ПРОВЕРЕНО 1952

Моск. Инж.-Экономич. Ин-т Библиотека им. С. О. Бауманa

ПРОВЕРЕНО 1945

P 123980

Видъ интеграла системы ур—ій съ частными производными перваго порядка, однородныхъ относительно p и не содержащихъ z.

И. С. Губкина.

(Представлено Н. А. Шапошниковымъ).

Доказанную нами теорему объ интегралѣ ур—ія перваго порядка, несодержащаго явно неизвѣстной функціи и однороднаго относительно частныхъ производныхъ этой функціи, легко распространить на интегрируемую систему такихъ ур—ій

$$F_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = o,$$

$$F_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = o, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = o.$$

Чтобъ найти видъ интеграла системы I, будемъ ее интегрировать по методѣ Майера и Ли. Приводя систему къ виду

$$p_1 = p_n w_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_{m+1}}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right),$$

$$p_2 = p_n w_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_{m+1}}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_m = p_n w_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_{m+1}}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right),$$

выполнимъ преобразованіе Майера, положивъ

$$x_2 = \xi_2 + (x_1 - \xi_1)\, y_2, \ldots\ldots, x_m = \xi_m + (x_1 - \xi_1)\, y_m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ всѣ ξ суть опредѣленныя постоянныя.

Тогда данная вначалѣ система замѣнится слѣдующей

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dx_1} &= p_n w_1\left(x_1, y_2, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, \frac{p_{m+1}}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) + p_n y_2 w_2 \ldots + p_n y_m w_m \\ \frac{dz}{dy_2} &= p_n (x_1 - \xi_1)\, w_2, \ldots, \frac{dz}{dy_m} = p_n (x_1 - \xi_1)\, w_m. \end{aligned}$$

Полученная система сохранила всѣ названныя свойства (I-ой).

Извѣстная теорема Ли обнаруживаетъ замѣчательное свойство преобразованной системы II, въ силу котораго ея полный интегралъ тождественъ съ таковымъ же интеграломъ перваго изъ ея ур—ій.

Это ур—іе не содержитъ явно z и однородно относительно производныхъ $\frac{dz}{dx_1}$, $p_{m+1}, \ldots p_n$; поэтому его полный интегралъ, а слѣдовательно, и полный интегралъ всей системы (II) приводимъ, какъ мы доказали, къ виду

$$z = f\,(x_1, y_2, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, \pi_{m+1}, \ldots \pi_n) + \xi, \tag{II'}$$

гдѣ f однородная функція 1-го порядка относительно постоянныхъ интегрированья $\pi_{m+1}, \ldots, \pi_n$.

Чтобъ перейти отъ интеграла (II′) преобразованной системы къ полному интегралу данной вначалѣ системы (I), надо только величины y_i, опредѣленныя изъ равенствъ (2), внести въ (II′).

Получимъ искомый интегралъ системы (I) въ видѣ ур—ія

$$z = \theta\,(x_1, \ldots, x_n, \pi_{m+1}, \ldots, \pi_n) + \xi, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{I'}$$

однороднаго относительно z, $\pi_{m+1} \ldots \pi_n$ и ξ, какъ и прежнее.—Итакъ:

Полный интегралъ системы (I) всегда приводимъ къ виду (I′), гдѣ θ есть однородная функція 1-го порядка относительно произвольныхъ постоянныхъ $\pi_{m+1}, \ldots, \pi_n$.

Наоборотъ всякому такому интегралу вида (I′) соотвѣтствуетъ система ур—ій вида (I), однородныхъ относительно частныхъ производныхъ.

Дѣйствительно, замѣтивъ, какъ и прежде, что разсматриваемый интегралъ можно написать такъ

$$z = \pi_{m+1}\,\theta\left(x_1, \ldots, x_n \frac{\pi_{m+2}}{\pi_{m+1}}, \ldots \frac{\pi_n}{\pi_{m+1}}\right) + \xi$$

исключивъ изъ равенствъ:

$$p_1 = \pi_{m+1} \frac{d\theta\left((x_1 \ldots x_n, \frac{\pi_{m+2}}{\pi_{m+1}}, \ldots; \frac{\pi_n}{\pi_{m+}}\right)}{dx_1}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$p_n = \pi_{m+1} \frac{d\theta}{dx_n}$$

сперва π_{m+1}, стоящее множителемъ, а затѣмъ $\frac{\pi_{m+2}}{\pi_{m+1}}, \ldots, \frac{\pi_n}{\pi_{m+1}}$, получимъ систему дифференціальныхъ ур—ій, соотвѣтствующую интегралу I′. Эта система будетъ имѣть видъ (I), что и требовалось доказать.

