Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

заслуженный профессор Моск. Высш. Техническ. У-ща и Гос. Моск. Унив.

Сборник Задач

по СТАТИКЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ С ДОПОЛНЕНИЯМИ И ВСТУПИТЕЛЬНОЙ СТАТЬЕЙ ПРОФ. МОСКОВСК. ВЫСШ. ТЕХНИЧ. УЧИЛИЩА ИНЖ.-МЕХ. В. П. ВЕТЧИНКИНА.

МОСКВА.

1922.

Н. Е. ЖУКОВСКИЙ
заслуженный профессор Моск. Высш. Техн. Уч.
и Гос. Моск. Унив.

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
СТАТИКЕ

под редакцией с дополнениями и вступительной статьей пр. Моск. Высш. Техн. Уч.
инж. мех. В. Л. ВЕТЧИНКИНА

Издание Мастерской Учебных Пособий М.В.Т.У.
1922.

Изданием заведывали студенты:
А. А. Горяинов и А. Д. Тьянков.

Тираж 530 экз.

Литография при Мастерской Учебных Пособий М.В.Т.У.
Коровий брод 3.

Предисловие.

Настоящий сборник заключает в себе: а) все задачи по статике, помещенные в задачнике проф. Н. Е. Жуковского, выпущенном Студенческой Издательской Комиссией при М.В.Т.У. в 1907 году, б) задачи, находившиеся в листках Н.Е. Жуковского, которые он раздавал студентам М.В.Т.У. и М.У. на упражнениях и экзаменах; такие задачи имеют пометку: (листок Н.Е.)., в) наиболее интересные задачи, заимствованные из других сборников, главным образом Виттенбауэра, Мещерского и В. П. Ветчинкина (еще не издан); при них в скобках поставлена ссылка на источник или первоисточник, (напр., Эйлер, Аптер.).

Рассматривая целый ряд задачников различных авторов, я пришел к убеждению, что задачник Н. Е. Жуковского является наиболее интересным и разносторонним. Главное отличие задачника Н. Е. от всех остальных заключается в подборе примеров, характеризующем необычайную разносторонность его деятельности и оригинальность его духа. Многие из помещенных у Н. Е. задач встречаются также и в других сборниках, из которых он выбирал лишь наиболее интересные. Вполне оригинальных задач у Н. Е. сравнительно немного (но весьма вероятно, что многие задачи, помещенные в различных сборниках, попали туда из аудитории Н. Е.). Поэтому я счел возможным дополнить сборник Н. Е. Жуковского и другими задачами, согласными с его духом, тем более, что о многих из этих задач я разговаривал лично с Н. Е., причем он одобрил их к изданию в будущем своем сборнике.

В. Ветчинкин

Москва 29-X-22 г.

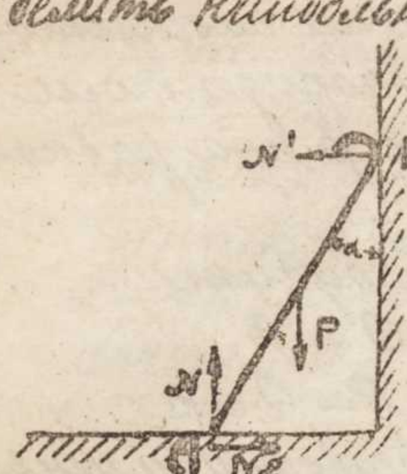
Введение.

По степени трудности и методам решения задачи статики можно подразделить на несколько типов. В простейших из них ответ виден непосредственно. Рассмотрим одну из таких задач:

Пример 1. Детский мячик в сетке висит на стене. Определить давление на стену и натяжение нити. Из разложения сил, пересекающихся в одной точке сразу видно что $N = P\,tg\,\alpha$ $\quad T = \frac{P}{\cos\alpha}$.

Во втором типе для получения ответа приходится решить ур-ие 1ой степени:

Пример 2. Палка АВ стоит на шероховатом полу и опирается на гладкую стену. Определить наибольшее значение $\angle\alpha$ при равновесии.



Составим ур-ие проекций:

$$N = P\ ; \quad N' = Nf = Pf \text{ ----- } (a)$$

и ур-ие моментов относительно точки A: $P\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha = N' l\cos\alpha$

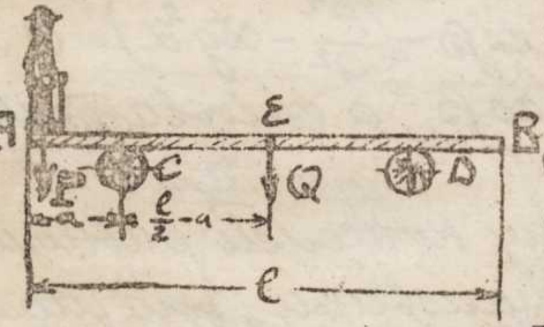
откуда $N' = \frac{P}{2}\,tg\,\alpha$ ----- (в)

Сравнивая (a) и (в), найдем:

$$tg\,\alpha \leqq 2f,$$

где f — коэффициент трения.

Пример 3. На двух бревнах C и D лежит доска AB для перехода через канаву. Расположить



бревна так, чтобы при всех возможных положениях пешехода, веса P, доска подвергалась наименьшему изгибающему моменту.

Наибольшие моменты будут при положении пешехода в точках A и B и в середине доски E. Они будут равны соответственно:

$$P.a \quad \text{и} \quad \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right).$$

Приравнивая эти моменты, получим:

$$2a = \frac{l}{2} - a \quad \text{и} \quad a = \frac{l}{6}$$

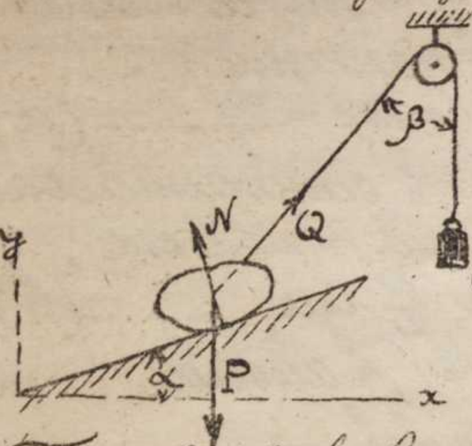
Определим для данного случая наименьший вес доски Q, при котором она не опрокинется, если не будет прибита к бревнам.

Из ур-ия $Q\left(\frac{l}{2} - a\right) = Pa$, находим $Q = \frac{P}{2}$.

Следующий тип задач приводит к ур. 2-ой степени:

Пример 4. Две силы P и Q действуют на

нить, перекинутую через блок C. Груз Q свободен, а P опирается на плоскость, образующую с горизонтом $\angle \alpha$. Найти $\angle \beta$ при равновесии. $Q < P$.



Ур. проекций будут:

$$N \sin\alpha = Q \sin\beta$$

$$N \cos\alpha = P - Q \cos\beta$$

Подставляя во второе ур-ие N из первого и заменяя $\sin\beta$ через $\sqrt{1-\cos^2\beta}$, получим:

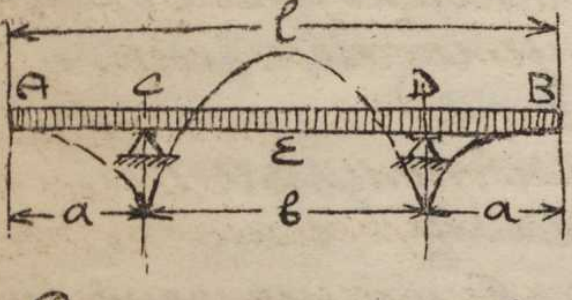
$$\operatorname{ctg}\alpha \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{P}{Q} - \cos\beta$$

что приведет нас к ур-ию:

$$(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)\cos^2\beta + 2\frac{P}{Q}\cos\beta - \left(\frac{P^2}{Q^2} - \operatorname{ctg}^2\alpha\right) = 0,$$

из которого определится $\cos\beta$, а следовательно и $\angle\beta$.

