КЪ ВОПРОСУ
О ДАВЛЕНІИ ДІЭЛЕКТРИЧЕСКАГО ГАЗА
ВЪ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМЪ ПОЛѢ.

Н. Е. Жуковскаго.

Отдѣльный оттискъ изъ VI тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія.

МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Б. Черныш. пер., д. Пустошкина, *противъ Англійской церкви.*
1893.

КЪ ВОПРОСУ
О ДАВЛЕНІИ ДІЭЛЕКТРИЧЕСКАГО ГАЗА
ВЪ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМЪ ПОЛѢ.

Н. Е. Жуковскаго.

Отдѣльный оттискъ изъ VI тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія.

МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Б. Черныш. пер., д. Пустошкина,
противъ Англійской церкви.
1893.

Къ вопросу о давленіи діэлектрическаго газа въ электрическомъ полѣ.

Н. Е. Жуковскаго.

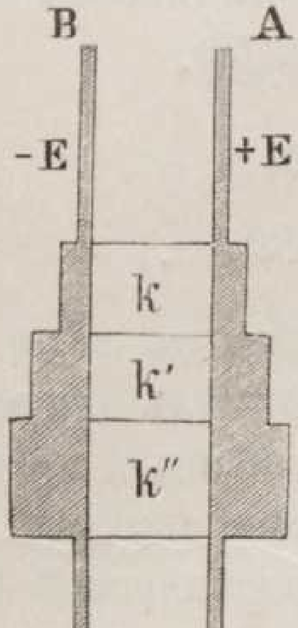
(*Читано 29 октября 1893 г.*)

§ 1. Въ этой замѣткѣ мы имѣемъ въ виду доказать, что изъ общепринятыхъ формулъ для электрической энергіи системы діэлектриковъ и проводниковъ получается заключеніе о независимости отъ силы электрическаго поля характеристической формулы, выражающей давленіе діэлектрическаго газа по его плотности и температурѣ. Если же въ электрическомъ полѣ имѣется соединеніе насыщеннаго пара съ жидкостью, то сила электрическаго поля не имѣетъ вліянія на величину $p - \frac{\rho}{\rho'} p'$, гдѣ p и ρ давленіе и плотность пара, а p' и ρ' суть давленіе и плотность жидкости.

Мы будемъ разсматривать діэлектрики, заключенные между двумя листами конденсатора и соприкасающіеся между собою или по поверхностямъ силовыхъ линій, или по эквипотенціальнымъ поверхностямъ.

Первое расположеніе, кажется, было мало спекулируемо математическими физиками. Между тѣмъ оно заслуживаетъ особое вниманіе, такъ какъ позволяетъ дѣлать весьма разнообразныя измѣненія діэлектриковъ, не нарушая однородности электрическаго поля.

§ 2. Вообразимъ (фиг. 1) два весьма широкіе паралелльные листа конденсатора A и B, отстоящіе другъ отъ друга на постоянное разстояніе h и заряженные количествами электричества $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$. Между этими листами заключенъ рядъ діэлектриковъ, имѣющихъ формы прямыхъ цилиндровъ съ произвольными основаніями, лежащими на томъ и другомъ листѣ конденсатора. Все остальное пространство представляетъ такъ называемую пустоту, діэлектрическое постоянное которой пусть будетъ k_0. Назовемъ чрезъ $k, k', k'', \ldots$ діэлектрическія постоянныя разсматриваемыхъ діэлектриковъ и чрезъ $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ площади, которыми они опираются на листы конденсатора.



Фиг. 1.

Легко усмотрѣть, что въ разсматриваемомъ случаѣ мы получимъ равновѣсіе электричества при однородномъ полѣ, охарактеризованномъ нѣкоторою постоянною силою R, направленною перпендикулярно листамъ отъ A къ B.

При этомъ свободное электричество будетъ лежать на листахъ однородными слоями плотности $\frac{R}{4\pi}$, сообщенное же извнѣ электричество будетъ имѣть большую плотность на площадяхъ основаній діэлектриковъ и тѣмъ большую, чѣмъ діэлектрическое постоянное болѣе. Это произойдетъ отъ того, что діэлектрикъ съ постояннымъ k выдвинетъ къ листамъ A и B электричество съ плотностью $-kR$ и $+kR$, которое нейтрализуетъ часть сообщеннаго электричества. На фигурѣ представлены схематически плотности сообщеннаго электричества въ предположеніи $k_0 < k < k' < k'' \ldots$.

Называя площадь листа конденсатора чрезъ σ_0, выразимъ все количество ε находящагося на немъ сообщеннаго электричества формулой *):

$$\varepsilon = R \left(\frac{1+4\pi k_0}{4\pi} (\sigma_0 - \sigma - \sigma' - \ldots) + \right.$$
$$\left. + \frac{1+4\pi k}{4\pi} \sigma + \frac{1+4\pi k'}{4\pi} \sigma + \ldots \right)$$

или

$$\varepsilon = R\,(c + (k - k_0)\,\sigma + (k' - k_0)\,\sigma' + \ldots),$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное.

Отсюда находимъ, что

$$R = \frac{\varepsilon}{c + (k - k_0)\,\sigma + (k' - k_0)\,\sigma' + \ldots}. \qquad (1)$$

Разность потенціаловъ H при переходѣ отъ листа B къ листу A, и электрическая энергія w всей разсматриваемой системы выражаются формулами:

$$H = Rh,$$
$$w = \frac{\varepsilon}{2} H = \frac{\varepsilon}{2} Rh.$$

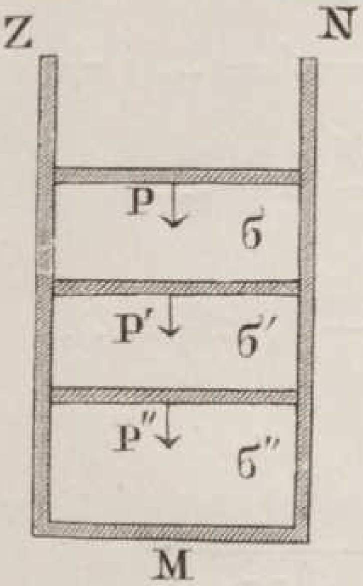
*) Чтобы устранить всякое сомнѣніе относительно краевъ конденсатора, можно воображать безконечно широкій конденсаторъ, разбитый на квадраты, въ которыхъ симметрично повторяются расположенія діэлектриковъ k, k', $k''\ldots$, и разсматривать одинъ такой квадратъ.

