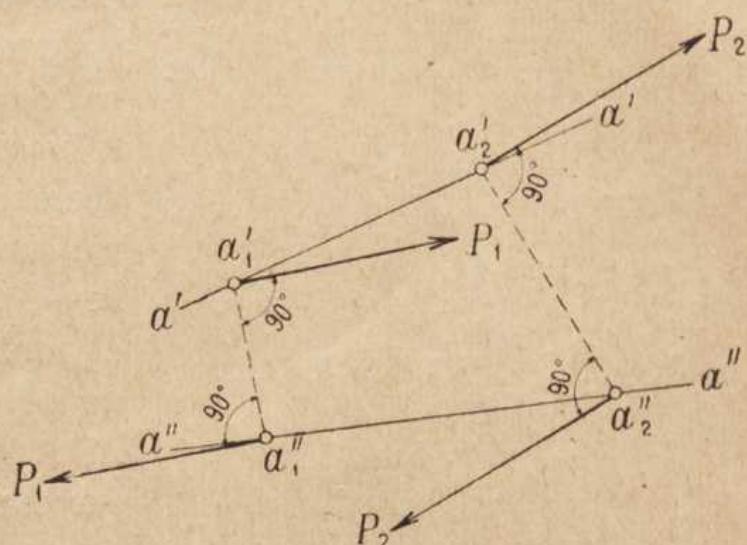
На неполярном плане (фиг. 64) берем сначала произвольное изображение a'_1 , точки A звена 1 и соответствующее тому же возможному перемещению изображение a''_1 той же точки звена 2. Разложив искомые силы X на направления, параллельное и перпендикулярное к $a'_1 a''_1$, найдем

$$M = P_1 \cdot a'_1 a''_1,$$

где M — сумма моментов всех внешних сил относительно изображений их точек приложения. Из этого уравнения определится проекция P_1 . Аналогичным путем можно определить проекцию P_2 , перпендикулярную к какому-либо направлению $a'_2 a''_2$. По этим двум проекциям, как показано на чертеже, найдется величина и направление сил X .



Фиг. 64.



Фиг. 65.

Полярный план скоростей разрешает эту задачу несколько иначе (фиг. 65). Берем опять изображения $a'_1 a''_1$ и разлагаем приложенные в этих точках равные и противоположные силы X по направлению $a'_1 a''_1$ и по перпендикулярному к нему. Так как первые две слагающие в сумме дают относительно полюса O момент, равный нулю, то остается пара (P_1, P_1) , которая должна уравновесить всю нагрузку, перенесенную на план скоростей. Отсюда найдем эту пару. Таким же путем найдем пару (P_2, P_2) , силы которой перпендикулярны прямой $a'_2 a''_2$. По двум проекциям, P_1 и P_2 , найдется и самая сила X .

58. Задача № 12 — аналогичная задаче № 11, но с тем отличием, что силы X известны по направлению; требуется найти их линию действия и величину. Такая задача может возникнуть при определении взаимодействия двух звеньев, которые принадлежат неизменяемой фигуре и образуют друг с другом поступательную пару. Если освободить эти два звена от их взаимной связи, то последнюю придется заменить такими двумя силами X .

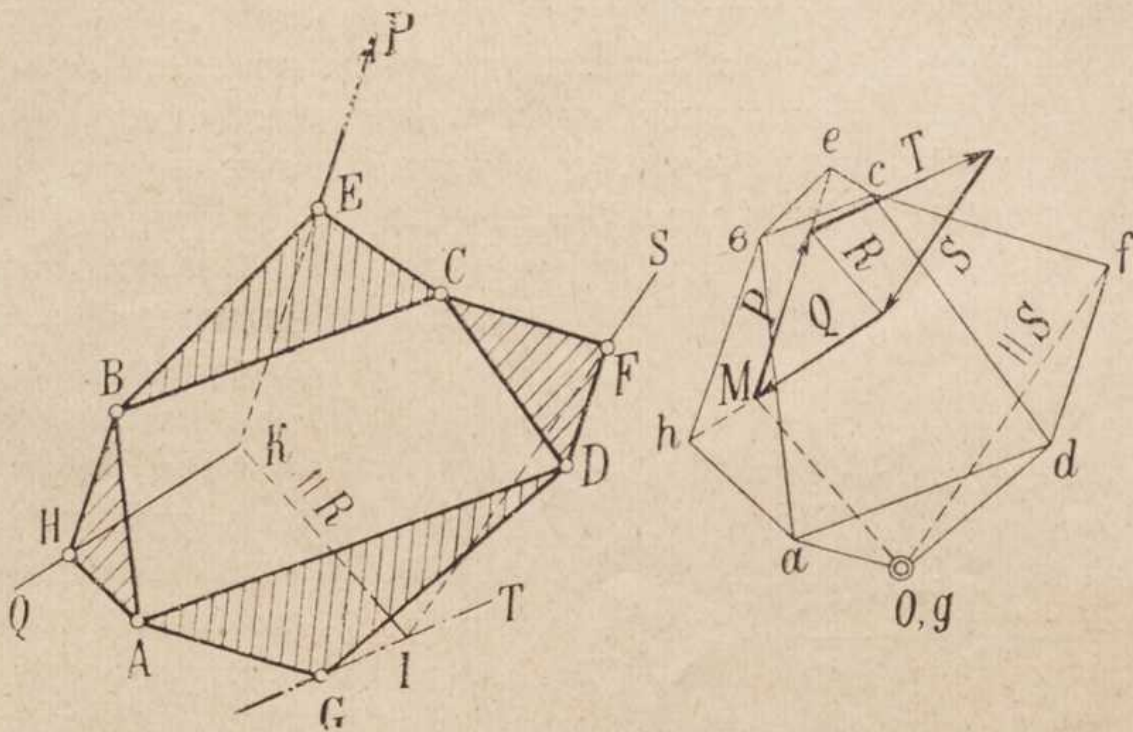
Задача эта легко решается на полярном плане скоростей (фиг. 66). Найдем также возможное перемещение, при котором внешние силы, пере-

что в каждом из n механизмов будет встречаться только одна неизвестная. В других случаях, при невыгодном расположении неизвестных, может получиться совместная система уравнений.

В виду того, что в предыдущем изложении уделено достаточно места вопросу о многократно-изменяемых цепях, мы ограничимся здесь простым примером.

61. Найдем равновесие свободной четырехзвенной шарнирной цепи, показанной на фиг. 67. Сила P дана целиком, для сил Q и S известны линии действия, а для силы T —только точка приложения G . Таким образом, в задаче имеется 4 неизвестных, т.-е. столько же, сколько степеней свободы.

В качестве первого возможного перемещения примем следующее: сделаем точку G неподвижной, а точке T сообщим скорость, направленную перпендикулярно к силе S ; в результате получится система с одной



Фиг. 67.

степенью свободы. На фиг. 67 справа построен полярный план скоростей для такой цепи. В треугольнике gad , подобном $\triangle GAD$, точка g принята за полюс O , затем на пересечении прямых af и $Of (\parallel S)$ найдена точка f . Построение изображений всех остальных точек не нуждается в пояснении. Снеся силы P и Q в точки e, h , мы должны дать последней такое значение, чтобы равнодействующая R этих двух сил прошла через полюс O ; таким образом получается направление MO силы R . После этого из силового треугольника PQR сейчас же получаем величину силы Q .

В качестве второго перемещения примем любое перемещение, при котором вся цепь остается неизменяемой, т. е. движется, как одно звено. На фиг. 67 заменим силы P и Q их равнодействующую R , проходящую через их общую точку K . Продолжаем силу R до пересечения с S в точке J и, таким образом, находим линию действия GJ силы T . Построение заканчиваем на полярном плане: на стороне R строим тре-

угольник со сторонами, параллельными T и S . Таким образом получаем силовой многоугольник $QPTS$, который и является решением задачи.

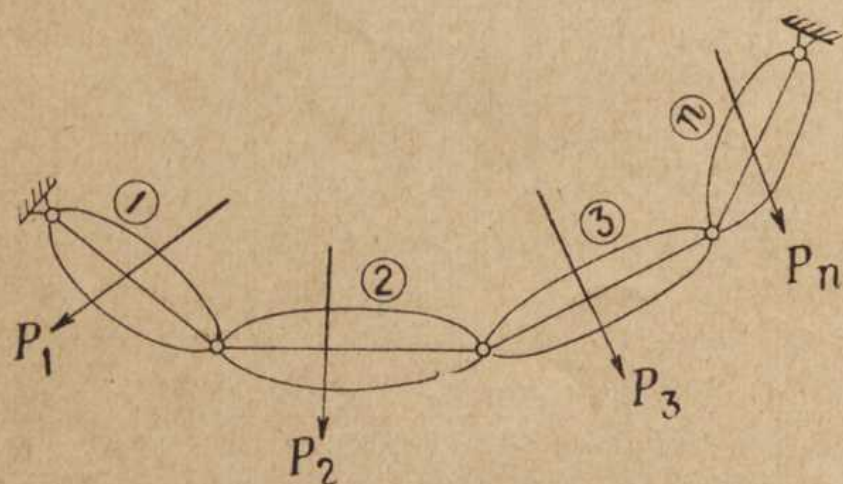
Для оценки метода полезно сравнить это решение с тем, которое дано в книге Виттенбауэра: «*Graph. Dynamik*»¹⁾.

Более общая задача—о шарнирном кольце с любым числом сторон рассмотрена ниже, в вопросе о равновесии *дискового многоугольника*, а также *опорного кольца* пространственной фермы.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Некоторые применения графической статики кинематических цепей к задачам строительной механики.

Общая задача о равновесии дискового многоугольника и ее частные случаи. 62. Веревочный многоугольник, нашедший себе неисчерпаемое применение в строительной механике, в обычном своем виде является многократно-изменяемой шарнирной кинематической цепью с двухчленными звеньями и нагрузкой, приложенною исключительно в шарнирах. Веревочный многоугольник, содержащий n сторон (фиг. 68) имеет, очевидно, степень изменяемости $W = n - 2$.