Пример 5. Найти длину консолей равномерно нагруженной балки под условием, что моменты над опорами равнялись моменту в середине.



Нагрузку на единицу длины через q.

Момент в точке C:

$$M = q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{qa^2}{2}.$$

Реакции опор равны каждая $\frac{ql}{2}$. Момент в точке E:

$$M_1 = \frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4} - \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right) = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{4} - \frac{l}{2} + a\right)$$

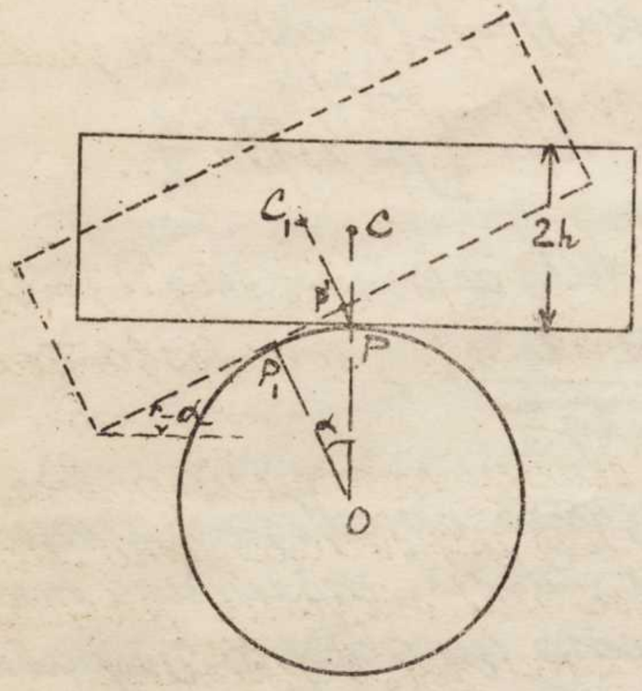
$$= \frac{ql}{2}\left(a - \frac{l}{4}\right).$$

Приравнивая M к M_1, получим:

$a^2 = l(a-\frac{l}{4})$; $a^2 - la + \frac{l^2}{4} = 0$; $a = \frac{l}{2}$.

Другие задачи приводятся нередко к более сложным урр. алгебраическим или трансцендентным. Решим одну из таких задач:

Пример 6. На круглом цилиндре диаметра $d=2r$, покрытом мелкими продольными насечками, лежит в равновесии пластинка толщины $2h$, нижняя сторона которой покрыта такими же насечками предохраняющими пластинку от скольжения. Найти при какой толщине пластинки равновесие будет устойчивое и при какой - неустойчивое.



Известно, что равновесие - устойчивое, когда центр. тяжести занимает наинизшее положение сравнительно с соседними и наоборот. Найдем насколько поднимется центр тяжести, когда пластинка немного перекатившись по цилиндру, наклонится под $\angle\alpha$ к горизонту. Возвышение центра тяжести C над осью цилиндра было: $y_0 = r+h$

Теперь оно будет: $OP_1 \cos\alpha + P_1P' \sin\alpha + P'C_1 \cos\alpha$.

Заметив, что точка P' пластинки в положении равновесия прикасалась к цилиндру, найдем $PP' = r\alpha$, после чего высоту центра тяжести C найдем равной:

$$y = r\cos\alpha + r\alpha\sin\alpha + h\cos\alpha$$

Равновесие устойчивое, если $y > y_0$.
Если $y = y_0$, то равновесие безразличное. Тогда получим:

$$r + h = r\cos\alpha + r\cdot\sin\alpha\cdot\alpha + h\cos\alpha$$

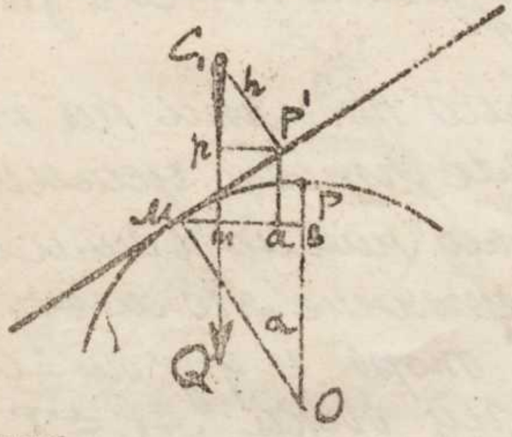
или $$r\left[\alpha\sin\alpha - (1-\cos\alpha)\right] = h(1-\cos\alpha)$$

или $$r\left[\alpha\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right] = h\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

или $$r\left(\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

откуда $$h = r\,\frac{\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Полагая $\alpha = 0$, получим, что при безразличном равновесии $h = r$. Если $2h > d$, толщина пластинки превышает диаметр цилиндра, то равновесие неустойчивое. Роль зубчатой насечки в этой задаче могут играть силы трения. На опыте всякий может убедиться в справедливости полученного решения. Вопрос об устойчивости равновесия лежащего на цилиндре бруска может быть решен и другим способом: равновесие устойчивое, если момент веса бруска относительно точки опоры M является восстанавливающим, т.е. стремится вернуть брусок в первоначальное положение. Этот момент будет $Q\cdot Mm$ и вопрос об устойчивости равновесия сводится к вопросу о знаке множителя при Q.



Этот множитель будет:

$$Mm = Mb - ab - ma =$$
$$= r\sin\alpha - ab - P'p$$

В свою очередь: $P'p = h\sin\alpha$

и $ab = r\sin\alpha - r\alpha\cos\alpha$

Следовательно равновесие устойчивое, когда:

$$r\sin\alpha - (r\sin\alpha - r\alpha\cos\alpha) - h\sin\alpha > 0,$$

т.е. когда $r\alpha - h\,tg\,\alpha > 0$.

Брусок не опрокинется в случае, если $h < r\frac{\alpha}{tg\,\alpha}$. Это показывает, что брусок, устойчивый при бескон. малых отклонениях от положения равновесия, может опрокинуться при отклонении на некоторый конечный угол α, если его толщина заключена в пределах:

$$2r\frac{\alpha}{tg\,\alpha} < 2h < 2r.$$

Таким образом брусок на цилиндре имеет „зону равновесия", заключающуюся в пределах:

$$\alpha \gtrless \frac{h}{r}\,tg\,\alpha$$

При $\frac{h}{r}$ близком к 1, положим $\frac{h}{r} = 1 - \varepsilon$ и разложим $tg\,\alpha$ в ряд по степеням α:

$$tg\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^5}{5} + \dots$$

Тогда $\alpha \gtrless (1-\varepsilon)\left(1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^4}{5} + \dots\right)\alpha$

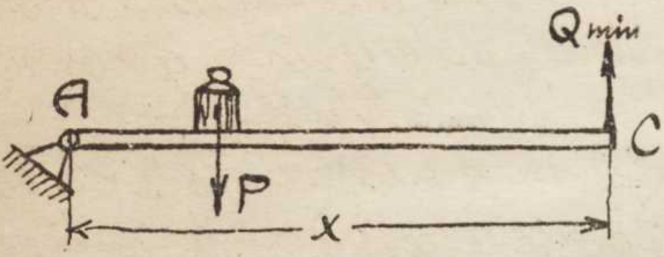
или $1 \gtrless 1 - \varepsilon\left(1 + \frac{\alpha^2}{3} + \dots\right) + \frac{\alpha^2}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\alpha^2 + \dots\right)$

и $\frac{\alpha^2}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\alpha^2 + \dots\right) < \varepsilon\left(1 + \frac{\alpha^2}{3} + \dots\right)$

Отсюда, наконец, находим зону равновесия

при малых α : $\alpha \cong \sqrt{3\varepsilon}$ и $\alpha^\circ = 57{,}^\circ 3\sqrt{3\left(1-\frac{h}{r}\right)}$.
Переходим к следующему типу задач, требующих отыскания max. или min. некоторой функции. Примером может служить такая задача.