Подставляя сюда величину R, получимъ:

$$H=\frac{\varepsilon h}{c+(k-k_0)\sigma+(k'-k_0)\sigma'+\ldots,} \qquad (2)$$

$$w=\frac{\varepsilon^2 h}{2\,(c+(k-k_0)\sigma+(k'-k_0)\sigma'+\ldots)}. \qquad (3)$$

Вообразимъ теперь, что плоскость листа конденсатора A совпадаетъ съ плоскостью чертежа и что разсматриваемые діэлектрики суть газы, заключенные (фиг. 2) въ прямоугольной коробкѣ ZMN, образованной стеклянными стѣнками, перпендикулярными листамъ конденсатора, и самими этими листами. Газы отдѣляются отъ пустоты и раздѣляются между собою нѣкоторыми стеклянными поршнями, могущими свободно скользить по стѣнкамъ коробки. Всѣ члены, стоящіе въ знаменателяхъ форм. (2) и (3) и относящіеся къ стѣнкамъ сосуда и поршнямъ, будемъ считать включенными въ постоянное c, такъ что $k, k', k'' \ldots \sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ будутъ величины, относящіяся только къ однимъ разсматриваемымъ газамъ. Назовемъ чрезъ $p, p', p'' \ldots$ давленія этихъ газовъ и предположимъ, что на упомянутые поршни дѣйствуютъ еще нѣкоторыя внѣшнія силы, которыя отнесенныя къ единицѣ площади поршней пусть будутъ: $P, P', P'' \ldots$ Будемъ считать эти силы положительными, когда онѣ направлены внизъ.



Фиг. 2.

Если закрѣпимъ всѣ поршни и сдѣлаемъ свободнымъ одинъ изъ нихъ, напримѣръ второй, то по принципу сохраненія ε и началу возможныхъ перемѣщеній найдемъ, что

$$(P'+p-p')\ hd\sigma-\left(\frac{dw}{d\sigma}-\frac{dw}{d\sigma'}\right)d\sigma=0,$$

откуда:

$$P'=p'-\frac{dw}{hd\sigma'}-\left(p-\frac{dw}{hd\sigma}\right).$$

На основаніи такихъ разсужденій всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на поршни, выразятся формулами:

$$P=p-\frac{dw}{hd\sigma'},$$

$$P'=p'-\frac{dw}{hd\sigma'}-\left(p-\frac{dw}{hd\sigma}\right), \qquad (4)$$

$$P''=p''-\frac{dw}{hd\sigma''}-\left(p'-\frac{dw}{hd\sigma'}\right),$$

. . . .

Когда на поршень, раздѣляющій два діэлектрическіе газа, не дѣйствуетъ никакой внѣшней силы, то изъ форм. (4) мы сейчасъ же найдемъ разность давленій этихъ газовъ.

Положивъ $P'=0$ и обративъ вниманіе на форм. (3) и (1), получимъ:

$$p-p'=\frac{R^2}{2}\left(k'-k-(\theta'-\theta)\right). \qquad (5)$$

Здѣсь положено, что

$$\sigma\frac{dk}{d\sigma}=\frac{dk}{dlg\sigma}=-\frac{dk}{dlg\rho}=-\theta,$$

гдѣ ρ плотность газа; такое же значеніе имѣетъ и коэффиціентъ θ'.

Коэффиціенты θ, какъ показываетъ опытъ, суть весьма незначительныя величины сравнительно съ κ; поэтому при $k' > k$ будемъ имѣть изъ форм. (5) $p > p'$, т. е. два смежные діэлектрическіе, газа могутъ быть въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, когда давленіе менѣе совершеннаго діэлектрика изъ нихъ (у котораго діэлектрическое постоянное болѣе) будетъ меньше давленія болѣе совершеннаго. Если давленія обоихъ газовъ равны, то діэлектрикъ менѣе совершенный будетъ расширяться и сжимать болѣе совершенный до тѣхъ поръ, пока разность давленій не достигнетъ указанной величины.

§ 3. Обращаемся къ опредѣленію измѣненія давленій $p, p', p'', \ldots$ съ измѣненіемъ ε. Этотъ вопросъ разрѣшается по принципу свободной энергіи, установленному Гельмгольтцемъ *).

Свободная энергія выражается форм.

$$F = U - J\mathrm{T}E,$$

гдѣ U полная энергія разсматриваемой системы, E ея энтропія, а T одинаковая для всѣхъ частей системъ абсолютная температура. Въ нашемъ случаѣ, какъ U, такъ и E суть функціи отъ $\varepsilon, \mathrm{T}, \sigma, \sigma', \sigma'' \ldots$, такъ что при постоянной температурѣ свободная энергія является функціею только геометрическихъ размѣровъ системы и количества сообщеннаго электричества на листахъ конденсатора.

Пусть наша система совершаетъ обратимый изотермическій процессъ вслѣдствіе того, что силы

*) Helmholtz. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. II, S. 958.

$P, P', P''\ldots$ и количество электричества ε непрерывно измѣняются.

Отрицательное приращеніе свободной энергіи будетъ равно работѣ, потраченной на преодолѣніе внѣшнихъ силъ, а также и работѣ, выдѣляемой системою при переходѣ электричества отъ болѣе высокаго потенціала къ болѣе низкому. Вслѣдствіе этого
$$-dF = P(d\sigma + d\sigma' + d\sigma'' + \ldots..)h + P'(d\sigma' + d\sigma'' + \ldots..)h + \ldots.. - Hd\varepsilon.$$

Подставляя сюда величины $P, P', \ldots.$ изъ форм. (4) и замѣчая, что на основаніи форм. (3) и (2)

$$H = \frac{dw}{d\varepsilon},$$

получаемъ:

$$-dF = \left(ph - \frac{dw}{d\sigma}\right)d\sigma + \left(p'h - \frac{dw}{d\sigma'}\right)d\sigma' + \ldots..$$
$$-\frac{dw}{d\varepsilon}\,d\varepsilon \qquad (6)$$