Фиг. 68.

В таком виде задача о равновесии веревочного многоугольника решается общеизвестным способом Вариньона без всякого видимого применения кинематики. Большая степень изменяемости цепи несколько этому не препятствует. Объясняется это исключительной простотой кинематической структуры такой цепи.

Следует однако иметь в виду, что и обычное решение, как и всякое решение задач механики, является кинематическим. Здесь за возможные перемещения цепи принимаются те, которые получаются, если вырезать каждый из узлов. Движения узлов становятся при этом совершенно независимыми друг от друга, и для того, чтобы сумма работ при всех этих перемещениях была равна нулю, необходимо, чтобы каждый узел в отдельности был в равновесии. Отсюда и получается обычное построение силового многоугольника.

Поразительная приспособляемость веревочного многоугольника к решению вопросов о сложении и разложении сил делает его незаменимым вспомогательным инструментом строительной механики. Тем не менее,

¹⁾ S. 398.

при расчете сооружений встречаются случаи, которые заставляют предъявлять к веревочному многоугольнику повышенные требования и стремиться к некоторым обобщениям последнего. Это бывает, главным образом, тогда, когда сооружение состоит не из одной неизменяемой фигуры, а из нескольких, соединенных между собою вращательными или поступательными парами — например, балки Гербера, многопролетные статически-определимые рамы и т. п.

Обобщением веревочного многоугольника является, конечно, всякая кинематическая цепь с вращательными или поступательными парами и с любой степенью изменяемости. Простейшим же всех возможных обобщений его является *дисковый многоугольник* (фиг. 68—69), который отличается от веревочного лишь тем, что нагрузка в нем может прилагаться к отдельным звеньям не только в шарнирах, а в любом месте ¹⁾.

63. Решим вопрос о равновесии дискового многоугольника. При этом мы не будем ставить условия о том, чтобы соединения звеньев были исключительно *шарнирными*. В этом нет никакой надобности, так как замена шарнира поступательной парой несколько не изменяет способа решения задачи: соединение двух звеньев поступательной парой есть ни что иное, как задание шарнира, расположенного в бесконечности по определенному направлению.

На фиг. 69, а) изображен шарнирный дисковый n -угольник, состоящий из n подвижных дисков и одного неподвижного. На каждый диск действует некоторая сила. Для того, чтобы задача имела определенное решение, необходимо, чтобы внешняя нагрузка (не считая опорных реакций), содержала $n - 2$ неизвестных.

Внешняя нагрузка каждого отдельного звена может быть заменена своей равнодействующей, которая определяется по законам статики неизменяемой фигуры. Таким образом, каждое звено можно считать нагруженным одною сосредоточенною силою (или парой сил).

Пусть две силы, приложенные к двум определенным звеньям цепи, известны целиком, а для остальных $n - 2$ даны линии действия. Требуется определить величины этих сил. Мы найдем их, рассматривая последовательно условия равновесия $n - 2$ простейших механизмов.

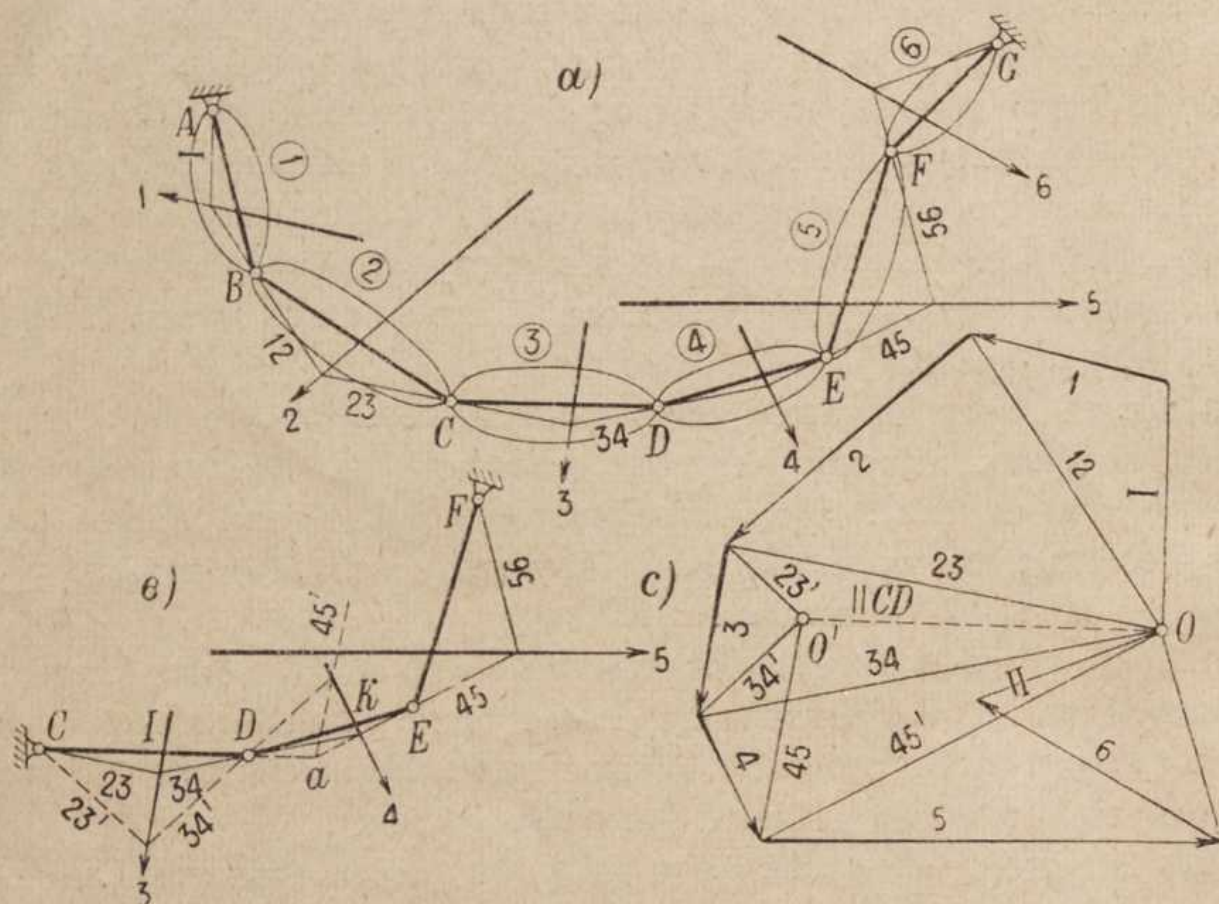
Рассмотрим сначала случай, когда две данные силы приложены к двум *смежным* звеньям; пусть это будут силы 3 и 4, приложенные к звеньям с теми же номерами. Закрепим точки C и F и будем рассматривать равновесие механизма $CDEF$. Он находится под влиянием только трех внешних сил 3, 4 и 5, из которых последняя известна лишь по своей линии действия. Для ясности мы изобразили этот механизм отдельно на фиг. б).

Мы могли бы найти силу 5, произведя одно из трех построений, указанных выше: либо привести силы 3 и 4 к звену EF и найти силу 5 из

¹⁾ Особый вид веревочного многоугольника, именно многопоясный веревочный многоугольник, исследован в статье автора «К теории вантовых ферм», «Техника и Экономика Путей Сообщений», 1924. №№ 1—4.

того условия, что равнодействующая последней и двух приведенных сил должна пройти через точку F , либо построить полярный или неполярный план скоростей. После этого следовало перейти к цепи $DEFG$ и закрепить в ней точки D, G . Тогда мы снова получили бы такие же условия задачи, как в рассмотренном механизме, и поэтому определили бы силу 6. Точно так же сила 2 определилась бы из механизма $BCDE$ с закрепленными точками B и E , и т. д. Такой способ решения задачи весьма прост. Неудобство его, весьма небольшое, заключается в том, что для каждого нового механизма надо наново приводить две силы или наново строить изображения двух шарнирных точек.

64. Применим другой способ решения задачи. Найдем силу 5 в механизме $CDEF$ таким образом, чтобы для трех сил 3, 4, 5 можно было



Фиг. 69.

построить веревочный многоугольник, проходящий через все 4 шарнира этого механизма. (Способ построения указан ниже). Стороны этого многоугольника обозначены на чертеже через 23, 34, 45 и 56. Легко видеть, что при этом каждая сила, приложенная к одному из звеньев, разлагается на две силы, проходящие через шарниры того же звена. В каждом шарнире скапливаются две равные и противоположные силы, которые друг друга уравнивают. Таким образом, стороны веревочного многоугольника выражают собою давления в шарнирах. Вся нагрузка приводится в итоге к двум силам, направленным по сторонам 23 и 56, т. е. проходящим через неподвижные точки C и F , следовательно, — уравновешенным.

Чтобы построить этот веревочный многоугольник, поступаем следующим образом: проводим стороны 23' и 34' через шарниры C и D (фиг. б); на силовом многоугольнике (фиг. с) находим полюс O' , проведя через концы силы 3 лучи, параллельные этим двум сторонам. Затем проводим

у которого звенья 3 и 5, нагруженные данными силами, окажутся *смежными*. Обозначим неподвижное звено механизма $CDEF$ цифрой 7 и построим мгновенные центры вращения 35 и 47; первый лежит на пересечении прямых FC и ED , а второй — на пересечении прямых CD и FE . Заменяв эти мгновенные центры шарнирами M и N , мы получим новый четырехзвенный механизм $CMEN$, показанный на фиг. 70-а). Мы видим, что здесь силы 3 и 5 действуют на два смежных звена. Тем самым мы привели задачу к предыдущей. На фиг. 70-а) и е) произведено построение силы 4, причем в результате получились те же силы 3, 4, и 5, как на фиг. 69 и с).