Пример. 7. Груз P необходимо поднять на тяжелой доске AC под условием, чтобы усилие Q было наименьшим.

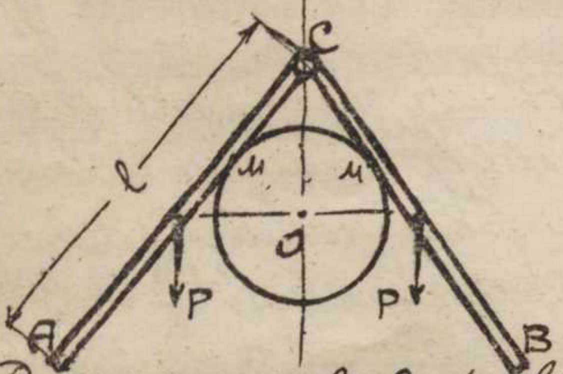


Расстояние AB между ручкой опоры и грузом $= a$, длину доски $AC = x$ можно выбирать по желанию. Вес единицы длины доски $= q$.
Ур-ие моментов относительно точки A дает
$$Pa + qx\frac{x}{2} = Qx$$
откуда
$$Q = P\frac{a}{x} + \frac{q}{2}x = min.$$
Дифференцируя и приравнивая первую производную нулю, получим : $x = \sqrt{\frac{2Pa}{q}}$.
Когда приходится встречаться со сложной системой, то нужно рассматривать как равновесие всей системы в целом, так и равновесие каждой отдельной ее части. При рассмотрении равновесия всей системы выгодно пользоваться так называемым „принципом отвердения". Например, предположить, что все шарниры и сочленения системы затянуты болтами и никакие относительные перемещения частей системы невозможны*). Решим несколь-

*) Такой же принцип отвердения можно применить и к

ко примеров:

Пример. 8. Две весомых палочки AC и BC, длины l, соединены шарниром в точке C и свободно висят на гладком цилиндре, диаметра d. Определить угол раскрытия 2α при равновесии.



Условие равновесия системы, как целого дает:

$$N = \frac{QP}{\sin\alpha}.$$

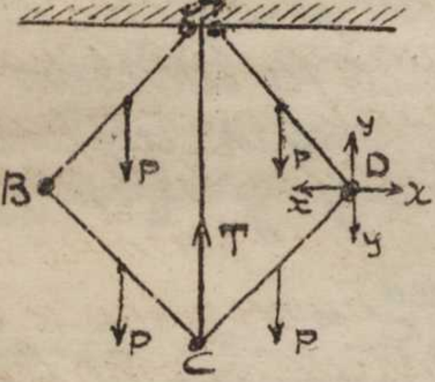
Рассматривая равновесия палочки AC отдельно, составим для нее ур-ие моментов относительно шарнира C, замечая, что $MC = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$:

$$P\frac{l}{2}\sin\alpha = N r\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{P\cdot r\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

и можем найти $\angle\alpha$ из ур-ия:

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{d}{l}$$

Пример 9. Четыре одинаковых весомых стержня AB, BC, CD и DA, соединены шарнирами и удерживаются тягой AC. Определить ее натяжение T.



Рассмотрим равновесие стержня AD отдельно:

Ур-ие проекций дает:

$$Q\cos\varphi + Y = P$$

$$Q\sin\varphi = X$$

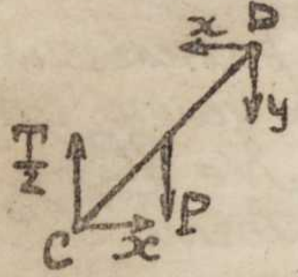
Из ур-ия моментов относительно точки A

жидкостям, допустив, напр., что интересующий нас об'ем воды со всеми погруженными в него телами замерз.

находим:

$$P\frac{l}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = Xl\frac{\sqrt{2}}{2} + Yl\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Получилось три ур. с 4 неизвестными. Недостающее ур-ие получим рассматривая равновесие нижней палочки СД:



Имеем: $\frac{T}{2} = P + Y$

$$P\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = Xl\frac{\sqrt{2}}{2} - Yl\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Теперь можем найти, что $Y = 0$, $T = 2P$, $X = \frac{P}{2}$

Значительно проще задачи на сложные системы решаются на основании принципа возможных перемещений (метода Лагранж'а) Здесь все внутренние силы между частями системы исключаются. Решая методом Лагранж'а пример 8-ой, мы должны будем написать, что при бесконечно-малом раскрытии ножек циркуля работа силы тяжести равна 0; иначе, что центр тяжести циркуля не меняет своей высоты. Центр тяжести циркуля лежит ниже оси цилиндра на величину: $y = \frac{l}{2}\cos\alpha - \frac{r}{\sin\alpha}$

Дифференцируя, получим:

$$\delta y = -\frac{l}{2}\sin\alpha + \frac{r\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

откуда сразу приходим к ур.-ию:

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{d}{l}$$

Как более общий, метод Лагранж'а дает дополнительные заключения об устойчивости равно-

весия: оно неустойчиво, если $y<0$ и циркуль соскользнет с цилиндра, на котором повешен.
Еще проще выходит решение примера 9го. При опускании точки C на малую величину δy центр тяжести палочек AB и AD, очевидно, опустится на $\frac{\delta y}{4}$, а палочек BC и CD на $\frac{3}{4}\delta y$.
Сумма работ сил P будет:

$$2P\frac{\delta y}{4}+2P\frac{3}{4}\delta y=2P\delta y=T\delta y$$

Отсюда сразу находим $T=2P$.
Но не всегда общие методы дают кратчайшее решение. Например, в случаях, когда перемещения точек приложения сил в методе Лагранж'а выражаются более или менее сложными функциями главного перемещения; решение методом проекций и моментами может оказаться короче. Как на пример можно указать на задачу № 163 этого сборника, в которой, при решении ее методом проекций, приходится оперировать с геометрическими центрами полушаров, а в методе Лагранжа — с центрами тяжести.

В. Вeтчинкин

Москва 29-X-22 г.

Условные обозначения:

Кружками (○) перед номером обозначены задачи, требующие знания элементов аналитической геометрии и дифференциального исчисления; сплошными кружками (●) – задачи, требующие знания интегрального исчисления или представляющие какие-либо трудности.

Статика.

Пересекающиеся силы.

1. К середине горизонтальной веревки, прикрепленной концами к неподвижным точкам A и B, подвешен груз в 54 кгр. Угол, образуемый при этом веревкой = 120°. Найти давление в точках A и B. Отв. 54 кгр.