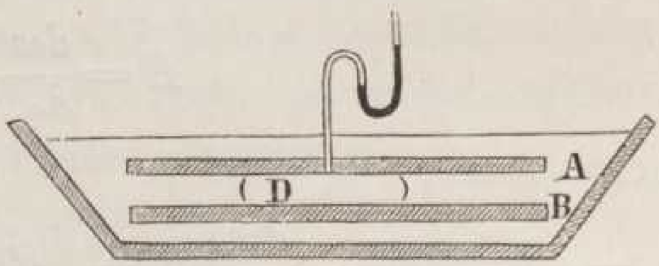
Вторая часть этого равенства должна быть полнымъ дифференціаломъ функціи перемѣнныхъ: $\varepsilon, \sigma, \sigma' \sigma'' \ldots..$; поэтому

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{dp'}{d\varepsilon} = \frac{dp''}{d\varepsilon} = \ldots = 0 \qquad (7)$$

Мы видимъ, что давленія $p, p', p''\ldots.$ разсматриваемыхъ діэлектрическихъ газовъ не зависятъ отъ ε и имѣютъ тѣ же величины, какія имѣлись бы при данныхъ $T, \sigma, \sigma', \ldots.$ въ случаѣ $\varepsilon = 0$. Такимъ образомъ давленіе діэлектрическаго газа въ разсмотрѣнномъ электрическомъ полѣ опредѣляется по его плотности и температурѣ обыкновенною формулою Маріотта-Гейлюсака.

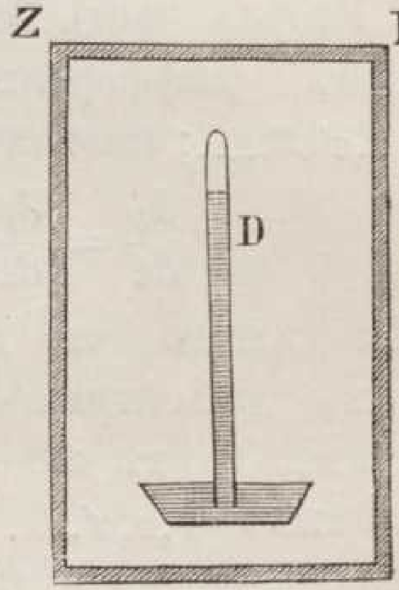
§ 4. Вслѣдствіе сказаннаго измѣненіе объемовъ разсматриваемыхъ діэлектриковъ съ измѣненіемъ ε должно объясняться только измѣненіемъ скачка въ гидростатическомъ давленіи, совершающагося на поверхности соприкосновенія діэлектриковъ. Эти скачки подобны тѣмъ, которые разсматриваются въ теоріи капиллярныхъ явленій, причемъ поверхность соприкосновенія аналогична капиллярной поверхности, обращенной вогнутостью въ сторону болѣе совершеннаго діэлектрика.

Въ извѣстномъ опытѣ Quincke (фиг. 3) воздушный пузырь D, заключенный между листами конденсатора A и B, заполненнаго терпентиномъ, сжимается, уступая мѣсто менѣе совершенному діэлектрику — терпентину. При этомъ давленіе воздуха въ пузырѣ возрастаетъ до тѣхъ поръ, пока разность давленій воздуха и терпентина не достигаетъ величины, даваемой форм. (5).



Фиг. 3.

Если вообразимъ (фиг. 4) между двумя конденсаторными листами стеклянныя стѣнки ZMN, наполненныя воздухомъ, а внутри ихъ барометръ D, ограниченный стекломъ и наполненный терпентиномъ, причемъ плоскость чертежа совпадаетъ съ плоскостью



Фиг. 4.

листа конденсатора A и всѣ стеклянныя стѣнки расположены, какъ объяснено въ § 2, то придемъ къ заключенію, что съ увеличиваніемъ силы поля барометръ будетъ подниматься. Это оттого, что (менѣе совершенный діэлектрикъ) воздухъ будетъ расширяться на счетъ (болѣе совершеннаго діэлектрика) барометрической пустоты.

Не принимая во вниманіе скачка въ гидростатическихъ давленіяхъ и желая объяснить оба упомянутыя явленія измѣненіемъ характеристической формулы воздуха въ электрическомъ полѣ, мы бы должны были допустить изъ перваго опыта, что съ увеличиваніемъ силы поля давленіе воздуха уменьшается, а изъ второго, что оно увеличивается отъ той же причины.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о діэлектрикѣ перемѣнной плотности. Если предположимъ (фиг. 1), что діэлектрики $k, k', k'', \ldots$ расположены весьма узкими слоями, причемъ постоянное k измѣняется постепенно, то перейдемъ въ предѣлѣ къ неоднородному діэлектрику. Вообразимъ нѣкоторую ортогональную линію къ поверхностямъ равнаго k и назовемъ ея длину чрезъ s. По форм. (5) напишемъ:

$$-\frac{dp}{ds}ds = \frac{R^2}{2}\left[\frac{dk}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\rho\,\frac{dk}{d\rho}\right)\right]ds = \frac{R^2}{2}\left\{\frac{dk}{ds} - \right.$$

$$\left. - \frac{dk}{d\rho}\frac{d\rho}{ds} - \rho\,\frac{d}{ds}\left(\frac{dk}{d\rho}\right)\right\}ds$$

или

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{R^2}{2}\,\rho\,\frac{d}{ds}\left(\frac{dk}{d\rho}\right).$$

Раздѣляя на p и интегрируя, находимъ:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{R^2}{2}\frac{\theta}{\rho} + const. \qquad (6)$$

По этой формулѣ опредѣляется разность давленій въ двухъ точкахъ неоднороднаго діэлектрика, причемъ при разсматриваніи болѣе общей задачи обнаруживается, что эта форм. остается справедливой и въ перемѣнномъ электрическомъ полѣ *).

