# МОДЕЛЬ

# МАЯТНИКА

# ГЕССА.

*Н. Е. Жуковскаго.*

Отдѣльный оттискъ изъ X тома Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.

**МОСКВА.**
Типографія М. Г. Волчанинова, Кудринская улица, домъ Кирѣевой.
**1899.**

# МОДЕЛЬ
# МАЯТНИКА
# ГЕССА.



*Н. Е. Жуковскаго.*



Отдѣльный оттискъ изъ X тома Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.

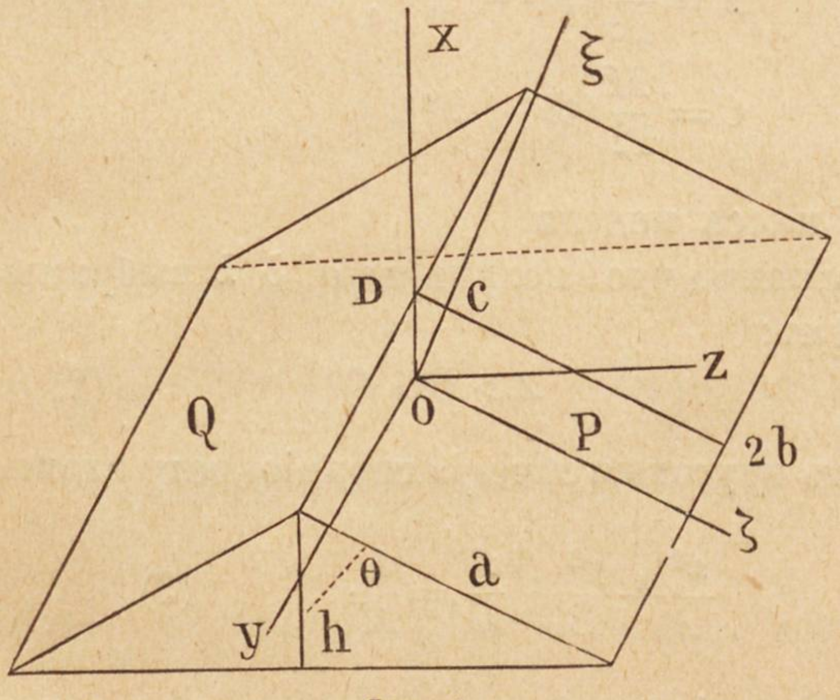


МОСКВА.
Типографія М. Г. Волчанинова, Кудринская улица, домъ Кирѣевой.
1899.

# Модель маятника Гесса.

## Н. Е. Жуковскаго.

Случай Гесса представляетъ движеніе тяжелаго твердаго тѣла, центръ тяжести котораго лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки опо-




Фиг. 1.

ры къ круговому сѣченію гираціоннаго эллипсоида твердаго тѣла относительно точки опоры. Укажемъ здѣсь одинъ простой способъ построенія модели такого тѣла. Вообразимъ (фиг. 1) двѣ прямоугольныя пластинки $P$ и $Q$ длины $a$, сложенныя основаніями $2b$ такъ, что плоскости ихъ образуютъ нѣкоторый уголъ $2\theta$ и вся модель имѣетъ форму крыши, высота которой пусть будетъ $h$.

Примемъ начало $o$ прямоугольныхъ осей координатъ $x$ $y$ $z$ въ центрѣ тяжести модели и направимъ ось $ox$ по оси ея симметріи, а ось $oy$ параллельно основаніямъ $2b$. Очевидно, что такія оси будутъ оси центральнаго эллипсоида инерціи нашего тѣла; легко показать, что моменты инерціи его относительно этихъ осей будутъ соотвѣтственно:

$$A = \frac{M}{12}(4a^2 + 4b^2 - 4h^2),$$

$$B = \frac{M}{12}(4a^2 - 3h^2), \qquad (1)$$

$$C = \frac{M}{12}(4b^2 + h^2),$$

гдѣ $M$ масса модели.