2. Барка тянется против течения реки при помощи двух бечев с усилием в 200 фун. на одной и 150 фун. на другой. Угол, образуемый бечевами = 80°. Найти равнодействующую и углы, которые должны составлять бечевы с берегами, если барка движется параллельно последним. Отв. $R = 270{,}04$ кгр. $\alpha = 33°10'$ $\beta = 46°50'$.

3. Сила в 20 пудов действует на точку сверху вниз под углом в 60° к неподвижной горизонтальной плоскости. Найти вертик. давление и горизонтально-сдвигающую силу. Отв. Давление = 17,32 пуд. Сдвиг = 10 пуд.

4. Точка подвержена действию трех взаимно перпендикулярных сил в 36., 67 и 98 кгр., не лежащих в одной плоскости. Найти равнодействующую по величине и направлению. Отв. $R = 124{,}052$ кгр. углы: $\alpha = 73°7'47''$; $\beta = 57°18'35''$; $\gamma = 37°48'56''$.

5. На точку действуют в одной плоскости одновременно четыре силы: в 7, 12, 20 и 42 кгр. Первая и третья взаимно перпендикулярны также, как вторая и четвертая; кроме того силы 7 и 12 образуют угол в 30°. Найти равнодействующую. Отв. Направив положительную ось X параллельно силе в 7 кгр., получим по способу разложения: $R = 62{,}477$ и $\angle Rx = 93°18'37''$

6. Три силы: $F = 50$, $F' = 32$ и $F'' = 45$, приложенные

к одной точке, должны быть направлены в одной и той же плоскости так, чтобы точка находилась в равновесии. Отв. $\angle FF' = 117°56'$, $\angle FF'' = 100°59'20''$, $\angle FF''' = 141°4'40''$.

7. К точке приложены силы p и p' в одну сторону, q и q' — в другую. В первом направлении должна быть прибавлена сила X, а во втором — nX и тогда равнодействующая равна нулю. Определить X. Отв. $X = \frac{(p+p')n-(q+q')}{n-1}$.

8. На точку действуют силы p и p' с одной, q и q' с другой стороны. Какую силу X надо отнять от первых сил и придать ко вторым, чтобы было равновесие?

Отв. $X = \frac{(p+p')-(q+q')}{2}$.

9. На точку действуют силы в 12 и 41,4 кгр. по противоположным направлениям. Когда к первой приложим X, а ко второй Y, то сумма сил будет равна 4440 кгр. и вся система уравновесится. Найти X и Y.

Отв. $X = 2208$ кгр.; $Y = 2178,6$ кгр.

10. Две силы, каждая в 12 кгр., образуют между собою угол в 30°. Определить равнодействующую этих сил.

Отв. 23,184 кгр.

11. Дан угол $BAC = 45°$. По AB действует сила в 1 кгр., а по AC в 2 кгр. Определить равнодействующую.

Отв. 2,798

12. Какой угол заключен между силами в 3 и 4 кгр., если равнодействующая = 5 кгр. Отв. 90°.

13. Как относятся между собою две силы, если угол между ними = 135°, а равнодействующая равна меньшей силе? Отв. $\sqrt{2} : 1$.

14. Две силы относятся, как 2:3. Равнодействующая их равна $\frac{1}{2}$ большей силы. Определить угол между

этими силами. Отв. 150°.

15. Три силы, действующие на одну точку тела и лежащие в одной плоскости, находятся в равновесии; они относятся между собою, как $(1+\sqrt{3}):(\sqrt{6}):2$. Определить углы между этими силами. Отв. 105°, 120° и 135°.

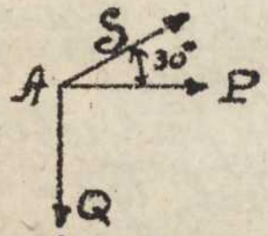
16. Разложить силу в 20 кгр. на две силы, сумма которых равна 22 кгр. и которые образуют между собою угол в 60°. Отв. 17,0828 кгр. и 4,9172 кгр.

17. В окружности проводят диаметр AB и две равные

хорды CD и EF, перпендикулярные к диаметру. Определить равнодействующую сил AC, AE, AF и AD

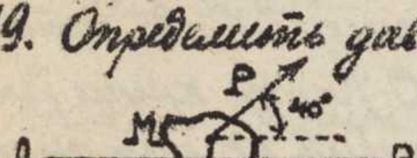
Отв. 2 AB.

18. Даны три силы P, Q и S, каждая в 1 кгр., приложенные



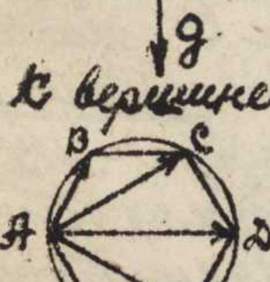
к одной точке A. Сила P — горизонтальна, Q — вертикальна, а S образует с P угол в 30° и направлена вверх. Определить равнодействующую. Отв. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

19. Определить давление тела M на стол AB, если вес



тела M — q = 70 кгр., и если на тело, кроме тяжести, действует еще сила P = 50 кгр. под углом в 40°. Отв. 37,86 кгр.

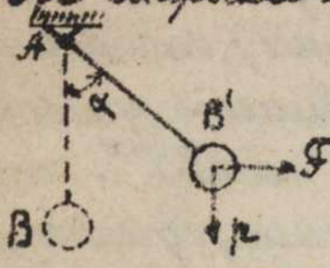
20. К вершине A правильного шестиугольника ABCDEF



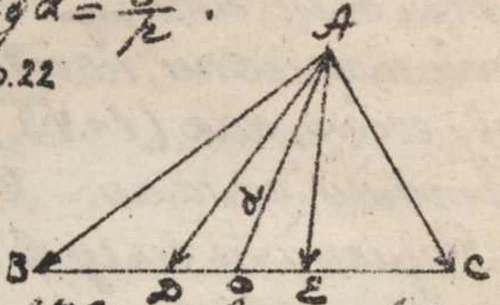
приложено пять сил: AB, AC, AD, AE и AF. Определить равнодействующую этих сил. Отв. 3 AD.

21. Тяжелый шарик B привязан за конец нити AB, укрепленной в неподвижной точке A. Его отклоняют

от вертикального положения силою F. Определить ∠α, если вес шарика = p. Отв. $tg\alpha = \frac{F}{p}$.



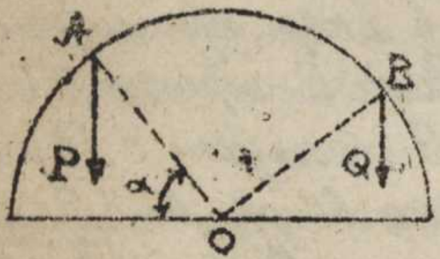
Черт. к зад. 21 | Черт. к зад. 22



22. Основание BC треугольника ABC разделено в точках D и E на три равные части; линия AO, соединяющая вершину A с серединою основания, равняется d. Определить равнодействующую сил AB, AD, AE и AC.

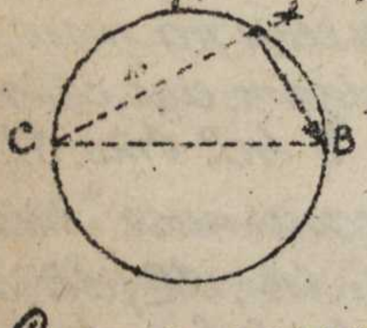
Отв. 4d.

23. На вертикальном полукруге помещен невесомый шнур AB, длина которого равняется 1/4 всей окружности. На концах шнура помещены две весомые точки A и B, веса которых P и Q. Определить ∠α при равновесии.