Воображая конденсаторъ съ открытыми краями, окруженный воздухомъ, найдемъ по данной форм. и закону Маріотта слѣдующее соотношеніе между давленіемъ наружнаго воздуха p_0 и воздуха внутри конденсатора p:

$$lg\frac{p}{p_0} = \frac{R^2}{2}\frac{\theta}{p},$$

Откуда приближенно

$$p - p_0 = \frac{R^2}{2}\theta. \qquad (7)$$

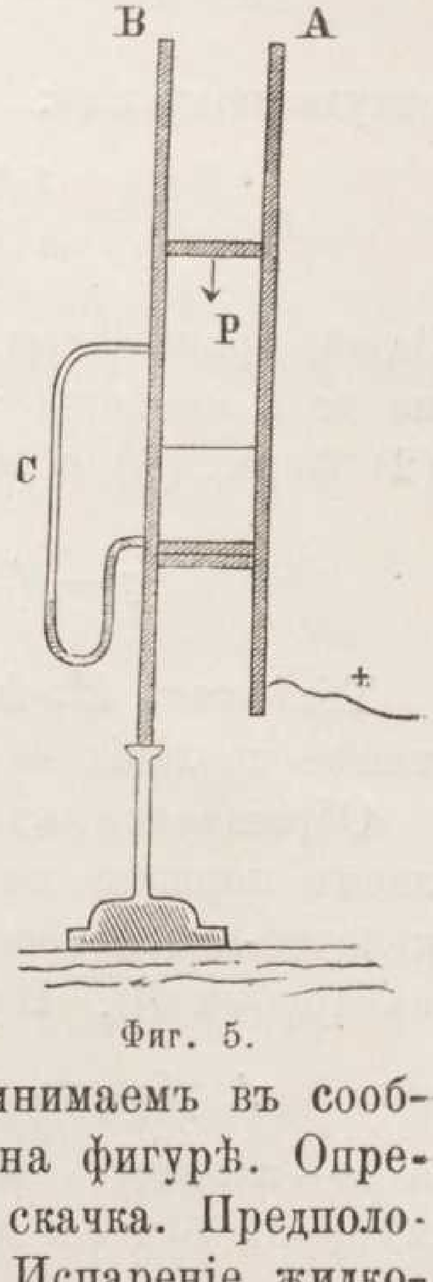
Такимъ образомъ въ открытомъ конденсаторѣ увеличиваніе силы поля производитъ сгущеніе воздуха.

§ 5. Переходимъ къ вопросу объ измѣненіи въ зависимости отъ ε упругости p насыщеннаго пара и упругости p' его жидкости. Пусть (фиг. 5) между вертикальными листами нашего конденсатора посредствомъ стеклянныхъ стѣнокъ устроенъ прямоугольный вертикальный сосудъ, прикрытый сверху стекляннымъ поршнемъ, могущимъ свободно сколь-

---

*) Helmholtz. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, S. 817.

зить въ сосудѣ и находящимся подъ дѣйствіемъ внѣшней силы, величина которой на единицу площади поршня есть P. Въ этомъ сосудѣ заключена жидкость съ діэлектрическимъ постояннымъ k' и ея паръ съ діэлектрическимъ постояннымъ k. Жидкость и паръ соединены еще трубкою C, проходящею сквозь конденсаторный листъ B и выходящею такимъ образомъ изъ электрическаго поля (легко показать, что при перемѣщеніи по трубкѣ сила поля быстро затухаетъ). Если при переходѣ въ конденсаторъ чрезъ поверхность раздѣла пара и жидкости мы будемъ получать скачкомъ пониженіе давленія отъ p до p', то жидкость въ трубкѣ C будетъ стоять ниже, нежели въ



Фиг. 5.

конденсаторѣ (волосность не принимаемъ въ соображеніе), какъ это изображено на фигурѣ. Опредѣлимъ величину упомянутаго скачка. Предположимъ, что поршень закрѣпленъ. Испареніе жидкости или конденсація пара дѣлаются невозможными, такъ какъ сумма объемовъ жидкости и пара неизмѣнны. Возможнымъ перемѣщеніемъ остается перемѣщеніе жидкости изъ конденсатора въ трубку C или наоборотъ. Пусть это перемѣщеніе охарактеризовано измѣненіемъ площадей $d\sigma = -d\sigma'$.

По началу возможныхъ перемѣщеній находимъ, что *)

$$(p-p')\,h d\sigma - \left[\left(\frac{dw}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dw}{d\sigma'}\right)\right] d\sigma = 0,$$

откуда получимъ:

$$p - p' = \frac{1}{h}\left(\frac{dw}{d\sigma}\right) - \frac{1}{h}\left(\frac{dw}{d\sigma'}\right). \qquad (8)$$

Здѣсь производныя въ скобкахъ показываютъ, что не надо измѣнять k и k'. На основаніи форм. (3) и (2) форм. (8) обращается въ

$$p - p' = \frac{R^2}{2}(k' - k). \qquad (9)$$

Такъ какъ $k' > k$, то давленіе жидкости будетъ менѣе давленія ея пара.

Обращаемся къ опредѣленію P. Для этого дѣлаемъ поршень подвижнымъ и сообщаемъ ему безконечно-малое перемѣщенье вверхъ, испаряя воду въ трубкѣ C. Пусть при этомъ σ возрастетъ на $d\sigma$, а σ', убудетъ на $\frac{\rho}{\rho'}\,d\sigma$, гдѣ ρ—плотность пара, а ρ'—плотность воды. По началу возможныхъ перемѣщеній будемъ имѣть:

$$(-P+p)\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma'}\right) h d\sigma + (p - p')\,\frac{\sigma}{\sigma'}\,h d\sigma -$$
$$- \left[\left(\frac{dw}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dw}{d\sigma'}\right)\frac{\sigma}{\sigma'}\right] d\sigma = 0.$$

---

*) Первый членъ этой формулы можно разсматривать, какъ работу вѣса жидкости, опустившейся въ конденсаторѣ и поднявшейся въ трубкѣ.