Этот способ решения задачи — также весьма прост; но ему можно поставить в упрек то, что он пользуется мгновенными центрами вращения, которые не всегда удобно располагаются на чертеже.

66. Укажем другой, более удобный прием, который годится не только для четырехзвенной цепи, но и для дискового многоугольника с любым числом звеньев. Мы воспользуемся известным методом ложного положений в той интерпретации, которой Egerer дал название «метода поправок» (Korrekturverfahren).¹⁾

На фиг. 71 показано это построение. Проведем сначала произвольный веревочный многоугольник со сторонами $23'—34'—45'$, проходящими через шарниры C , D и E (фиг. а). Строим для него силовой многоугольник (фиг. б). Одноименные с названными сторонами лучи определяют данную силу 3 и некоторую (предварительную) величины 4' силы 4. Далее, проводим на силовом многоугольнике данную силу 5, строим соответствующий луч $56'$ и затем на веревочном многоугольнике — параллельную ему сторону 56 . Этим заканчивается построение первого, предварительного веревочного многоугольника.

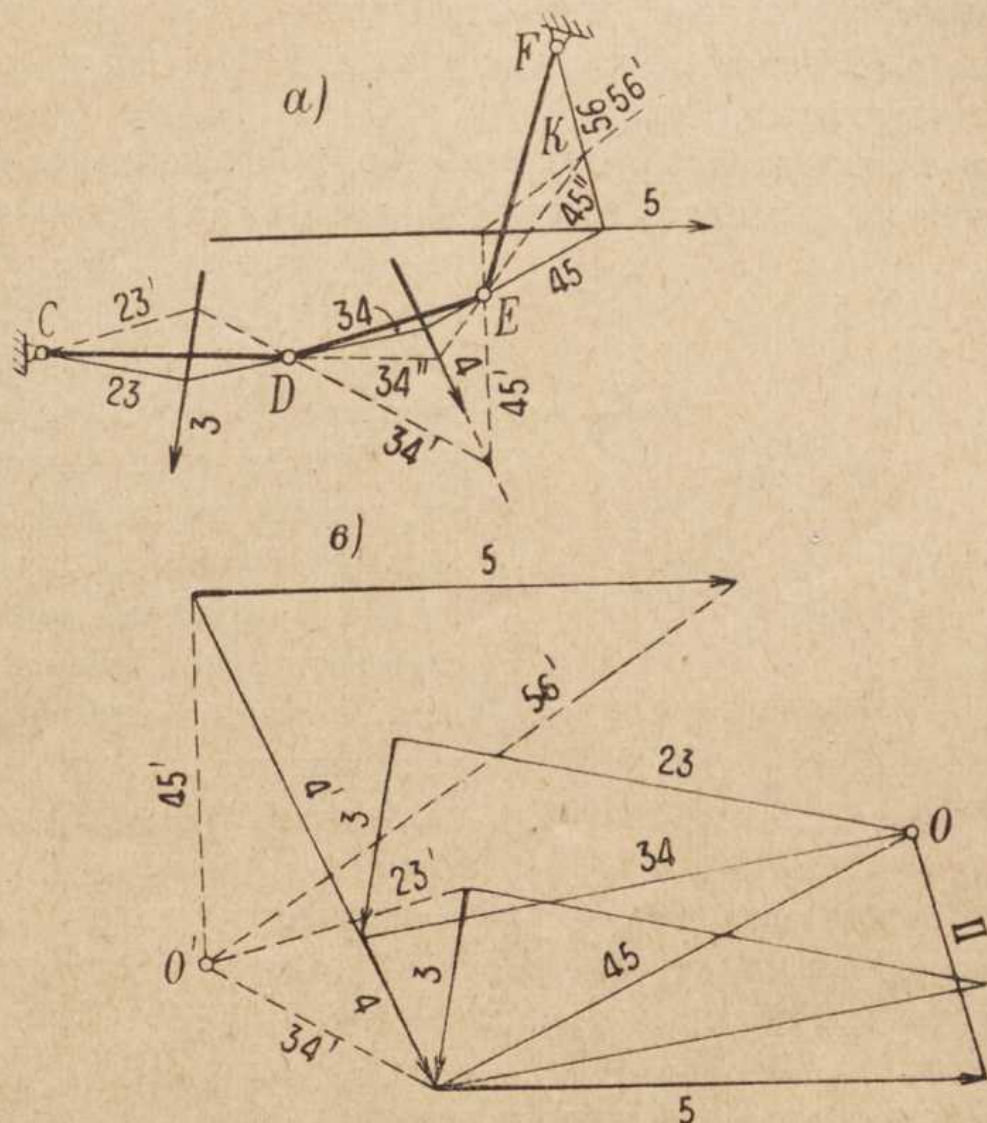
Второй (поправочный) многоугольник нужно построить уже не принимая во внимание сил 3 и 5, а считаясь исключительно с силой, направленной по 4. Первый луч, $34''$ составляет продолжение стороны CD до пересечения с силой 4, а второй, $45''$ проходит через шарнир E .

После этого нетрудно закончить построение. Продолжаем стороны $56'$ и $45''$ до взаимного пересечения в точке K . Эта точка принадлежит искомому, окончательному веревочному многоугольнику. Действительно, первый веревочный многоугольник позволяет заменить всю систему сил двумя, именно силой $23'$, проходящей через неподвижную точку C , и силой $56'$, неуравновешенной ничем; второй заменяет всю систему сил двумя силами, $34''$ и $45''$, из которых первая проходит через ту же неподвижную точку, а вторая — неуравновешена. Равнодействующая не уравновешенных сил $56'$ и $45''$ должна пройти через точку K , а для равновесия всей системы — необходимо и достаточно, чтобы она прошла через неподвижную точку F . Итак, прямая KF служит крайней стороной искомого веревочного многоугольника. Остальные стороны, именно $45-34-23$, проводятся прямо через соответствующие шарниры. Для проверки строится

¹⁾ Н. Egerer: «Neue Methoden der Berechnung ebener und räumlicher Fachwerke», Berlin 1909, § 3, а также «Ingenieur — Mechanik», erster Band 1919, § 66.

силовой многоугольник: его лучи должны быть параллельны сторонам полученного веревочного многоугольника (на фиг. *b* они показаны сплошными линиями), а силы 3 и 5 должны быть равны данным.

67. Перейдем теперь к общему случаю, когда обе данные силы отделены друг от друга интервалом из нескольких звеньев. Пусть, например, даны силы 3 и 6 (фиг. 69). Закрепляем часть *CDEFG* дискового многоугольника и строим для нее два вспомогательных веревочных многоугольника с соответствующими силовыми (построение на чертеже не показано). Первый веревочный многоугольник, $23'—34'—45'—56'—67'$,



Фиг. 71.

проходит через шарниры *C, D, E, F* и соответствует действительным значениям сил 3, 6 и предварительным, «ложным» значениям сил 4, 5. Второй, поправочный многоугольник, $34''—45''—56''$, строится только для сил 4 и 5. Очевидно, что сторона $34''$ должна быть направлена по линии *CD*; остальные две проходят через точки *E* и *F*. Затем точку пересечения крайних сторон многоугольников, т. е. прямых $67'$ и $56''$, соединяем с шарниром *G* и получаем, таким образом сторону 67 окончательного многоугольника — $67—56—45—34—23$.

Продолжение этого многоугольника вправо и влево по всем звеньям цепи через соответствующие шарниры происходит уже непосредственно, без всяких дополнительных операций. Таким образом, независимо от

числа звеньев дискового многоугольника, предварительные построения ограничиваются исключительно той частью его, которая ограничена двумя данными силами. Силовой многоугольник, который может быть построен после получения окончательного веревочного многоугольника, служит для определения всех неизвестных сил и для проверки.

Если какая-либо сторона веревочного многоугольника пройдет через оба шарнира соответствующего диска, то внешняя нагрузка последнего окажется равною нулю.

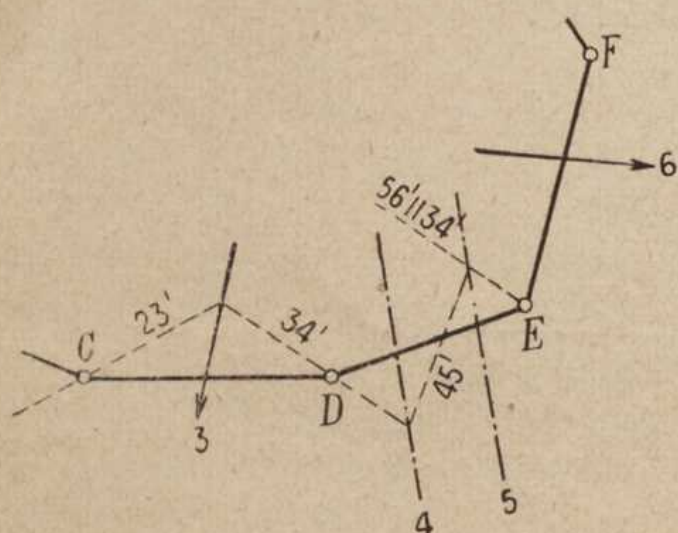
Два соседних диска могут оказаться ненагруженными лишь в том случае, если их три шарнира расположены на одной прямой.

Если некоторые звенья соединены между собою не шарнирами, а поступательными парами, то, как указано было выше, построение нисколько не изменяется.

Отметим в заключение, что замена сил, действующих на звенья, их равнодействующими, как мы это сделали для простоты изложения—нисколько

не обязательна. Ход решения задачи по существу остается тот же и без этой операции, которая должна быть признана излишней.