Полагаемъ, что величины $a$, $b$, $h$ выбраны подъ условіемъ:

$$A > B > C \qquad (2)$$

и ищемъ круговыя сѣченія гираціоннаго эллипсоида:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M}. \qquad (3)$$

Эти сѣченія пройдутъ чрезъ ось $oy$ и отклонятся отъ оси $ox$ съ двухъ сторонъ на уголъ $\theta$, опредѣляемый по формулѣ:

$$tg\theta = \sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}} \qquad (4)$$

Зададимся теперь условіемъ, чтобы плоскости кругового сѣченія были параллельны сторонамъ нашей крышеобразной модели, т. е. чтобы

$$\frac{C(A-B)}{A(B-C)}=\frac{a^2-h^2}{h^2}. \qquad (5)$$

Это даетъ намъ соотношеніе между $a$, $b$, $h$ слѣдующаго вида:

$$\frac{(4b^2+h^2)(4b^2-h^2)}{(4a^2+4b^2-4h^2)(4a^2-4b^2-4h^2)}=\frac{a^2-h^2}{h^2}. \qquad (6)$$

Возьмемъ одинъ простой частный случай, при которомъ это соотношеніе удовлетворяется. Допустимъ, что

$$4a^2-4b^2-4h^2=h^2,$$

$$h^2=\frac{4}{5}(a^2-b^2). \qquad (7)$$

При этомъ допущеніи форм. (5) принимаетъ видъ:

$$\left((4b^2+\frac{4}{5}(a^2-b^2)\right)\left(4b^2-\frac{4}{5}(a^2-b^2)\right)=\left(4a^2+4b^2-\right.$$

$$\left.-\frac{16}{5}(a^2-b^2)\right)\left((a^2-\frac{4}{5}(a^2-b^2)\right)$$

или

$$4(4b^2+a^2)(6b^2-a^2)=(a^2+9b^2)(a^2+4b^2) \qquad (8)$$

Чтобы удовлетворить этому условію, надо положить:

$$4(6b^2-a^2)=a^2+9b^2,$$

откуда

$$a=b\sqrt{3}. \qquad (9)$$

Подставляя эту величину $a$ въ ур. (6), находимъ:

$$h = b\sqrt{\frac{8}{5}}. \tag{10}$$

Такъ какъ всѣ четыре скобки въ форм. (8) при указанныхъ значеніяхъ $a$ и $h$ положительны, то эти значенія удовлетворяютъ неравенству (2). Предположивъ, что наша крышеобразная модель построена согласно форм. (9) и (10), опустимъ изъ ея центра тяжести $o$ перпендикуляръ $oC$ на ея сторону $P$.

Разстояніе $DC = \delta$ подошвы этого перпендикуляра отъ вершины крыши найдется изъ пропорціи:

$$\delta : \frac{1}{2} h = h : a;$$

Это разстояніе будетъ:

$$\delta = \frac{4}{15} b\sqrt{3}. \tag{11}$$

Въ модели, построенной мною для механическаго кабинета Московскаго Университета изъ тонкаго мѣднаго листа, взяты согласно форм. (9), (10), (11) и (4) слѣдующіе размѣры:

$$\begin{aligned} 2b &= 10 \text{ сант.}, \\ a &= 8{,}66, \\ h &= 6{,}32, \\ \delta &= 2{,}31, \\ tg\theta &= 0{,}935. \end{aligned} \tag{12}$$

Точка $c$, въ которой снизу стороны $P$ сдѣлано маленькое углубленіе, служитъ точкою опоры; ею на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ центра тяжести къ плоскости кругового сѣченія центральнаго гираціоннаго эллипсоида, параллельны этой послѣдней плоскости.

Приведемъ здѣсь доказательство упомянутой теоремы, нѣсколько отличное отъ доказательства автора.