Подставляя сюда $p-p'$ изъ форм. (8) и дѣлая сокращенія, находимъ:

$$P=p-\frac{1}{h}\left(\frac{dw}{d\sigma}\right), \qquad (10)$$

или по форм. (3) и (2)

$$P=p+\frac{R^2}{2}(k-k_0). \qquad (11)$$

Теперь остается еще разсмотрѣть измѣненіе величинъ p и p' съ измѣненіемъ ε. По принципу свободной энергіи будемъ имѣть:

$$-dF=P(d\sigma+d\sigma')-Hd\varepsilon.$$

Подставляемъ сюда величину P изъ форм. (10) и прибавляемъ ко второй части величину, тождественно равную нулю по форм. (8):

$$\left(p'-\frac{1}{h}\left(\frac{dw}{d\sigma'}\right)-\left(p-\frac{1}{h}\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)\right)\right)d\sigma=0.$$

Получаемъ:

$$-dF=\left(ph-\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)\right)d\sigma+\left(p'h-\frac{dw}{d\sigma'}\right)d\sigma'-\frac{dw}{d\varepsilon}d\varepsilon.$$

Допускаемъ съ нѣкоторымъ приближеніемъ, что отношеніе $d\sigma$ и $d\sigma'$ постоянно и выражается чрезъ

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'}=-\frac{\rho'}{\rho},$$

гдѣ ρ и ρ' плотность воды и пара при $\varepsilon=0$. Получаемъ:

$$-dF=\left[\left(p-\frac{\rho}{\rho'}p'\right)h-\left(\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)-\left(\frac{dw}{d\sigma'}\right)\frac{\rho}{\rho'}\right)\right]d\sigma-\frac{dw}{d\varepsilon}d\varepsilon$$

$$=\left[\left(p-\frac{\rho}{\rho'}p'\right)h-\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right]d\sigma-\frac{dw}{d\varepsilon}d\varepsilon. \qquad (12)$$

здѣсь ∂ выражаетъ измѣненіе по σ, считая σ' функціею σ. Такъ какъ вторая часть должна быть полнымъ дифференціаломъ отъ ε и σ, то

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(p-\frac{\rho}{\rho'}p'\right)=0. \tag{13}$$

Мы видимъ, что величина, стоящая въ скобкахъ, не измѣняется и имѣетъ при всякомъ ε то же значеніе, какое она имѣетъ при $\varepsilon=0$. Назовемъ чрезъ p_0 давленіе, даваемое при разсматриваемой температурѣ таблицами упругости насыщеннаго пара. Получаемъ:

$$p-\frac{\rho}{\rho'}p'=\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)p_0. \tag{14}$$

Рѣшая ур. (9) и (14), найдемъ искомыя давленія:

$$\left.\begin{aligned} p&=p_0-\frac{\rho}{\rho'-\rho}\frac{R^2}{2}(k'-k),\\ p'&=p_0-\frac{\rho'}{\rho'-\rho}\frac{R^2}{2}(k'-k). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

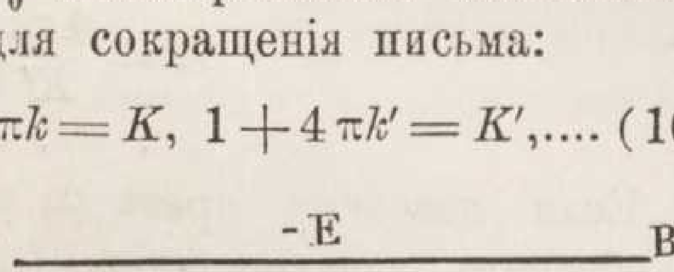
Эти формулы показываютъ, что съ возрастаніемъ силы поля уменьшается давленіе насыщеннаго пара и соприкасающейся съ нимъ жидкости, но первое уменьшеніе гораздо менѣе, нежели второе.

Мы предположили для простоты при выводѣ форм. (10) и (12), что испареніе совершается въ трубкѣ C. Но легко усмотрѣть, что выводъ этихъ форм. не измѣнится, если предположимъ, что входы въ трубку C закрыты и испареніе совершается въ конденсаторѣ.

§ 6. Будемъ теперь разсматривать діэлектрики, поверхности раздѣла которыхъ направляются по эквипотенціальнымъ поверхностямъ. Воображаемъ опять весьма широкіе листы конденсатора A и B, (фиг. 6) на которыхъ лежитъ сообщенное электричество, и назовемъ здѣсь чрезъ $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ количества электричества на единицѣ площади этихъ листовъ. Между листами помѣстимъ рядъ діэлектриковъ, соприкасающихся по плоскостямъ, параллельнымъ конденсаторнымъ листамъ, и предположимъ, что остальное пространство между листами представляетъ пустоту. На весьма большомъ разстояніи отъ разсматриваемаго мѣста діэлектрики ограничены нѣкоторыми стеклянными стѣнками, перпендикулярными къ листамъ конденсатора. Пусть h будетъ постоянное разстояніе между листами конденсатора, а z, z', z'',.... пусть будутъ толщины діэлектриковъ. Обозначаемъ чрезъ k, k', k'',... діэлектрическіе коэффиціенты разсматриваемыхъ діэлектриковъ,—чрезъ k_0 діэлектрическое постоянное эфира и полагаемъ для сокращенія письма:

$$1+4\pi k_0=K_0,\ 1+4\pi k=K,\ 1+4\pi k'=K', \ldots \quad (16)$$

Электрическая сила разсматриваемаго поля будетъ направлена отъ листа A къ листу B и будетъ измѣнять свою величину скачкомъ при переходѣ чрезъ граничную плоскость, раздѣляющую два діэлектрика. Назовемъ величину этой силы въ пу-



Фиг. 6.

стотѣ чрезъ R_0, въ первомъ діэлектрикѣ чрезъ R, во второмъ чрезъ R' и т. д.

Будемъ имѣть на основаніи извѣстной связи между плотностью электричества и силою:

$$R_0 = \frac{4\pi\varepsilon}{K_0}.$$

При переходѣ чрезъ первую граничную плоскость R_0 измѣняется въ R, причемъ должно быть удовлетворено соотношеніе:

$$K_0 R_0 - KR = 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$R = \frac{K_0}{K} R_0 = \frac{4\pi\varepsilon}{K}.$$

Продолжая разсуждать подобнымъ образомъ, находимъ:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{4\pi\varepsilon}{K_0}, \\ R &= \frac{4\pi\varepsilon}{K}, \\ R' &= \frac{4\pi\varepsilon}{K'}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{17}$$

Если назовемъ чрезъ μ, μ', μ'',...., плотности свободнаго электричества (мы предполагаемъ, что внутри конденсатора нѣтъ сообщеннаго электричества) первой, второй и т. д. граничной плоскости, то увидимъ, что эти плотности будутъ имѣть величины:

$$\begin{aligned} \mu &= \varepsilon\left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K}\right), \\ \mu' &= \varepsilon\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Сумма этихъ плотностей для всѣхъ граничныхъ плоскостей равна нулю.