68. Решение, изложенное нами, годится также для следующего видоизменения задачи: некоторые звенья нагружены, вместо одной сосредоточенной силы, двумя силами данного направления, образующими *пару*. Пусть, например, на звено DE (фиг. 72) должны действовать две силы, 4 и 5 данного



Фиг. 72.

направления. Видоизменение решения заключается только в том, что после проведения через точку D стороны $34'$ сторона $56'$ проводится через следующий шарнир E параллельно первой, т. е. $34' \parallel 56'$. Точно также — $34'' \parallel 56''$ и т. д.

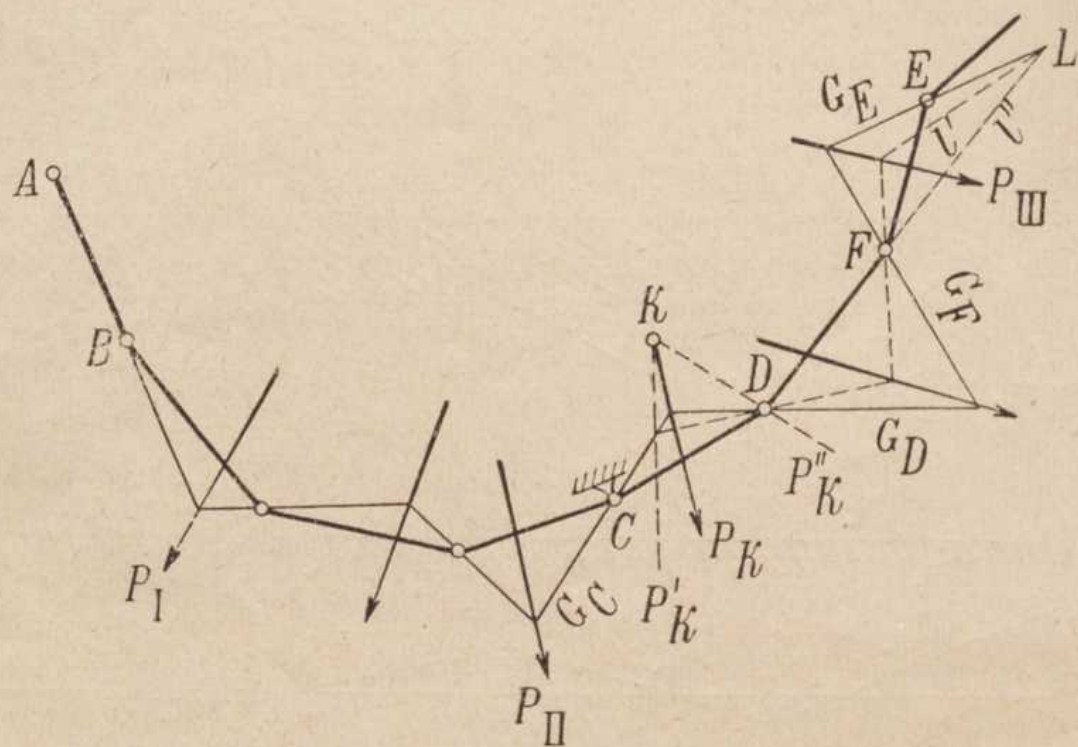
69. Перейдем теперь к другому важному случаю. Из числа n сил, действующих на звенья дискового многоугольника, пусть даны 3 силы целиком, одна сила — только по точке приложения, а остальные $n - 4$ силы — по линиям действия. Таким образом, снова получится $n - 2$ неизвестных. В отличие от предыдущей задачи здесь будет фигурировать в числе неизвестных также *направление* одной из сил!

Для того, чтобы задача была разрешима, необходимо, чтобы сила, направление которой неизвестно, лежала *между* данными тремя силами. Пусть, например, данные силы P_I , P_{II} , P_{III} и точка K искомой силы расположены, как показано на фиг. 73. Согласно нашему способу решения задачи, временно закрепляем точку C и строим веревочный многоугольник для участка AC дискового многоугольника. Он будет вполне определенным.

Потом переходим к участку CE и временно закрепляем в нем точку E . Сила G_C , проходящая через точку C — вполне определена по

величине и линии действия. Пользуясь опять методом поправок, задаемся произвольным направлением P'_K искомой силы, строим веревочный многоугольник (ложный) и находим крайнюю его сторону l' . Потом проводим слагающую P''_K искомой силы через точку D , тогда крайней стороной соответствующего (поправочного) веревочного многоугольника будет прямая l'' , которая сливается с DF . Через точку L пересечения прямых l' и l'' должна пройти крайняя сторона действительного веревочного многоугольника. После этого ведем его обратно до смыкания со стороной G_C и этим определяем искомую силу P_K , которая должна пройти через точку пересечения прямых G_C и $-G_D$. Для проверки решения можно построить силовой многоугольник.

Наконец, от точки E и до конца дискового многоугольника построение идет уже совершенно автоматически и заключается в последовательном проведении сторон веревочного многоугольника через шарниры.



Фиг. 73.

Один из примеров дискового многоугольника показан на фиг. 74 (звенья I, II, III, IV).

70. Отметим в заключение, что рассмотренная здесь теория дискового многоугольника заключает в себе, в частности, решения всех случаев расчета *опорного кольца* пространственной фермы. Нужно лишь иметь в виду, что замкнутый n -угольник содержит n степеней свободы и $n - 3$ степени изменяемости, поэтому число неизвестных элементов нагрузки, включая и опорные реакции, должно быть равно n .

Аналитическое решение задачи для замкнутых шарнирных четырехугольников и пятиугольника дано еще Möbius'ом ¹⁾. Графическое решение для кольца, основанное на проективных свойствах фигур, дано Henneberg'ом ²⁾.

¹⁾ А. F. Möbius: «Lehrbuch der Statik», Zweiter Teil, 1837, S. 75-102.

²⁾ Henneberg: «Graphische Statik der starren Systeme», S. 68-75.

71. Мы рассмотрели способ нахождения усилий

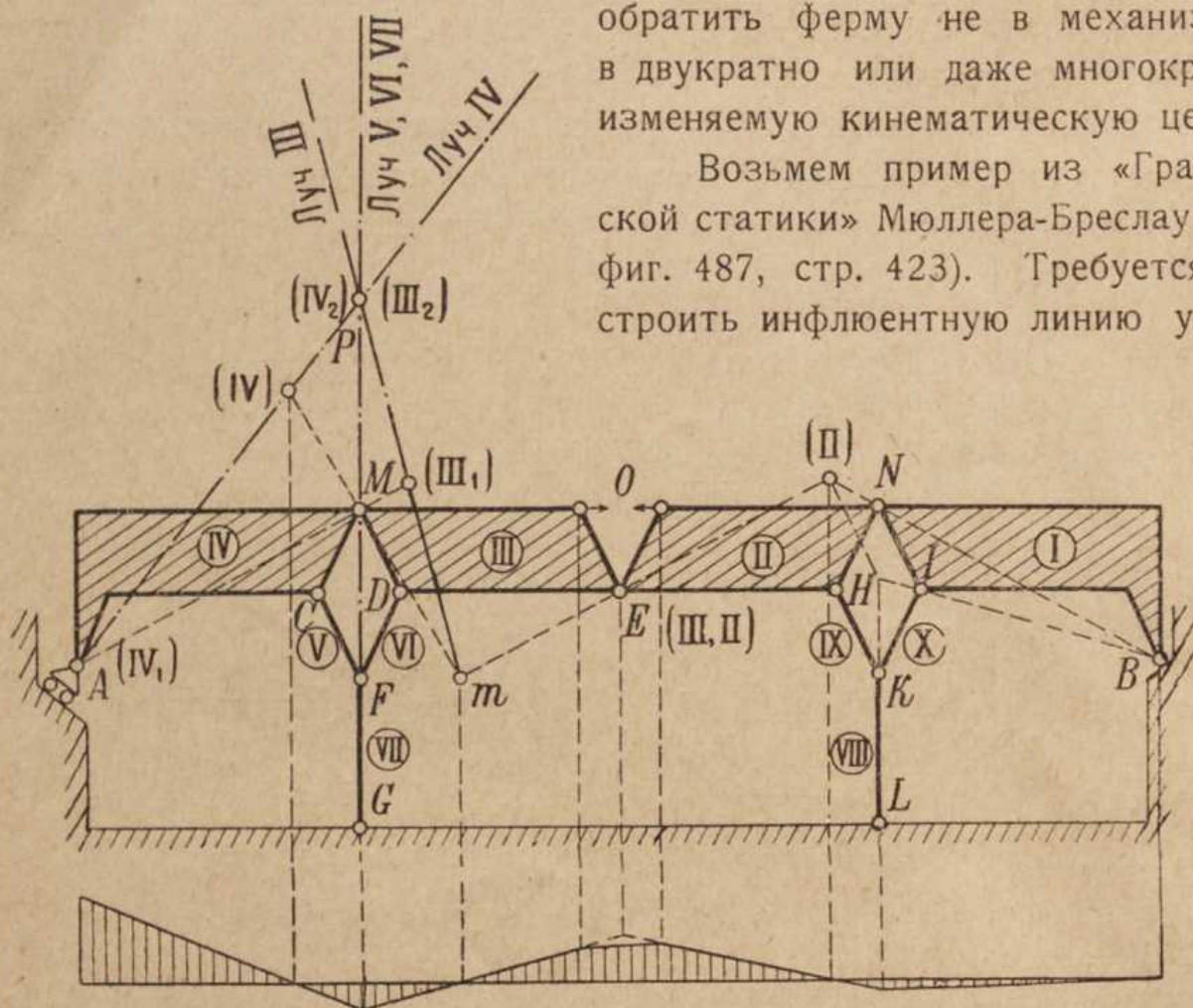
Построение инфлю-
ентных линий уси-
лий в фермах.

в цепи, которая, по заданию, является многократно-
изменяемой. Теперь рассмотрим пример определения
усилий в геометрически - *неизменяемой* ферме при
помощи временного превращения ее в кинематическую цепь.