Такъ какъ гираціонный эллипсоидъ получается изъ эллипсоида инерціи чрезъ опущеніе изъ центра послѣдняго перпендикуляровъ на его касательныя плоскости и черезъ откладыванія на этихъ перпендикулярахъ векторовъ, обратно пропорціональныхъ длинамъ перпендикуляровъ, то направленіе перпендикуляра къ круговому сѣченію гираціоннаго эллипсоида совпадаетъ съ направленіемъ оси круглаго цилиндра, описаннаго около эллипсоида инерціи. Повернемъ наши оси $xyz$ (фиг. 1) около оси $oy$ такъ, чтобы онѣ заняли положеніе $\xi y\zeta$, при чемъ ось $o\xi$ направляется по перпендикуляру $oC$. Уравненіе центральнаго эллипсоида инерціи относительно этихъ осей будетъ имѣть видъ:

$$F(\xi,y,\zeta)=\alpha\xi^2+By^2+\gamma\zeta^2+2\mathrm{E}\xi\zeta-1=0. \qquad (13)$$

Для точекъ прикосновенія къ этому эллипсоиду цилиндра, образующія котораго параллельны оси $o\xi$, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{d\xi}=\alpha\xi+\mathrm{E}\zeta=o$$

или

$$\xi=-\frac{\mathrm{E}}{\alpha}\zeta.$$

Подставляя эту величину въ ур. (13), мы получаемъ уравненіе линіи пересѣченія цилиндра съ плоскостью $y\zeta$:

$$By^2 + (\gamma - \frac{E^2}{\alpha})\zeta^2 = 1.$$

Такъ какъ по сказанному выше это уравненіе должно принадлежать окружности, то

$$B = \gamma - \frac{E^2}{\alpha}. \qquad (14)$$

Построивъ теперь эллипсоидъ инерціи для какой-нибудь точки $C$, лежащей на оси $o\xi$ и отнеся его къ осямъ $\xi' y' \zeta'$ параллельнымъ осямъ $\xi y \zeta$, мы выразимъ уравненіе этого эллипсоида въ такой же формѣ, какъ ур. (13):

$$\alpha'\xi'^2 + B'y'^2 + \gamma'\zeta'^2 + 2E'\xi'\zeta' = 0, \qquad (15)$$

при чемъ, если $oC = l$, то

$$\alpha' = \alpha,\ B' = B + Ml^2,\ \gamma' = \gamma + Ml^2,$$
$$E' = \Sigma m\xi'\zeta' = \Sigma m(\xi - l)\zeta = \Sigma m\xi\zeta = E.$$



Мы видимъ, что чрезъ прибавленіе къ обѣимъ частямъ ур. (14) величины $Ml^2$, мы обращаемъ это ур. въ

$$B' = \gamma' - \frac{E'^2}{\alpha'}, \qquad (16)$$

которое показываетъ, что цилиндръ, описанный около эллипсоида, даннаго ур. (15), параллельно оси $o\xi$, будетъ круглый, т. е. плоскость $y'\zeta'$ будетъ круговымъ сѣченіемъ гираціоннаго эллипсоида для точки $C$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что построенная модель удовлетворяетъ условію Гесса.

Съ этою моделью можно сдѣлать одну простую демонстрацію, характеризующую движеніе въ случаѣ Гесса. Отмѣтивъ (фиг. 2) на пластинкѣ $P$ какую-нибудь прямую, проходящую чрезъ $C$, повернемъ модель на остріи $EC$ такъ, чтобы эта прямая расположилась подъ неподвижною стрѣлкою $L$; потомъ двинемъ немного подставку $F$ по столу въ направленіи перпендикулярномъ къ $L$; тогда увидимъ, что модель будетъ колебаться около точки $C$, при чемъ плоскость $P$ будетъ все время оставаться параллельной стрѣлкѣ $L$, а проведенная прямая будетъ уклоняться отъ стрѣлки то направо, то налѣво.