Составимъ теперь разность потенціаловъ H на нашихъ конденсаторныхъ листахъ. Эта разность будетъ:

$$H = R_0 (h - z - z' - z'' - \ldots) + Rz + R'z' + \ldots$$

Подставляемъ сюда величины силъ изъ форм. (17):

$$H = 4\pi\varepsilon \left\{ c - \left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K} \right) z - \left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K'} \right) z' - \ldots \right\}, \quad (18)$$

гдѣ $c = h : K_0$.

Мы будемъ теперь предполагать, что наши діэлектрическіе слои состоятъ изъ газообразныхъ тѣлъ и раздѣляющихъ ихъ стеклянныхъ поршней, причемъ вся система ограничена снизу стекляннымъ дномъ, а сверху прикрыта стекляннымъ поршнемъ. Всѣ части форм. (18), относящіяся къ дну и стекляннымъ поршнямъ, отнесемъ къ постоянному c, такъ что $z, z', z'', \ldots$ $K, K', K'' \ldots$ будутъ величины, соотвѣтствующія діэлектрическимъ газамъ.

Зная H, находимъ величину w электрической энергіи, отнесенную къ единицѣ площади конденсатора:

$$w = 2\pi\varepsilon^2 \left\{ c - \left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K} \right) z - \left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K'} \right) z' - \ldots \right\} \quad (19)$$

Называемъ чрезъ $p, p', p'', \ldots$ силы упругости разсматриваемыхъ газовъ и предполагаемъ, что на поршни дѣйствуютъ внѣшнія силы, величины которыхъ, отнесенныя къ единицѣ поверхности поршней, обозначимъ чрезъ P, P', P''. Будемъ считать эти величины положительными, когда силы направлены внизъ.

Если закрѣпимъ всѣ поршни и сдѣлаемъ свободнымъ одинъ изъ нихъ, напримѣръ второй, то по началу возможныхъ перемѣщеній найдемъ, что

$$(P' + p - p')dz - \left(\frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dz'}\right) dz = 0,$$

откуда

$$P' = p' - \frac{dw}{dz'} - \left(p - \frac{dw}{dz}\right).$$

На основаніи такихъ же разсужденій всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на поршни, выразятся форм:

$$\begin{aligned} P &= p - \frac{dw}{dz}, \\ P' &= p' - \frac{dw}{dz'} - \left(p - \frac{dw}{dz}\right), \qquad (20) \\ P'' &= p'' - \frac{dw}{dz''} - \left(p' - \frac{dw}{dz'}\right), \end{aligned}$$

. . . .

Когда на поршень, раздѣляющій два діэлектрическіе газэ, не дѣйствуетъ никакой внѣшней силы, то изъ форм. (20) мы сейчасъ же найдемъ разность давленій этихъ газовъ.

Положивъ $P' = o$ и обративъ вниманіе на форм. (19), получимъ:

$$p - p' = 2\pi\varepsilon^2 \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'} + 4\pi\left(\frac{\theta}{K^2} - \frac{\theta'}{K'^2}\right)\right),$$

гдѣ θ и θ' суть коэффиціенты, указанные въ § 2. Такъ какъ эти коэффиціенты малы сравнительно съ діэлектрическими постоянными и оказываютъ незначительное вліяніе на разность $p - p'$, то можно сказать, что эта разность будетъ положительна при $K' > K$. Такимъ образомъ и здѣсь два смежные діэлектрическіе газа могутъ быть въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, когда давленіе менѣе совершеннаго діэлектрика изъ нихъ будетъ меньше давленія болѣе совершеннаго. Если давленія обоихъ газовъ равны, то діэлектрикъ менѣе совершенный будетъ расширяться и сжимать болѣе совершенный до тѣхъ поръ, пока разность давленій не достигнетъ указанной величины.

§ 7. Обращаясь къ изслѣдованію измѣненія давленій $p, p', p'', \ldots$ съ измѣненіемъ ε, мы доказываемъ совершенно также, какъ въ § 3, что эти давленія отъ ε не зависятъ и должны опредѣлиться по обыкновенной формулѣ Маріотта-Гейлюсака.

Дѣйствительно. Отрицательное приращеніе свободной энергіи отнесенной къ единицѣ площади будетъ:

$$-dF = P(dz + dz' + dz'' + \ldots) + P'(dz' + dz'' + \\ + dz''' \ldots) + \ldots - Hd\varepsilon.$$

Подставляя сюда $P, P', \ldots$ изъ форм. (20) и величину H изъ форм. (18), видимъ, что

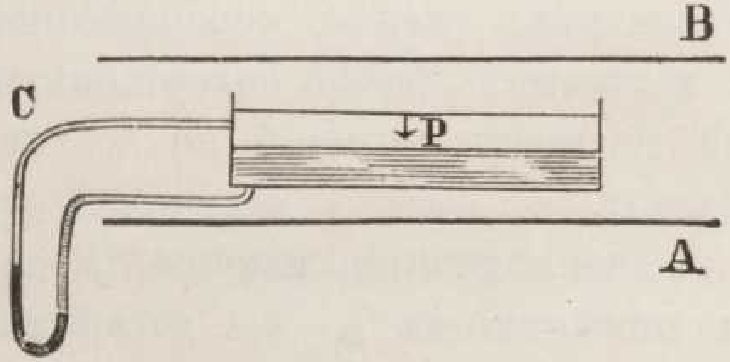
$$-dF = \left(p - \frac{dw}{dz}\right)dz + \left(p' - \frac{dw}{dz'}\right)dz' + \ldots \\ - \frac{dw}{d\varepsilon}\,d\varepsilon, \qquad (21)$$

откуда получаемъ:

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{dp'}{d\varepsilon} = \frac{dp''}{d\varepsilon} = \ldots = 0 \qquad (22)$$

§ 8. Переходимъ къ вопросу о измѣненіи въ зависимости отъ ε давленій p и p' въ насыщенномъ парѣ и его жидкости, предполагая здѣсь, что поверхность раздѣла пара и жидкости есть эквипотенціальная поверхность.

Пусть (фиг. 7) весьма широкій сосудъ, разсматриваемый въ § (6), заключаетъ въ себѣ жидкость и ея насыщенный паръ и имѣетъ только одинъ верхній горизонтальный поршень. Кро-



Фиг. 7.