Этот способ хорошо известен, поэтому упоминание о нем имеет
целью только подчеркнуть одну подробность, которая до сих пор недоста-
точно ясно формулировалось, а может быть, и недостаточно ясно пони-
малась. Мы имеем в виду то, что в некоторых случаях бывает необходимо

обратить ферму не в механизм, а
в двукратно или даже многократно-
изменяемую кинематическую цепь.

Возьмем пример из «Графиче-
ской статики» Мюллера-Бреслау (т. 1,
фиг. 487, стр. 423). Требуется по-
строить инфлюентную линию усилий



Фиг. 74.

в стержне O верхнего пояса (фиг. 74). Для этого нужно удалить стержень O и для полученного механизма построить мгновенные центры вращения звеньев I, II, III, IV относительно неподвижного.

Для звена I мгновенным центром служит точка B ; для звена II — мгновенный центр (II) определяется из простого построения, указанного на чертеже. Дальнейшее построение излагается у Мюллера-Бреслау следующим образом: «придавая полюсу (IV) положения $(IV)_1$ и $(IV)_2$ на нормали к пути скольжения опоры A , мы найдем полюс $(III)_1$, симметрично расположенный относительно полюса (II), и полюс $(III)_2$, совпадающий с полюсом $(IV)_2$. Эти две точки определяют собою прямую, проходящую через полюс (III), в то время как полюс (IV) движется по нормали к пути скольжения опоры A . Но так как полюс (III) должен лежать также и на прямой (II) (III II), то, благодаря этому, вполне определяется место полюса (III), равно как и полюса (IV)».

Рассуждение Мюллера-Бреслау, процитированное здесь, страдает недоговоренностью; если придерживаться его дословно, то мы придем к противоречию. В самом деле, каков смысл выражения: «придавая полюсу (IV) положения (IV) и IV_2 »? В механизме каждый полюс занимает совершенно определенное положение, поэтому произвол в выборе последнего является недопустимым. Если автор, тем не менее, перемещает полюс (IV) в различные положения, то, очевидно, он рассматривает уже не механизм, а цепь с большей степенью изменяемости, о чем, однако, не упоминает. Какая же это цепь? Как у нее расположены опоры, как у нее осуществляется взаимная связь между звеньями, какую роль играет в ней нормаль пути скольжения опоры А — обо всем этом автор умалчивает. У читателя может создаться в результате этого рассуждения ложное представление о сущности предлагаемой операции.

Более точно рассуждение Мюллера-Бреслау должно быть сформулировано следующим образом: *Освободим цепь от одной связи в точке В, оставив здесь лишь один опорный стержень, симметричный по отношению к опорному стержню точки А. Тогда цепь станет двукратно-изменяемой, и мы будем искать в ней нормальный луч звена III относительно неподвижного. Для звена IV в этой двукратно-изменяемой цепи нормальным лучом, очевидно, служит упомянутая нормаль в точке А, поэтому на ней можно задаваться произвольно положениями полюса (IV). Дальнейшее рассуждение — совершенно правильно. Задаемся сначала полюсом (IV) в точке А и находим (III_1) симметрично с точкой (II). В качестве возможного перемещения цепи лучше всего взять следующее: связать точки С и D стержнем. Тогда звенья III и IV превратятся в одно и их полюсы (IV_2) и (III_2) сольются в одну точку, как показано на чертеже. Прямая (III_1) (III_2) есть искомый нормальный луч звена III. После этого *восстанавливаем в точке В удаленную связь*, получаем снова механизм и на пересечении прямых (III_1) (III_2) и E (II) находим окончательно полюс (III).*

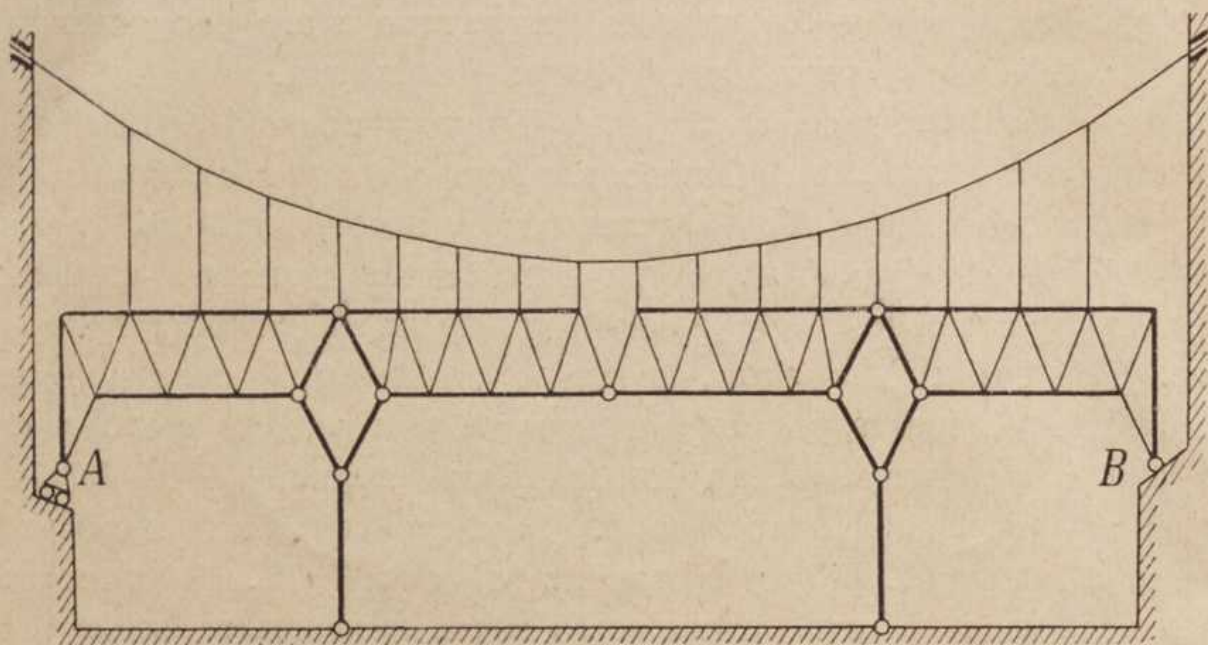
Нормальный луч звена III можно найти также, основываясь на теореме, доказанной в п. 12. Звенья III—IV—V—VI образуют однократно изменяемую цепь, поэтому их нормальные лучи должны пересечься в одной точке. Но нормальным лучом для звена IV служит нормаль к траектории точки А, для звеньев V и VI — очевидно прямая FG; поэтому, нормальный луч звена III должен пройти через точку пересечения (III_2) этих прямых.

Приведенный пример не является исключением; напротив, указанная недоговоренность является общераспространенной и встречается у всех авторов, излагающих кинематический метод.

72. Применение многократно-изменяемых цепей к построению инфлюентных линий — важно не только потому, что этот прием в сложных случаях является незаменимым, так как он превосходит другие методы по своей простоте и общности. Он важен еще при изыскании рациональных типов ферм, при различных преобразованиях последних и при сравнении их вариантов, так как позволяет *быстро строить множество различных инфлюентных линий*.

В статически-определимой неизменяемой системе каждому стержню, основному или опорному, при движении груза по заданному пути, соот-

ветствует одна совершенно определенная инфлюэнтная линия. Но, в дополнение к этому, кинематический метод показывает, что каждая инфлюэнтная линия имеет множественный характер, т. е. соответствует не одному, а множеству различных усилий. Действительно, удалив интересующий нас стержень, мы получаем *механизм*. Но так как прибавление *любой* связи к этому механизму обращает его снова в неизменяемую фигуру, то, отвлекаясь от масштаба, можно сказать, что *диаграмма вертикальных проекций скоростей, построенная для точек пути движущегося груза, служит одновременно инфлюэнтною линиею каждой из бесконечного множества связей, могущих обратить этот механизм в неизменяемую фигуру*.



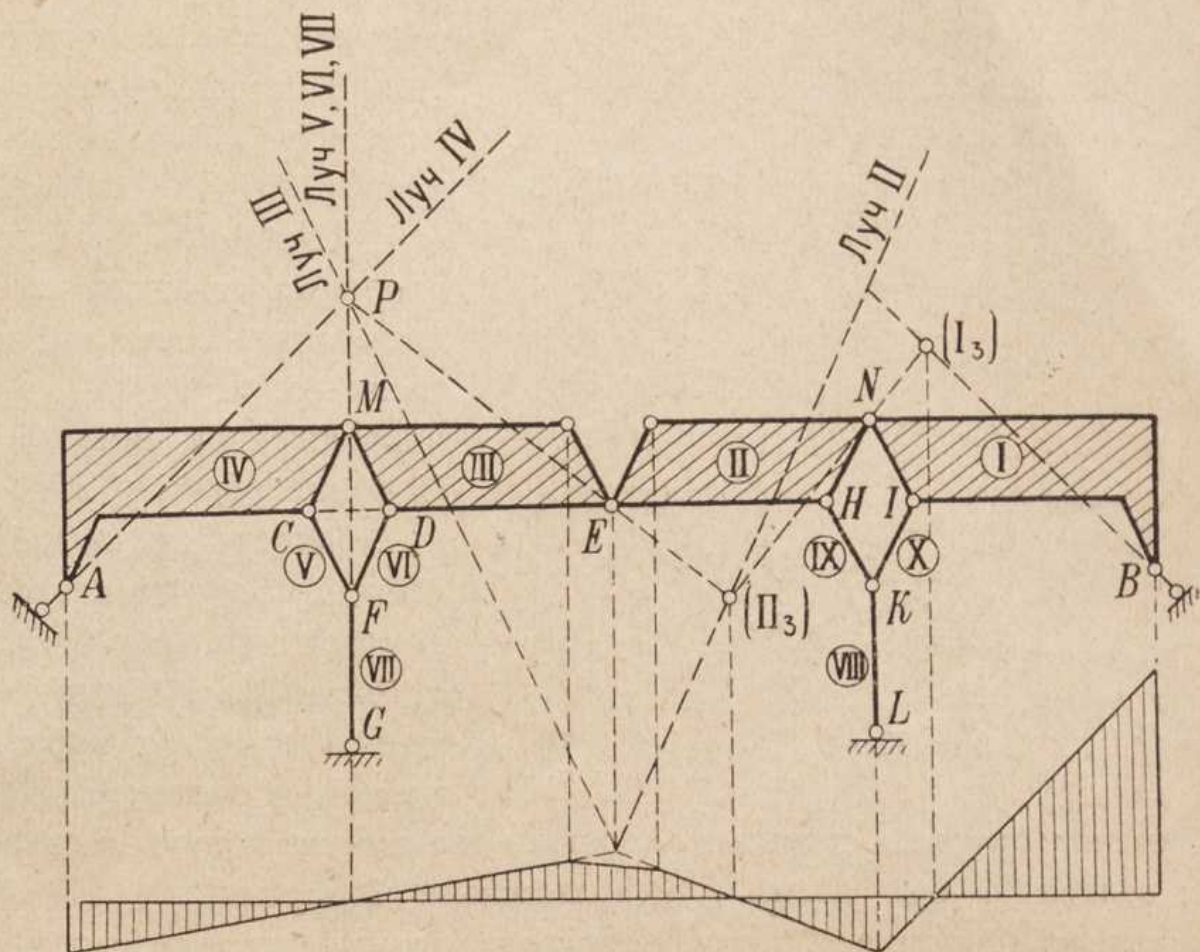
Фиг. 75.