Отв. $tg\alpha = \frac{P}{Q}$

24. Дана хорда AB, представляющая силу. Определить другую хорду AC того же круга так, чтобы, рассматривая ее как силу, приложенную в точке C, нашли бы возможно большую равнодействующую.



Отв. $AC = \sqrt{4r^2 - AB^2}$

25. Силу p разложить на две силы так, чтобы их отношение было = m:n. Найти величины составляющих сил.

Отв. $\frac{mp}{\sqrt{m^2+n^2}}$; $\frac{np}{\sqrt{m^2+n^2}}$

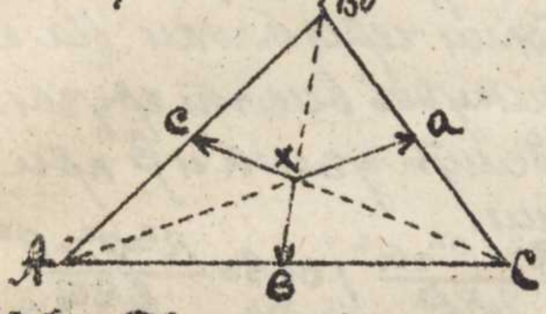
26. Силу a разложить на две силы под прямым углом так, чтобы разность составляющих сил ра-

вписалась b. Отв. $\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$; $\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$.

27. Разложить силу R на две силы P и Q так, чтобы они образовали между собою угол в 120° и чтобы $P+Q=d$.

Отв. $P=\frac{3d\pm\sqrt{3(4R^2-d^2)}}{6}$; $Q=\frac{3d\mp\sqrt{3(4R^2-d^2)}}{6}$.

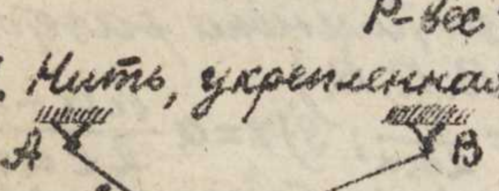
28. Вершины треугольника ABC соединены с серединами a, b и c противоположных сторон. Найдя точку x, в которой пересекаются линии Aa, Bb и Cc, прилагают к ней три силы xa, xb и xc. Доказать, что эти силы будут уравновешиваться.



29. По направлению трех высот треугольника действуют силы, направленные к углам его и пропорциональные соответствующим основаниям. Показать, что эти силы находятся в равновесии. (Petersen.)

30. Человек сидит в корзине, которую тянет вверх с помощью веревки, привязанной к корзине и перекинутой вверху через неподвижный блок. Определить силу натяжения веревки. (Листок Н.Е.). Отв. $F=\frac{P+Q}{2}$, где P - вес человека, а Q - вес корзины.

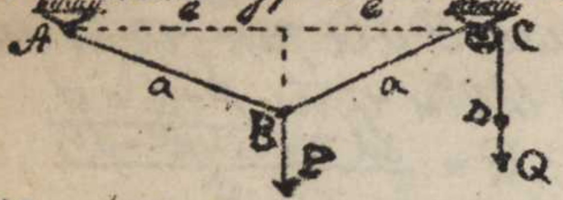
31. Нить, укрепленная концами в A и B, несет в C груз P. Определить натяжения S_1 и S_2 в частях нити $AC=a$ и $BC=b$, если угол $ACB=\gamma$ известен. Дать и графическое решение. (Виттенбауэр).



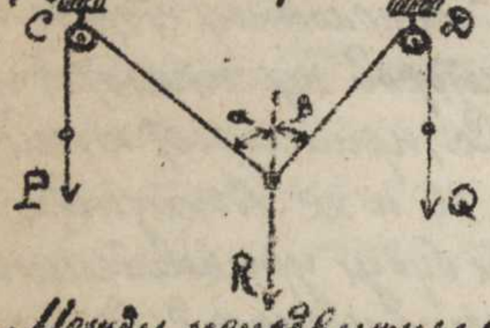
Отв. $S_1=P\frac{b-a\cos\gamma}{\sin\gamma\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$; $S_2=P\frac{a-b\cos\gamma}{\sin\gamma\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$.

32. Нить $ABCD$ укреплена в точке A и перекинута в точке C через блок. В точке B на нить действует сила P, продолжение которой делит линию AC пополам.

Эта сила уравновешивается силой Q, действующей на точку D. Определить связь между силами P и Q. Отв. $P\frac{a}{2\sqrt{a^2-b^2}}=Q$

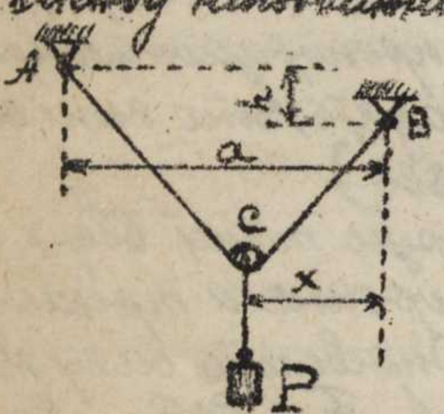


33. Груз R поддерживается двумя шнурами, в точках C и D перекинутыми через блоки. На концах этих шнуров висят грузы P и Q. Определить углы α и β при равновесии.



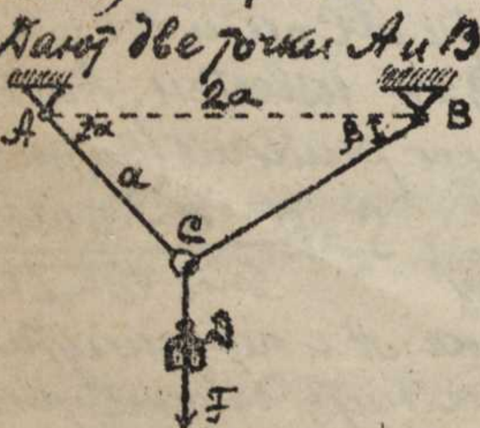
Отв. $\cos\alpha=\frac{R^2+P^2-Q^2}{2RP}$; $\cos\beta=\frac{R^2+Q^2-P^2}{2RQ}$.

34. Между неподвижными точками A и B, горизонтальное расстояние которых a и вертикальное h, протянута нить ACB длины l. На нить надет маленький блок C и к нему привешен груз P. Найти: 1) Углы наклонения нитей AC и BC к вертикали; 2) натяжения нитей; 3) Положение блока C при равновесии, определяемое горизонтальным расстоянием X от нижней опоры B. (В. П. В.)



Отв. 1) $\alpha=\alpha_1$, $\sin\alpha=\frac{a}{l}$; 2) $T=T_1=\frac{P}{2\cos\alpha}$; 3) $x=a\frac{l\cos\alpha-h}{2l\cos\alpha}$.