мѣ соприкосновенія въ полѣ конденсатора паръ и жидкость соединяются еще трубкою C, выходящею изъ поля конденсатора, какъ это представлено на фигурѣ. Эта трубка будетъ отчасти разрушать однородность поля, но мы вообразимъ ее также какъ края сосуда и конденсатора весьма удаленною отъ изслѣдуемаго мѣста. Мы сейчасъ увидимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, какъ и въ прежнемъ, жидкость въ трубкѣ C, будетъ стоять ниже нежели въ конденсаторѣ. Предположимъ, что поршень закрѣпленъ. Испареніе жидкости или конденсація пара дѣлаются невозможными, и единственнымъ возможнымъ перемѣщеніемъ остается перемѣщеніе жидкости изъ конденсатора въ трубку C или наоборотъ. Пусть это перемѣщеніе охарактеризовано измѣненіемъ $dz = -dz'$. По началу возможныхъ перемѣщеній имѣемъ:

$$(p - p')dz - \left[\left(\frac{dw}{dz}\right) - \left(\frac{dw}{dz'}\right)\right] dz = 0,$$

откуда

$$p-p'=\left(\frac{dw}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dz'}\right). \qquad (23)$$

Здѣсь производная въ скобкахъ показываетъ, что не надо измѣнять K и K'. На основаніи форм. (19) полученная разность давленій представляется въ видѣ:

$$p-p'=2\pi\varepsilon^2\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{K'}\right). \qquad (24)$$

Такъ какъ $K'>K$, то давленіе жидкости будетъ менѣе давленія ея пара.

Обращаемся къ опредѣленію P. Для этого дѣлаемъ поршень подвижнымъ и сообщаемъ ему безконечно-малое перемѣщеніе вверхъ, испаряя воду въ трубкѣ C. Пусть при этотъ z возрастаетъ на dz, а z' убываетъ на $\frac{\rho}{\rho'}dz$, гдѣ ρ и ρ' выражаютъ плотность пара и жидкости. По началу возможныхъ перемѣщеній будемъ имѣть:

$$(-P+p)\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)dz+(p-p')\frac{\rho}{\rho'}dz-$$
$$-\left(\left(\frac{dw}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dz'}\right)\frac{\rho}{\rho'}\right)dz=0.$$

Подставляя сюда $p-p'$ изъ форм. (23) и дѣлая сокращенія, находимъ:

$$P=p-\left(\frac{dw}{dz}\right) \qquad (25)$$

или по форм. (19)

$$P=p+2\pi\varepsilon^2\left(\frac{1}{K_0}-\frac{1}{K}\right). \qquad (26)$$

Далѣе по принципу свободной энергіи пишемъ:

$$-dF = P(dz + dz') - Hd\varepsilon.$$

Подставляемъ сюда P изъ форм. (25) и прибавляемъ ко второй части величину, тождественно равную нулю по форм. (23):

$$\left\{p' - \left(\frac{dw}{dz'}\right) - \left[p - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right]\right\} dz' = 0.$$

Получаемъ:

$$-dF = \left(p - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right)dz + \left(p' - \left(\frac{dw}{dz'}\right)\right) dz' - \frac{dw}{d\varepsilon} d\varepsilon. \quad (27)$$

Здѣсь также какъ въ § 5 беремъ съ нѣкоторымъ приближеніемъ:

$$dz = -\frac{\rho'}{\rho} dz',$$

гдѣ величины плотностей опредѣляемъ при $\varepsilon = 0$.

Принимая это во вниманіе находимъ, что

$$-dF = \left\{\left(p - \frac{\rho}{\rho'} p'\right) - \frac{\partial w}{\partial z}\right\} dz - \frac{dw}{d\varepsilon} d\varepsilon. \quad (28)$$

Здѣсь ∂ выражаетъ измѣненіе по z, считая z' функціею z. Такъ какъ вторая часть форм. (28) должна быть полнымъ дифференціаломъ, то

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(p - \frac{\rho}{\rho'} p'\right) = 0. \quad (29)$$

Такимъ образомъ величина, стоящая въ скобкахъ, не измѣняется и имѣетъ при всякомъ ε то же значеніе, какое при $\varepsilon = 0$.

Назовемъ чрезъ p_0 давленіе пара и жидкости при $\varepsilon = 0$ и напишемъ, что

$$p - \frac{\rho}{\rho'} p' = \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) p_0. \quad (30)$$

Рѣшая ур. (30) и (24), получаемъ:

$$\begin{aligned} p &= p_0 - 2\pi\varepsilon^2 \frac{\rho}{\rho' - \rho}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'}\right), \\ p' &= p_0 - 2\pi\varepsilon^2 \frac{\rho'}{\rho' - \rho}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Мы видимъ, что здѣсь, также какъ въ § 5, давленіе насыщеннаго пара и соприкасающейся съ нимъ жидкости съ увеличиваніемъ силы поля уменьшаются, но главное уменьшеніе падаетъ на жидкость.

Мы предполагали при выводѣ форм. (25) и (28), что испареніе совершается въ трубкѣ C; но тѣ же результаты будутъ имѣть мѣсто, когда предположимъ входы въ трубку C закрытыми.

Чтобы сравнить форм. (31) съ форм. (15) преобразуемъ первыя на основаніи форм. (16) и (17):

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \frac{\rho}{\rho' - \rho}\,\frac{RR'}{2}\,(k' - k) \\ p' &= p_0 - \frac{\rho'}{\rho' - \rho}\,\frac{RR'}{2}\,(k' - k). \end{aligned} \tag{32}$$

Такъ какъ $R' < R$, то при той же силѣ поля въ парѣ форм. (32) даетъ для p большую величину нежели форм. (15). Такимъ образомъ нельзя трактовать о измѣненіи упругости насыщеннаго пара въ электрическомъ полѣ независимо отъ направленія силовыхъ линій къ поверхности раздѣла пара и жидкости. Собственно говоря, весь эффектъ электрическаго поля состоитъ въ томъ, что оно способствуетъ конденсаціи и испаренію при находящемся надъ жидкостью парѣ, *который для* $\varepsilon = 0$

есть паръ ненасыщенный. Вслѣдствіе этого становится понятнымъ, что эффектъ этотъ будетъ измѣняться съ измѣненіемъ направленія уровня жидкости.