Обращаясь к рассмотренному выше примеру, можем сказать, что одна и та же инфлюэнтная линия соответствует следующим усилиям: 1) в стержне O данной фермы, 2) в любом из следующих стержней, если мы заменим каким-либо из них панель пояса O : а) в стержне CD ; в) стержне HJ ; в) в дополнительной опоре точки E , если мы поместим там один опорный стержень любого направления; г) во втором опорном стержне точки A ; д) в стержне AF , или FK или FE , EK , KB и т. д.; е) в любом элементе цепи и в подвесках при расположении, указанном на фиг. 75. Этими примерами мы далеко не исчерпали всего богатства, заключенного в *одной* инфлюэнтной линии.

Если мы теперь перейдем от цепи однократно-изменяемой к двукратно-изменяемой, то содержание инфлюэнтной линии обогатится, так как вместо ∞^1 , она будет выражать ∞^2 различных усилий.

Вернемся опять к тому же примеру и будем считать, что в точке B имеется только *один* опорный стержень, симметричный с опорным стержнем в точке A . Тогда мы будем иметь двукратно-изменяемую цепь. На фиг. 76 показаны нормальные лучи звеньев III, IV, V, и VII; лучи остальных звеньев расположены симметрично с названными по отношению к средней вертикали. Вводя по одной связи, будем получать различные механизмы и из них—различные инфлюэнтные линии.

Например, сделав неподвижной точку B , получим случай, уже рассмотренный нами. Второй вариант: оставим точку B подвижной (фиг. 76), но введем стержень CD . Тогда мгновенные центры вращения звеньев III, IV, V, VI, сольются в точке P ; мгновенный центр (II_3) звена (II) совпадает с точкою пересечения луча II и прямой PE ; мгновенный центр (I_3) звена I — с точкою пересечения луча I и прямой $N-(II_3)$. Имея эти мгновенные центры вращения, мы, тем самым, получим инфлюентную



Фиг. 76.

линию, показанную на чертеже. Она выражает собою усилия в любой дополнительной связи, которую мы пожелаем бы ввести в полученную однократно-изменяемую цепь.

Третий вариант: оставляя точку B подвижной, подведем под точку B вертикальный опорный стержень. Пользуясь готовыми нормальными лучами, мы без труда сейчас же найдем на них мгновенные центры вращения звеньев I, II, III, IV, следовательно получим еще одну инфлюентную линию для бесконечного множества усилий.

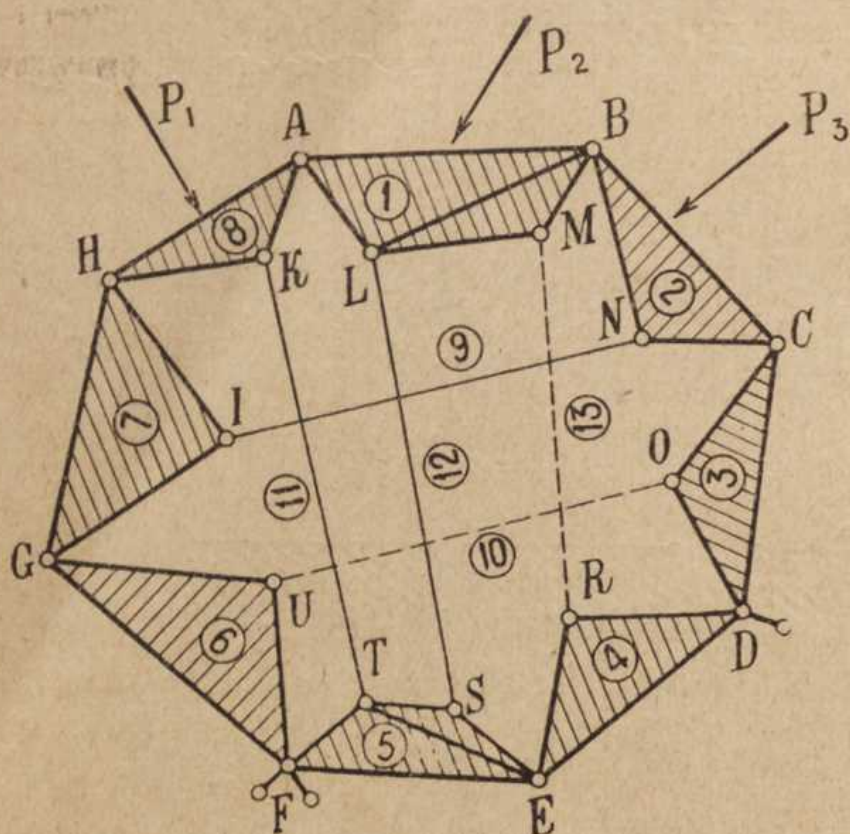
Таким образом, двукратно-изменяемая цепь, для звеньев которой найдены нормальные лучи, является средством для быстрого изучения множества вариантов ферм.

73. Построение инфлюентных линий для сложных ферм при помощи «изображающих точек», т. е. при помощи неполярного или полярного плана скоростей, также приводит нередко к необходимости использовать свойства двукратно-изменяемых цепей.

Важное значение двукратно и многократно-изменяемых цепей, как средство для построения *скоростей* в механизме, пользуется большим

признанием, благодаря упомянутой выше работе Мора, а также работам Мюллера-Бреслау ¹⁾).

В первой главе мы рассмотрели способы построения неполярных и полярных планов скоростей и доказали некоторые теоремы о свойствах таких планов, относящихся к движениям двукратно-изменяемой цепи.



Фиг. 77.

Приведенные там соображения являются достаточными для уяснения методов построения изображающих точек для весьма сложных кинематических цепей. Поэтому мы ограничимся здесь одним примером.

Требуется при помощи изображающих точек определить усилия в стержнях статически - определимой фермы, изображенной на фиг. 77. Опорные реакции в точках F и D определяются обычным способом; для определения же внутренних усилий удаляем стержни 10 и 13 и этим обращаем ферму в двукратно-изменяемую систему.

Заменив опорные стержни опорными реакциями, получаем свободную цепь и делаем в ней звено 4 неподвижным. Задаемся на прямой DC изображением C' точки C и рассматриваем два возможных перемещения цепи. Для этого проведем прямую $C'N' \parallel CN$ и назначаем на ней произвольную точку N' — одно из возможных изображений точки N . Затем простым проведением параллелей к линиям основной фигуры, находим изображения всех точек в следующем порядке: $C' O' N' B' M' R' L' A' S' E' T' F' K' H' J' G' U'$. Такое же построение производим вторично, взяв на линии $C'N'$ новое изображение N'' , и получаем точки C', O', N', B' и т. д. вплоть, до точки U'' (все эти точки на чертеже не показаны). На основании теоремы, доказанной в п. 15, можно утверждать, что при всех остальных возможных перемещениях, изображение точки U будет лежать на прямой $U'U''$. После этого вернем стержень 10 на его место. Тогда получим механизм, в котором изображение U''' точки U должно лежать на прямой $U'''O'$, где $U'''O' \parallel UO$. Пересечение прямых $U'U''$ и $O'U'''$ и будет искомым изображением точки U . Имея же изображение двух точек механизма именно U''' и O' , нетрудно построить изображение всех остальных точек.

После того, как изображение этого механизма, представляющего собою данную ферму без стержня MR , будет построено, искомое усилие

¹⁾ Т. I, 1908, стр. 401—404.

в стержне 13 определится из условия равенства нулю моментов всех сил относительно соответствующих изображающих точек. Иными словами, это усилие определится из *одного* уравнения. Применяя же любое из построений, указанных в пп. 32 и 33, мы найдем искомую силу 13 чисто графическим путем.

Однако и после этого задача все еще остается с точки зрения обычных методов достаточно сложной. Применяя же кинематический метод, мы снова обращаемся к изученной двукратно-изменяемой цепи. Вводим стержень 13 (стержень 10 отсутствует). Теперь необходимо найти на прямых $M'M''$ и $R'R''$, по которым движутся изображения точек M и R , такое положение изображения M''' , R''' , при котором $M'''R''' \parallel MR$. Эта задача решена выше (задача № 10). Достигнув этого, мы сможем найти усилие, заменяющее стержень 10. Наконец, имея усилия 13 и 10, мы определим усилия во всех остальных стержнях из диаграммы Кремона.