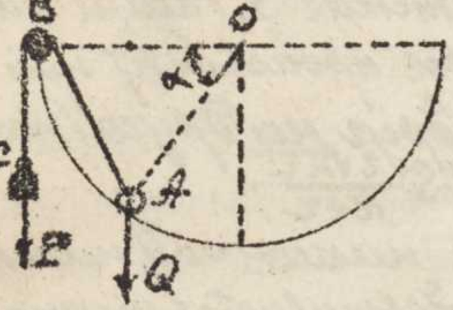
35. Даны две точки A и B на одной горизонтальной прямой, отстоящие друг от друга на 2a. В точке A прикреплен шнур, равный a, на конце которого привязано кольцо C. В точке B прикреплен шнур BCD, который продевают сквозь кольцо и на котором привешивают груз в точке D. Определить угол α при равно-



весии. Отв. Определяется из ур-ния: $4\cos^2\alpha-\cos\alpha-2=0$

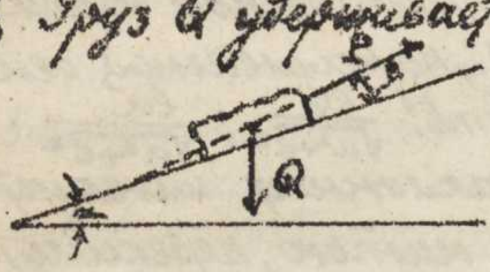
$\alpha=32^\circ32'$; $\beta=24^\circ56'$

36. На вертикальном полукруге помещен шарик A,



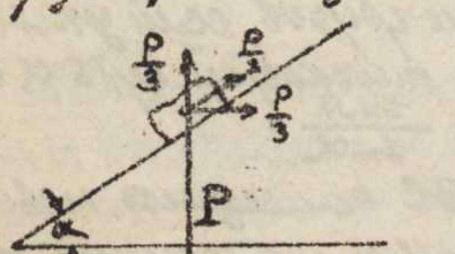
который может двигаться только по кругу. Этот шарик удерживается в равновесии нитью ABC, перекинутой в точке B через блок и обремененной в точке C грузом P. Определить угол α при равновесии, если вес шарика $=Q$. Отв. $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{P+\sqrt{P^2+8Q^2}}{4Q}$.

37. Груз Q удерживается на наклонной плоскости силою



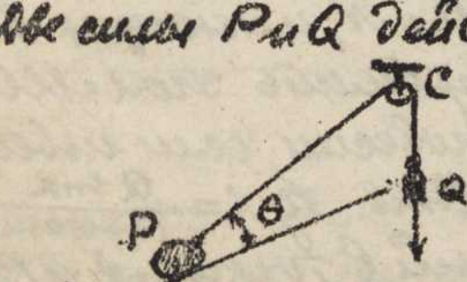
P, образующей с плоскостью N угол β. Определить P, если наклонение плоскости к горизонту $=\alpha$. Отв. $P=\frac{Q\sin\alpha}{\cos\beta}$.

38. Груз P, лежащий на наклонной плоскости, удерживается



тремя силами $=\frac{P}{3}$, из которых одна горизонтальна, другая параллельна наклонной плоскости, а третья вертикальна. Определить угол α наклонения плоскости. Отв. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

39. Две силы P и Q действуют на нить, перекинутую че-



рез блок C. Груз Q свободен, а P опирается на плоскость, образующую с горизонтом $\angle\alpha$, и вся система находится в равновесии. Определить $\cos\theta$ — угла, который делает ни-

ния CP и давление точки P на плоскость.

Отв. $\cos\theta = \frac{P\sin\alpha}{Q}$; $R = P\cos\alpha - \sqrt{Q^2 - P^2\sin^2\alpha}$.

40. Два цилиндра стянуты канатом так, что последний

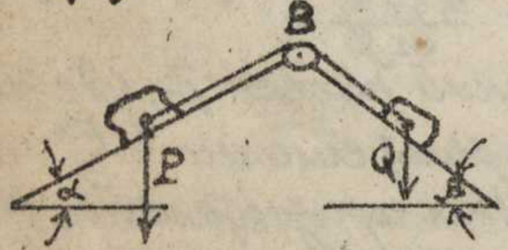
имеет натяжение S. Найти давление D, которое производят при этом цилиндры друг на друга (Walton).
Отв. $D = 2S\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$.

41. Определить высоту и основание наклонной плоскости, длина которой l, если груз в a кгр. удерживается силою в b кгр., полагая силу b параллельной длине l.

Отв. $\frac{lb}{a}$; $\frac{l}{a}\sqrt{a^2-b^2}$.

42. Определить высоту и основание наклонной плоскости, длина которой l, если сила в b кгр., параллельная основанию удерживает груз a кгр. Отв. $\frac{lb}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{la}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

43. Грузы P и Q, лежащие на наклонных плоскостях,



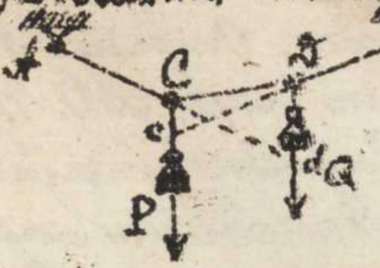
соединены нитью, перекинутой в точке B через блок. Определить отношение грузов, если углы наклонения плоскостей суть α и β.
Отв. $\frac{P}{Q} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

44. В полусферической чаше ABC помещена невесомая

палочка MN, на концах которой прикреплены два весьма малых шарика M и N, имеющих веса P и Q. Определить угол MOB при равновесии, если известно, что хорда MN стягивает дугу в α°. Отв. $\operatorname{tg} x = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$.

45. Шнурок ACDB, укрепленный в точках A и B, поддерживает два груза P и Q, привязанные в точках C и D.

Продолжим AD до пересечения с силою P в точке C и AC до пересечения с силой Q в точке d. Требуется доказать пропорцию



$$P : Q = Ad : Ce$$

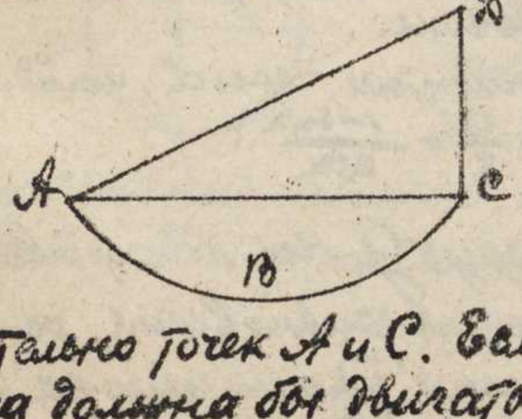
46. На середины сторон плоского многоугольника действуют силы, перпендикулярные к сторонам его и пропорциональные их длинам. Показать, что такие силы уравновешиваются, если они направлены все вне или все внутрь многоугольника.

Замечание. Нужно доказать эту теорему сначала для треугольника; потом легко перейти и к многоугольнику.

47. На средины сторон разомкнутого многоугольника действуют силы, перпендикулярные к его сторонам и пропорциональные им. Определить равнодействующую.

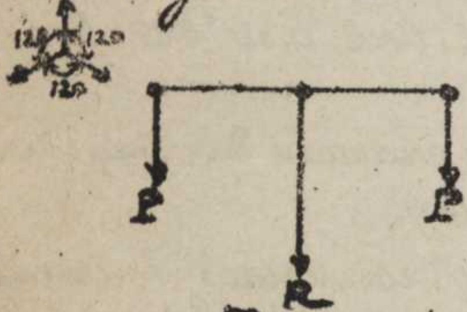
Отв. Равнодействующая перпендикулярна к замыкающей стороне, делит ее пополам и пропорциональна ея длине.