Примѣръ.

Система ур—ій

$$\begin{aligned} p_1 p_5 x_4 + p_3 p_5 x_2 &= p_1 p_3 \\ p_1 x_1 &= p_2 x_2 \\ p_3 x_3 &= p_4 x_4 \end{aligned}$$

имѣетъ полный интегралъ

$$z = ax_1 x_2 + bx_3 x_4 + \frac{ab}{a+b} x_5 + c.$$

Это ур—іе однородно относительно z и произвольныхъ постоянныхъ a, b и c.

Выраженіе частной производной отъ детерминанта.

И. С. Губкина.

Сообщено въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ 15 декабря 1880-го года.

(Представлено Н. А. Шапошниковымъ).

Положимъ, что имѣемъ детерминантъ:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

гдѣ первый значекъ при буквахъ означаетъ строку, къ которой принадлежитъ элементъ, а второй колонну.

Условимся обозначать черезъ A_{ik} субдетерминантъ, который получится изъ Δ_n, если въ послѣднемъ выбросить строку и колонну, пересѣкающіяся по элементу a_{ik}.

Субдетерминантъ A_{ik} имѣетъ, какъ извѣстно, очень простое соотношеніе съ начальнымъ, именно

$$A_{ik} = \frac{d\Delta_n}{da_{ik}}.$$

Для вывода этого соотношенія нужно только продифференцировать по a_{ik} любое изъ тождествъ

$$\Delta_n = a_{i1}\ A_{i1} + a_{i2}\ A_{i2} + \ldots + a_{ik}\ A_{ik} + \ldots + a_{in}\ A_{in},$$
$$\Delta_n = a_{1k}\ A_{1k} + a_{2k}\ A_{2k} + \ldots + a_{ik}\ A_{ik} + \ldots + a_{nk}\ A_{nk},$$

представляющихъ разложенія Δ_n по элементамъ строки i или колоны k.

Положимъ, что элементы разсматраваемаго детерминанта суть функціи какихъ нибудь перемѣнныхъ $x_1,\ x_2; \ldots x_h, \ldots;\ x_m$; предложимъ себѣ опредѣлить производную $\frac{d\Delta_n}{dx_h}$.

По правилу дифференцированья сложныхъ функцій, имѣемъ

$$\frac{d\Delta_n}{dx_h} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta_n}{da_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dx_h} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\Delta_n}{da_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dx_h},$$

или на основаніи равенства $A_{ik} = \frac{d\Delta_n}{da_{ik}}$

$$\frac{d\Delta_n}{dx_h} = \sum_{k=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{da_{ik}}{dx_h} A_{ik} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{da_{ik}}{dx_h} A_{ik}.$$

Замѣтивъ далѣе, что

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{da_{ik}}{dx_h} A_{ik} = \left| \ \Delta_n \right|_{a_i = \frac{da_i}{dx_h}} \text{ и}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{da_{ik}}{dx_h} A_{ik} = \Big|^{a_k=\frac{da_k}{dx_h}} \Delta_n$$

гдѣ знакъ $\Big|^{a_i=\frac{da_i}{dx_h}}$ означаетъ замѣну элементовъ $a_{i1}\,..\,a_{in}$ строки i черезъ $\frac{da_{i1}}{dx_h}, \dots \frac{da_{in}}{dx_h}$, а $\Big|^{a_k=\frac{da_k}{dx_h}}$ замѣну элементовъ $a_{1k}, a_{2k}, \dots ; a_{nk}$ колонны k черезъ $\frac{da_{1k}}{dx_h} \dots \frac{da_{nk}}{dx_h}$, легко привести выведенныя равенства въ виду

$$\frac{d\Delta_n}{dx_h} = \sum_{1=i}^{i=n} \Big|^{a_i=\frac{da_i}{dx_h}} \Delta_n = \sum_{k=1}^{k=n} \Big|^{a_k=\frac{da_k}{dx_h}} \Delta_n .$$

Итакъ, мы видимъ, что частная производная отъ детерминанта n-го порядка можетъ быть представлена въ видѣ суммы n детерминантовъ составленныхъ изъ даннаго по очень простому и симметричному закону.

Полученный результатъ показываетъ между прочимъ, что извѣстное правило Импенецкаго для дифференцированія такъ называемой Пуассоновой скобки распространяется безъ измѣненія на весьма сложное функціональное выраженіе, представляющее обобщенный видъ подобной скобки.

Р 123980

НТБ МГТУ им.Н.Э.Баумана

123980

Губкин И.С. Вид интеграла системы уравнени