Мы рассмотрели здесь построение *неполярного* плана скоростей. Этим мы и ограничимся, так как *полярный* план строится совершенно в такой же последовательности.

74. Изложенное здесь кинематическое решение, опирающееся на свойства двукратно-изменяемой цепи, интересно сравнить с методом замены стержней по Геннебергу и Мюллеру-Бреслау.

Первое и существенное отличие между ними заключается в том, что кинематический метод является более общим, чем метод замены стержней. В свете кинематического метода введение двух заменяющих стержней равносильно следующей операции: цепи дается такое перемещение, при котором расстояние между концами заменяющих стержней, остается без изменения. Между тем при кинематическом решении нет надобности сообщать двукратно-изменяемой цепи непременно *такое* перемещение. Как видно из предыдущего примера, перемещение может быть взято произвольным. Этим решение, разумеется, облегчается.

Во-вторых, обычный способ замены стержней требует решения системы совместных уравнений. Часть решения задачи производится графически, другая часть—аналитически. Это отсутствие единства в ходе решения, хотя и не влечет за собою никакого практического неудобства, все же не служит к украшению метода. В поисках чисто графического решения Th. Pöschl недавно пытался ¹⁾ заменить решение совместной системы двух уравнений графическим построением, основанным на теории прямолинейно-ограниченного пучка сил. Однако, данное им решение далеко не является общим. Задачи, которые решаются при помощи двух замен стержней, не всегда могут быть приведены к случаю, рассмотренному Pöschl'ем ²⁾.

¹⁾ Theodor Pöschl: «Zur graphischen Statik zusammengesetzter Fachwerke», Bauingenieur, 1924, H. 12, а также его «Lehrbuch der Technischen Mechanik», Berlin, 1923.

²⁾ Отметим кстати, что решение Pöschl'a может быть выведено без применения особой теории пучка сил. Достаточно принять во внимание то простое соображение, что сумма моментов какой-либо системы сил относительно заданной точки не изменится от присоединения какой угодно силы, проходящей через эту точку. Из этого соображения сейчас же получается основное положение, указанное Pöschl'ем.

Между тем приведенное здесь *кинематическое* построение может быть выполнено чисто графическим путем.

Легко видеть, что и более сложные случаи, которые требуют замены *многих* стержней и, следовательно, приводят к решению совместной системы многих уравнений, могут быть решены графическим путем при пользовании кинематическим методом. Придется только, развивая изложенные изображения, превратить данную систему в *многократно-изменяемую* и, рассматривая различные возможные превращения последней, построить, в конце концов, план скоростей для однократно-изменяемой цепи.

Заключение задачи, которою мы занимаемся, состоит в использовании полученного плана скоростей для отыскания усилия в одном из удаленных стержней. Аналитическое решение этой задачи заключается просто в том, что нужно приравнять нулю сумму моментов сил относительно изображений точек их приложения. Графическое решение при помощи одного или двух веревочных многоугольников указано было выше, в пп. 32 и 33.

Применения однократно или многократно-изменяемых кинематических цепей к расчету статически-неопределимых систем.

75. Укажем теперь некоторые применения кинематических цепей, имеющие значение для теории *статически-неопределимых систем*.

Первое из них состоит в определении упругих перемещений узлов рамных систем. Этот вопрос играет существенную роль при решении статически-неопределимых задач по методу фокусов.¹⁾ Легко свести вопрос об этих упругих перемещениях рам, имеющих жесткие узлы, к вопросу о неупругих перемещениях шарнирной кинематической цепи с абсолютно жесткими звеньями.

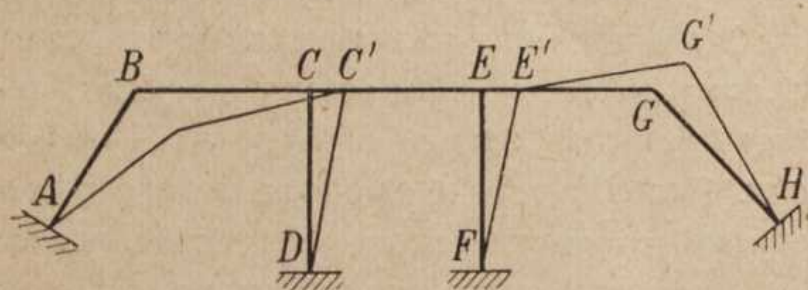
Для пояснения рассмотрим пример, показанный на фиг. 78. При нагружении рамы она изогнется, и прямые стержни AB , BC , CD и т. д. станут кривыми. Согласно основному уравнению обычной теории изгиба,

$$M = -EJ \frac{d^2y}{dx^2};$$

длина хорды упругой линии принимается равной самой упругой линии, т. е. первоначальной длине стержней.

Отсюда следует, что если мы в деформированной раме проведем хорды изогнутых стержней, то фигура $AB'C'D'E'G'H$ будет отличаться от первоначальной фигуры лишь положением узлов и углами между отдельными стержнями. Иными словами, *для получения возможных перемещений узлов рамы, нужно поместить во все ее узловые точки шарниры, а самые стержни считать неизменяемыми; перемещения шарниров этой кинематической цепи и будут искомыми.*

Таким образом задача решается при помощи построения неполярного или полярного плана скоростей.



Фиг. 78.

¹⁾ См. E. Suter: «Die Methode der Festpunkte», Berlin. 1923.

76. Другое применение кинематических цепей к расчету статически-неопределимых систем может быть выведено из графо-аналитического способа определения деформаций, который дан Мором в ряде статей, напечатанных в журнале «Eisenbau» за 1910—12 г. ¹⁾

Этот, к сожалению, почти неизвестный у нас прекрасный прием позволяет решать сложные статически-неопределимые задачи, причем могут быть приняты во внимание деформации не только от изгиба, но и от нормальных сил. Если считаться только с деформациями от изгиба, то перемещение любой точки прямого, кривого и ломаного стержня по какому-либо направлению выражается, по Морю, следующим образом: нужно принять эпюру $\frac{M}{JE}$ за фиктивную нагрузку, приложенную по оси рамы и *параллельную искомому перемещению*. Тогда изгибающий момент в рассматриваемом сечении от этой нагрузки и вызванных ею фиктивных опорных реакций равен искомому перемещению. Самые реакции определяются на основании рассмотрения деформаций в опорных сечениях.

77. Дадим графическое решение задачи о нахождении опорных моментов для неразрезной балки постоянного сечения, опоры которой — неподвижны и расположены на одинаковой высоте. На фиг. 79 показана действительная балка и вид ее эпюры моментов. На той же фигуре (ниже) изображена соответствующая фиктивная балка. Так как у действительной балки прогибы под опорами равны нулю, а углы наклона изменяются плавно, то в фиктивной балке те же сечения должны быть снабжены шарнирами, а промежуточных опор не должно быть. Таким образом, последняя представляет собою шарнирную кинематическую цепь того вида, который мы выше называли дисковым многоугольником.

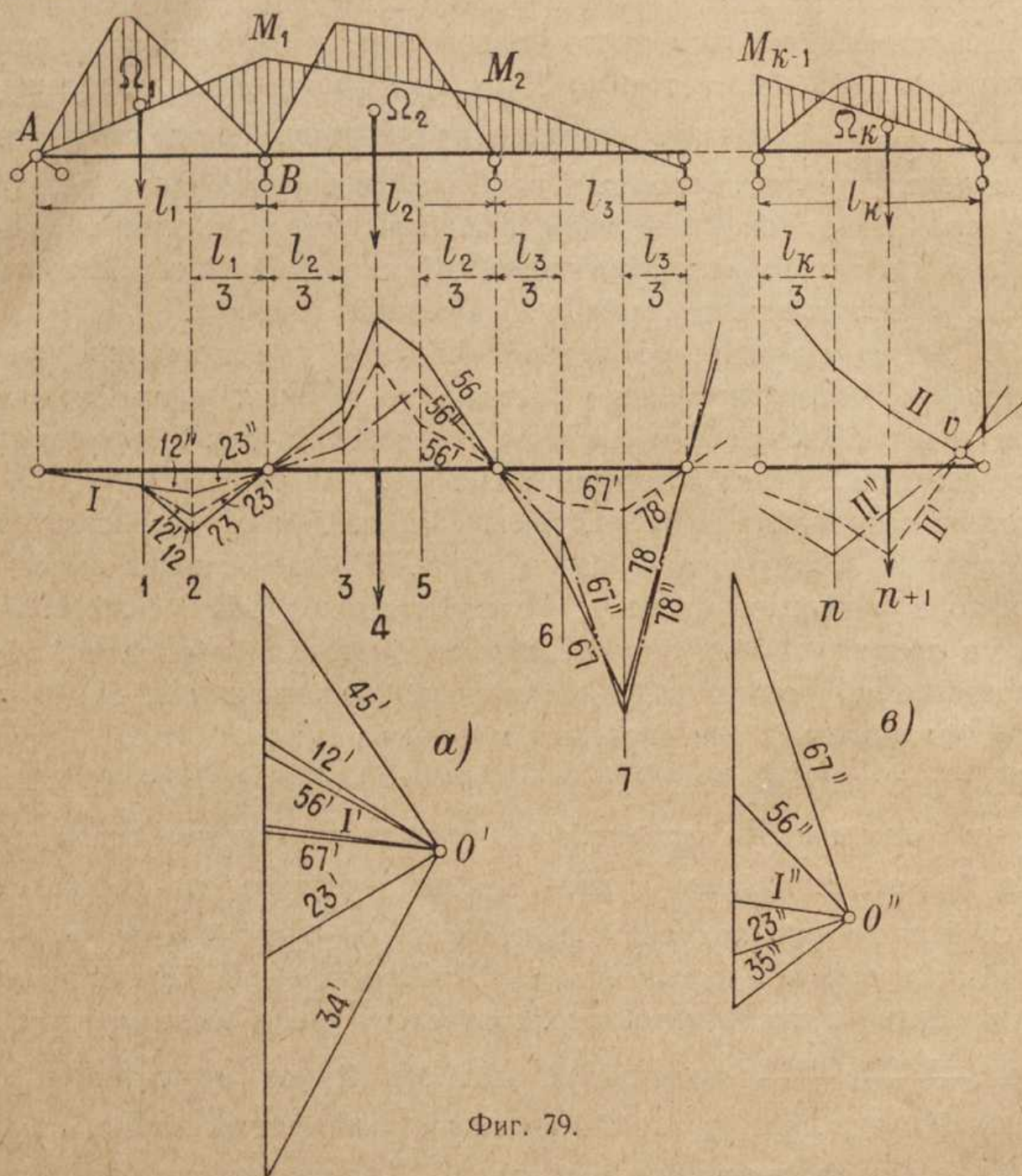
Этот дисковый многоугольник нагружен фиктивной площадью $\frac{M}{EJ}$, которую мы будем считать *вертикальной*, так как, по условию, *вертикальные* прогибы под опорами равны нулю. ²⁾ Вследствие того, что множитель $\frac{1}{EJ}$ остается постоянным по всей длине балки, он будет влиять только на масштаб построения. Площадь эпюры M на протяжении каждого пролета можно разбить на два треугольника, соответствующие опорным моментам, и равные $\frac{M_{n-1} l_n}{2}$, $\frac{M_n l_n}{2}$, и грузовую площадь Ω_n от моментов внешней нагрузки. Эти три силы можно заменить их равнодействующими, из которых первые две приложены на расстоянии $\frac{l_n}{3}$ от соответствующего левого и правого фиктивного шарнира, а третья — в центре тяжести площади Ω_n . Такую замену производил и Мор в вышеуказанных работах.