48. Теорема параллельных сил была обнаружена Стевеном. Он доказал ее, опираясь на невозможность вечного движения. Возьмем наклонную плоскость ABC и вообразим,



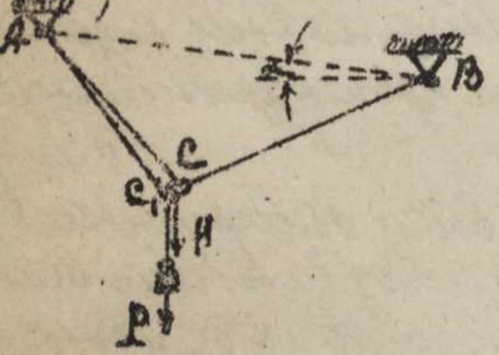
что она окружена однородной весомой нитью ABCD. Конец нити ABC висит внизу и принимает от действия силы тяжести форму ABC, симметричную относительно точек A и C. Если бы нить пошла в движение, то она должна бы двигаться всегда, а следов. она должна быть в равновесии. Равновесие не нарушается, если отрезать часть АВС, ибо оба конца этой части нити тянут ее в точках А и С одинаково сильно. Отрезая АВС, получим, что нить АС уравновешивает нить АД. Требуется на основании соображений Стевена доказать, что равнодействующая направлена по диагонали параллелограмма.

49. Пользуясь аксиомой, что три равных силы, действующих под углом в 120° на одну точку, уравновешиваются — доказать, что



равнодействующая двух равных сил, направленных в одну сторону, равна их сумме и точка приложения ее находится посредине линии, их соединяющей. (Это доказательство было дано Фурье.)

50. Нерастяжимая и невесомая нить АСВ, длиною в 2р, укреплена неподвижно в точках А и В. На эту нить надето кольцо веса Н. В точке А укреплена другая нить, проходящая через это кольцо, к которой прикреплен груз Р. Определить



углы А и В при равновесии.

Отв. Называя угол, делаемый АВ с горизонтом, через α, найдем:

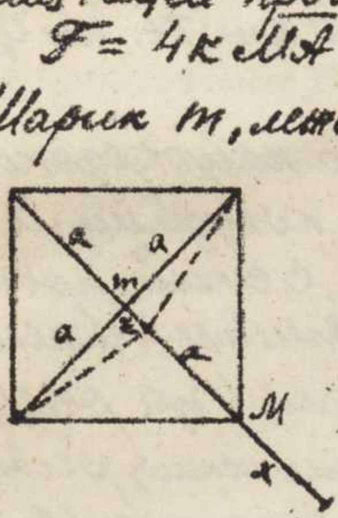
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{p-c}{p}\,\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

51. На упругой нити подвешен груз Q. На какую величину x вытянется нить до наступления равновесия, если натяжение нити пропорционально удлинению ее, и коэффициент пропорциональности $= k$. Отв. $x=\frac{Q}{k}$.

52. В центре A квадрата помещена точка, связанная со всеми углами его четырьмя одинаково натянутыми упругими нитями; точку отводят в некоторое положение M и затем отпускают. Найти силу, действующую при этом на M, если силы натяжения нитей пропорциональны их длинам. (Walton).

Г' Отв. $F = 4k\overline{MA}$, где k сила нат. нити, соотв. единице длины ея.

53. Шарик m, лежащий в центре квадрата, притягивается четырьмя одинаковыми и одинаково натянутыми резинками a, a, a, a к вершинам квадрата. Точка прикрепления, находящаяся в M, перемещается на x по направлению соответственной диагонали. Насколько переместится шарик m? Отв. $z = \frac{x}{4}$ (литер. Н.З.)



54. Упругий шнур обвивает блок, вес которого g; шнур в ненатянутом состоянии имеет длину $l_0 = 2\pi r$, равную длине окружности блока. Блок подвешивают за этот шнур к точке O, так что шнур растягивается и принимает длину l. Определить угол φ при равновесии, если натяжение шнура S, пропорционально его удлинению.

Отв. Угол φ определяется из трансцендентного ур-ния

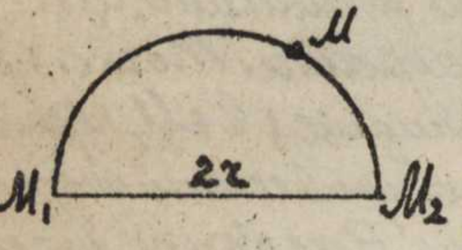
$$\cos\varphi\left(\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{q}{4kr} \quad \text{(Кеттенбауэр)}.$$

55. На линии Земля-Луна находится т.н. нейтральная точка, в которой притяжения Земли и Луны равны и

противоположно направлены. Найти расстояния этой точки от Земли $(R-x)$ и от Луны (x), если расстояние R между ними равно 384400 км., а масса Луны $m=\frac{1}{81}$ массы Земли M (Жюль Верн) Отв. $x = 38440$ км.

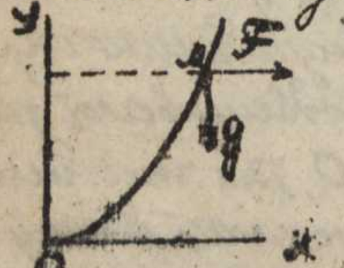
56. Найти такое же расстояние нейтральной точки на линии **Земля–Солнце**, если расстояние их $R =$ $= 149,4$ миллион. км.; а масса Солнца в 328129 раз более массы Земли. Отв. $x = \frac{R}{573} = 261000$ км., т.е. на 0,68 расстояния до Луны (В.П.В.)

57. Свободная точка M движется по полуокружности и притягивается концами M_1 и M_2 диаметра ее, с силой, пропорц. соотв. расстояниям и имеющей значение k для 1-го расстояния. Определить положения равновесия



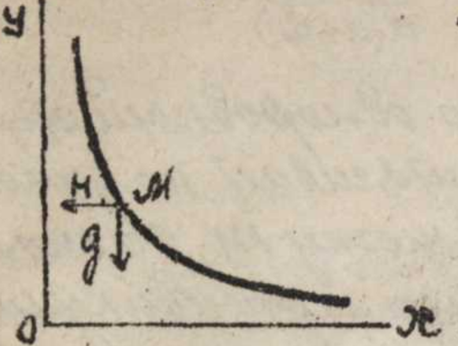
точки M и сопротивление W полуокружности. (Витенбауэр)
Отв. Для каждой точки полуокружности $W = 2kr$ и равновесие.

°58. Точка M, веса Q, может скользить без трения по дуге параболы, выраженной уравнением $y = ax^2$; она отталкивается от оси параболы горизонтальной (центробежной) силой $F = m\omega^2 x$. Определить положения равновесия точки M.



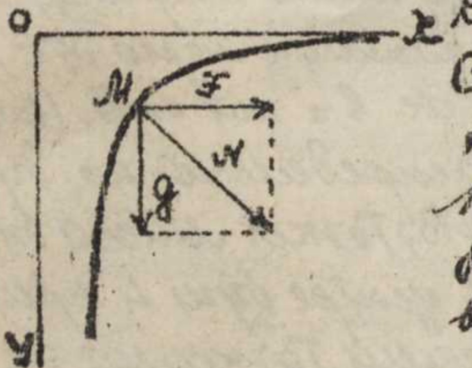
Отв. Точка M будет в безразличном равновесии на всей длине параболы, если $a_0 = \frac{m\omega^2}{2Q}$. При $a > a_0$, т.е. при более крутой параболе, точка будет оставаться в равновесии – только внизу; при $a < a_0$, т.е. при более пологой параболе точка будет из нее выброшена совсем. [Мещ. Н.Е.]

°59. Точка M, веса Q, может перемещаться по гиперболе выраженной ур-нием $xy=a^2$. Какую горизонт. силу H притяжения к оси OY нужно приложить к данной точке, чтобы она оставалась в равновесии во всякой точке на гиперболе. Найти давление N, оказываемое при этом точкой на гиперболу. (Виттенбауэр.)