Въ давленіи же самаго пара при данной плотности, такъ же какъ и въ давленіи газа, измѣненіе поля никакихъ измѣненій, по нашему мнѣнію, не производитъ. Если бы мы заперли входы въ трубку C потомъ испарили всю воду въ конденсаторномъ сосудѣ фиг. 7 и разрядили конденсаторные листы, то получился бы въ сосудѣ ненасыщенный паръ.

§ 9. Предположимъ, что поверхность жидкости внутри конденсатора въ сосудѣ фиг. (7) прикрыта поршнемъ, на который дѣйствуетъ нѣкоторая сила P' и напишемъ вмѣсто форм. (8) слѣдующую:

$$P' = \left(p' - \left(\frac{dw}{dz'}\right)\right) - \left(p - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right). \qquad (33)$$

Формулу же (25) при этомъ надо будетъ сохранить, такъ какъ при неподвижномъ нижнемъ поршнѣ и при подвижномъ верхнемъ будемъ имѣть по началу возможныхъ перемѣщеній:

$$(-P + p)\ dz - \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = 0.$$

Поступая далѣе, какъ при выводѣ форм. (21), получимъ форм. (27) для совершенно произвольныхъ перемѣщеній dz и dz'.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{dp}{dz} = \frac{dp'}{dz} = 0. \qquad (34)$$

Такимъ образомъ, если въ электрическомъ полѣ нѣтъ свободной поверхности жидкости, то p и p' имѣютъ то же значеніе, какое они имѣютъ при данномъ расположеніи системы, когда $\varepsilon = 0$.

То же самое можно сказать и о сосудѣ, изображенномъ на фиг. (5).

Вообразимъ теперь, что конденсаторъ разряженъ и поднимемъ нижній поршень, надъ уровнемъ жидкости въ трубкѣ C на высоту δ, соотвѣтствующую высотѣ всасыванія при зарядѣ ε.

Обыценныя соображенія по аэростатикѣ приведутъ насъ къ заключенію, что насыщенный паръ будетъ лежать только надъ поверхностью жидкости въ трубкѣ. Поднимаясь же отъ этой поверхности вверхъ, мы будемъ получать паръ при данной температурѣ ненасыщенный, давленіе котораго будетъ убывать.

Надъ поверхностью нижняго поршня будетъ лежать паръ съ давленіемъ:

$$p = p_0 - \rho\delta.$$

Подставляя сюда по форм. (24):

$$\delta = \frac{2\pi\varepsilon^2}{\rho' - \rho}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'}\right), \tag{35}$$

получимъ:

$$p = p_0 - \frac{2\pi\varepsilon^2\rho}{\rho' - \rho}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'}\right). \tag{36}$$

Сообщимъ теперь конденсатору зарядъ ε, отъ котораго p и p' не измѣняются по сказанному, и потомъ отнимемъ нижній поршень (который вообразимъ столь тонкимъ, что его вліяніе на w въ форм. (19) безконечно мало). Получимъ равновѣсіе системы, такъ какъ жидкость не будетъ всасываться въ конденсаторъ вслѣдствіе выбора δ, а конденсація или испареніе, какъ замѣтилъ Blondlot, не будутъ имѣть мѣсто.

Это разсужденіе доказываетъ высказанное нами мнѣніе, что паръ надъ поверхностью жидкости въ конденсаторѣ имѣетъ плотность ненасыщеннаго пара.

§ 10. Доказанной нами теоремѣ о независимости характеристической формулы, выражающей давленіе діэлектрическаго газа по его плотности и температурѣ, отъ силы электрическаго поля противорѣчатъ результаты, найденные кн. Б. Б. Голицынымъ въ сочиненіи «Общія свойства діэлектриковъ съ точки зрѣнія механической теоріи теплоты» [1]).

Въ этомъ сочиненія авторъ даетъ для давленія газа формулу [2]).

$$p=p_0-\frac{R^2}{2}\theta, \tag{37}$$

гдѣ p_0 есть давленіе, опредѣляемое по закону Маріотта - Гейлюсака; вслѣдствіе чего, по его мнѣнію измѣненіе силы поля измѣняетъ самую характеристическую формулу газа.

Но мы думаемъ, что выводъ кн. Голицына невѣренъ и является слѣдствіемъ ошибочнаго способа опредѣленія силы электрическаго дѣйствія на поршни.

Онъ не пользуется для этого выраженіемъ электрической энергіи и началомъ возможныхъ пере-

---

1) Ученыя записки Московскаго Университета, отдѣлъ физико-математическій. Вып. 10

2) Это есть въ сочиненіи Голицына фор. (1') въ § 2, которую мы пишемъ при своихъ обозначеніяхъ.

мѣщеній, а опредѣляетъ силу прямо, какъ взаимодѣйствіе электрическихъ массъ.

Такой способъ вообще сомнителенъ и, будучи приложенъ къ поршнямъ, изображеннымъ на фиг. 2, ведетъ къ очевидному противорѣчію съ началомъ возможныхъ перемѣщеній.

Кн. Голицынъ разсматриваетъ случай конденсатора (фиг. 6), въ которомъ самъ листъ B служитъ поршнемъ и имѣется только одинъ газъ. Въ нашей форм. (19) для этого случая надо взять:

$$h=z,\ z'=z''=\ldots=0.$$

Получимъ

$$w=\frac{2\pi\varepsilon^2}{K}z,$$

вслѣдствіе чего первая форм. (20) даетъ:

$$P=p-\frac{dw}{dz}=p-2\pi\varepsilon^2\left(\frac{1}{K}+\frac{4\pi\theta}{K^2}\right).$$

Голицынъ же пишетъ неправильно, что

$$P=p-\frac{2\pi\varepsilon^2}{K}.$$

Вслѣдствіе этого наша форм. (21) у него принимаетъ видъ:

$$-dF=\left(p-\frac{dw}{dz}+\frac{8\pi^2\varepsilon^2\theta}{K^2}\right)dz-\frac{dw}{d\varepsilon}d\varepsilon.$$

Это приводитъ къ условію:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(p+\frac{8\pi^2\varepsilon^2\theta}{K^2}\right)=0$$

и даетъ на основаніи форм. (17) выраженіе (37).