Для определения неизвестных сил, действующих на дисковый многоугольник, построим для всей нагрузки последнего веревочный многоугольник, проходящий через его шарниры. Такая задача была решена нами

¹⁾ См. О. Mohr: «Abhandlungen...», Abh. XIII. Там же содержатся литературные указания.

²⁾ В рассматриваемом примере, как легко видеть, перемещения на опорах по горизонтальному направлению будут также равны нулю; по этой причине можно считать фиктивную нагрузку направленною как угодно.

выше, но здесь нам придется считаться с тем, что известные силы чередуются с неизвестными. Это, однако, несколько не усложняет задачи. Выбрав положительное направление фиктивных сил, мы сможем отложить известные нам силы $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ в определенную сторону; направление же (вверх или вниз) всех неизвестных сил вида $\frac{M_{n-1} l_n}{2}$ и $\frac{M_n l_n}{2}$ определится само собою из построения. Все силы мы пронумеруем по порядку цифрами 1, 2, 3...



Фиг. 79.

Построим сначала вспомогательный веревочный многоугольник, обозначенный на чертеже простым пунктиром; одновременно с ним строим силовой многоугольник *а*). Откладываем данную силу 1 на фиг. *а*) в произвольном масштабе и получаем направление сторон 1' и 12', которые и проводим на веревочном многоугольнике. Следующую сторону 23' проводим через шарнир; этим определяется на силовом м-ке сила 2. Сила 3 имеет то же направление (тот же знак) что и сила 2; кроме того, известно отношение между ними: оно равно $\frac{M_1 l_2}{2} : \frac{M_1 l_1}{2} = l_2 : l_1$, т. е. отношению пролетов. На этом основании можно отложить на силовом м-ке силу 3 и получить направление стороны 34'. Сила 4 дана, поэтому из силового многоуголь-

ника получаем направление луча 45'. Сторону 56' проводим через шарнир и получаем на силовом м-ке силу 5. Отношение силы 6 к силе 5 равно $\frac{l_3}{l_2}$; на этом основании находим направление стороны 67', и т. д. Доведя это построение до конца, мы получим сторону II', которая, вообще говоря не пройдет через крайний шарнир.

После этого строим второй веревочный многоугольник, обозначенный пунктиром с точками. Он относится исключительно к неизвестным силам 2, 3, 5, 6 и т. д.; *данные* силы Ω_1 , и Ω_2 и т. д. при этом не принимаются во внимание. Крайняя сторона II этого многоугольника также не проходит через крайний шарнир. (Соответствующий силовой многоугольник обозначен на чертеже через ω).

Получив два ложных веревочных многоугольника, находим точку u пересечений их крайних сторон II, II'. Прямая, соединяющая ее с правым шарниром, и будет крайней стороной II искомого веревочного многоугольника. После этого сейчас же можно построить и весь многоугольник. На чертеже он показан сплошными линиями. (Соответствующий ему силовой многоугольник на чертеже не показан).

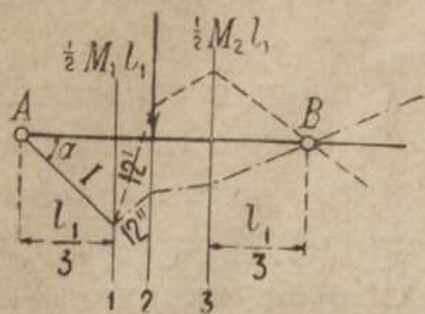
78. Если балка имеет один или оба конца защемленные, то построение по существу не изменяется. На защемленном пролете появляется лишняя фиктивная сила $\frac{M_o l_1}{2}$ или $\frac{M_k l_k}{2}$, где M_o , M_k — моменты защемления. В сечении, соответствующем защемленному концу балки, дисковый многоугольник имеет свободный конец, так как фиктивный момент и фиктивная опорная реакция в этом месте должны быть равны нулю. Поэтому крайний луч I от защемленного места до первой фиктивной силы должен идти по линии AB. В этом и состоит все изменение, вводимое защемлением одного конца. Можно также сказать, что *все построение остается без изменения, если только мы в защемленном пролете будем начинать построение не с точки A, а с точки, отстоящей от края на расстоянии $\frac{l}{3}$* . Защемление *правою* конца точно так же приводит к тому, что построение заканчивается в точке T, отстоящей на расстоянии $\frac{l_k}{3}$ от правой опоры. Фиктивные силы $\frac{M_o l}{2}$ и $\frac{M_k l_k}{2}$ найдутся сами из силового многоугольника, так как на веревочном многоугольнике они заключены между горизонтальной стороной и первой (или последней) наклонной.

Если балка имеет нагруженные консоли, то их можно откинуть, так как их влияние сводится лишь к тому, что на крайней опоре балки изгибающий момент будет не равен нулю, но известен. В дисковом многоугольнике, следовательно, прибавится одна фиктивная сила, известная по величине, направлению и линии действия. Решение задачи останется тем же.

Так же просто решаются и более сложные случаи. Так, если на некоторых или на всех опорах балки прогибы не равны нулю, но известны по величине, то положение шарниров дискового многоугольника становится неизвестным, но зато известен фиктивный изгибающий момент над опорами балки. Поэтому, в местах, где раньше помещались фиктивные

шарниры, теперь будет известна величина ординаты, отсекаемой веревочным многоугольником. Если масштабы чертежа таковы: на силовом многоугольнике $1 \text{ см} = a \text{ к/см}^2$; полюсное расстояние силового многоугольника $= h \text{ см}$;

длина балки изображена в масштабе $1 : n$, то легко видеть, что веревочный многоугольник должен отсечь на опорной ординате отрезок $y = \frac{EJ\delta}{anh} \text{ см}$, где δ — прогиб под соответствующей опорой балки. Но раз известны те точки, через которые должны проходить стороны веревочного многоугольника над опорами, то задача ничем не отличается от случая неподвижных опор.



Фиг. 80.

Если балка *частично* закреплена на том или ином конце, причем угол поворота на опоре, вызванный нагрузкой, известен и равен α , то в дисковом многоугольнике на том же конце будет известна фиктивная опорная реакция. Иными словами, в веревочном многоугольнике будет известен угол α наклона стороны 1 (фиг. 80); направление стороны 12 в двух вспомогательных веревочных многоугольниках придется два раза брать произвольно, затем оно определится.

Наконец, если балка будет *переменною* сечения, то эпюры $\frac{M}{EJ}$ будут иного вида; вследствие этого площадь эпюры, соответствующей каждому опорному моменту, а также положение ее центра тяжести изменятся. На ход решения задачи это несколько не повлияет.

79. Подведем итог изложенному способу расчета неразрезной балки. Самыми существенными его чертами являются следующие: 1) все опорные моменты от какой угодно нагрузки определяются чисто графическим путем; 2) пользование фокусами оказывается излишним; 3) определение опорных моментов, вызываемых нагрузкой каждого пролета в отдельности, является излишним; моменты определяются сразу от нагрузки всей балки; 4) одновременно с опорными моментами, из того же построения получаются также касательные к упругой линии неразрезной балки на всех ее опорах и величины тангенсов наклона упругой линии на опорах. Действительно, касательными служат стороны веревочного многоугольника, проходящие через фиктивные шарниры. Тангенсы же углов наклона определяются из силового многоугольника. Например, для опоры A тангенс выражается на силовом многоугольнике с) силой, заключенной между лучами горизонтальным и 1; для опоры B — силой, заключенною между горизонталью и лучем 23; на опоре C — между той же горизонталью и лучем 56 и т. д.

80. Указанный здесь графический способ определения моментов в неразрезной балке, основанный на равновесии фиктивной многократно-изменяемой шарнирной цепи, может быть применен и к определению неизвестных в рамных статически-неопределимых системах.

Не имея возможности развить здесь этот метод, мы надеемся вернуться к нему позднее.