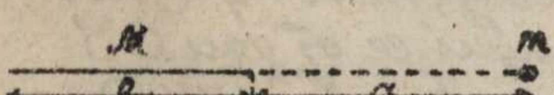
Отв. $H = q\frac{a^2}{x^2}$; $N = q\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

60. Материальная точка M, веса q, отталкивается от вертикальной оси OY с горизонтальной силой F, обратно-пропорциональной кубу расстояния: $F = \frac{ma^2}{x^3}$. Найти кривую, на которой она была бы в безразличном равновесии, а также нормальное давление N точки на кривую. По таким кривым располагаются в поперечных сечениях вихревые воронки вращающейся жидкости. (В.П.В.)



Отв. $x^2y = \frac{ma^2}{2q}$; $N = \sqrt{q^2 + \left(\frac{ma^2}{x^3}\right)^2}$.

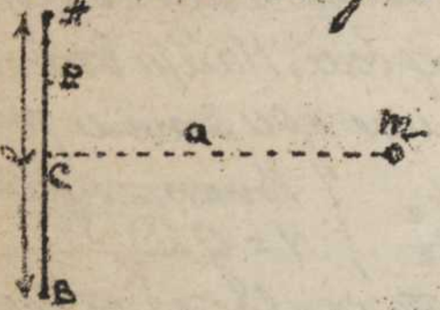
61. На продолжении однородного стержня, длина которого $= l$ и масса $= M$, находится точка, имеющая массу m; она притягивается всеми частицами стержня по закону Ньютона. Найти полное притяжение R, испытываемое точкой m. (Виттенбауэр.)



Отв. Если $dM = \mu dx$ — элемент массы стержня, где μ — масса единицы длины, а x — расстояние элемента dx от m, то обозначив k силу притяжения единицы масса на единицу расстояния, получим:

$$R=\int_a^{a+l}\frac{km\,dM}{x^2}=k\mu m\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2}=\frac{kMm}{a(a+l)}.$$

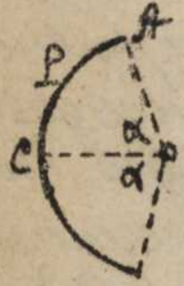
°62. Найти силу R, с которой однородный стержень



$AB=l$ притягивает по закону Ньютона точку m, расположенную на перпендикуляре к середине стержня, если масса его $=M$ и масса точки $=m$.

Отв. Обозначая через $dM=\mu dz$ элемент массы стержня, μ — массу единицы длины его, $z=PC$ расстояние элемента массы от C, $\angle PmC=\varphi$ и $Pm=x$, найдем $R=\frac{kMm}{ab}$, где $b=mA=mB$. (Виттенб.)

°63. Масса M равномерно распределена по дуге



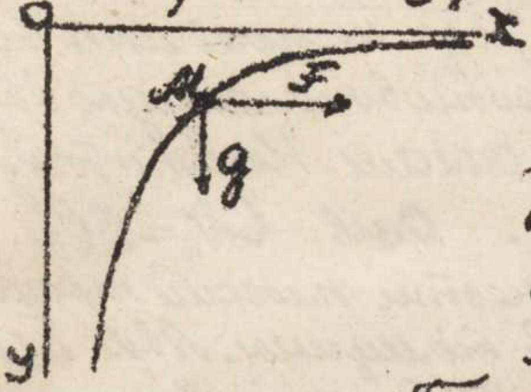
круга AB; точка масса m находится в центре дуги и притягивается всеми точками ея по закону Ньютона. Найти силу R взаимного притяжения масс M и m. (Виттенбауэр). Отв. Если $dM=\mu r d\varphi$ — элемент массы в некоторой точке P, вся масса $M=\mu r 2\alpha$, $\angle PmC=\varphi$, то $R=\frac{km\mu}{r}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{kMm\sin\alpha}{r^2\alpha}$

°64. Материальная точка M, веса Q, находится под влиянием силы, отталкивающей ее от оси OY обратно пропорц. расстоянию $F=\frac{k^2}{x}$ (центробежная сила при постоянной окружной скорости точки, которая равна $\frac{mv^2}{x}$). Найти ур-ние кривой (вернее, вогнутой части в виде тела вращения), на

которой точка M весь была бы в равновесии. (В.П.В.)

Отв. $y - y_0 = \frac{k^2}{g} \lg \frac{x_0}{x}$.

65. Материальная точка M, веса g, находится под влиянием отталкивательной силы от оси OY, равной $2g\frac{y}{x}$. Найти ур-ние кривой, на которой возможно равновесие точки M.



Отв. $x^2 y = const$. т.е. тоже что в зад. №60. (В.П.В.).

Параллельные силы.

66. Две параллельные силы, действующие на концы прямой a в одну сторону, дают равнодействующую, проходящую на расстоянии b от точки приложения одной из них. Определить отношение этих сил. Отв. $\frac{b}{a-b}$.

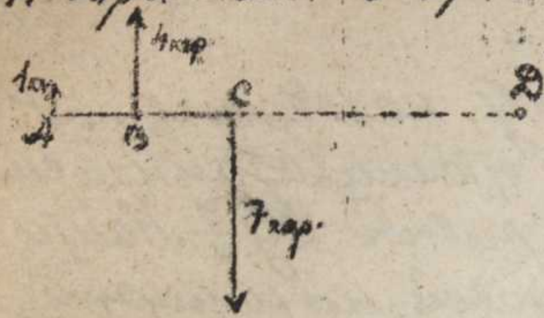
67. Определить длину линии, на которую действуют в одну сторону силы p и p', если точка приложения равнодействующей находится на расстоянии a от силы p. Отв. $\frac{a(p+p')}{p'}$.

68. Сила p разложена на две параллельные и действующие в одну сторону. Отношение их = m : n. Расстояние же их точек приложения = a. Определить их точки приложения. Отв. $\frac{an}{m+n}$; $\frac{am}{m+n}$.

69. Груз в 200 кгр. подвешен на балке, концы которой подперты. Точка, в которой подвешен груз, находится на 1/4 балки. Определить давление на концы. Отв. 150 и 50.

70. Определить давление на каждую ножку квадратного стола грузом в 80 кгр., положенным на 1/4 одной из диагоналей. Отв. 45, 15, 15 и 5 кгр.

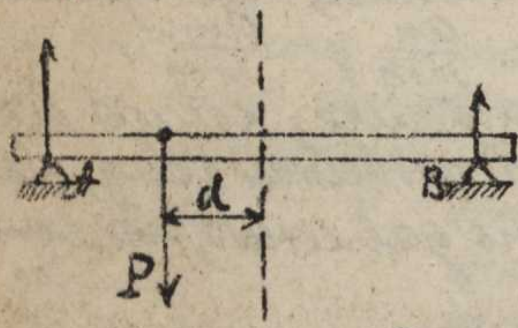
71. Три силы в 1, 4 и 7 кгр. приложены к трем точкам А, В и С, лежащим на одной прямой; при этом дано АВ=ВС=l. Сила в 7 кгр. направлена в сторону противоположную двум первым силам. Найти точку Д приложения равнодействующей. Отв. СД = 3l.



72. Четыре человека должны нести плоский треугольник, однородный и одинаковой толщины. Двое из них берутся каждый за вершину. Где должны браться двое других, чтобы сила тяжести распределилась поровну. Отв. Эти две точки находятся на линии, соединяющей свободную вершину с серединой противоположной стороны, на расстоянии 1/3 этой линии, считая от свободной вершины.

73. Три человека должны нести плоский, однородный и одинаковой толщины параллелограмм. Один взялся за вершину. Где должны взяться двое других, чтобы сила распределилась поровну.

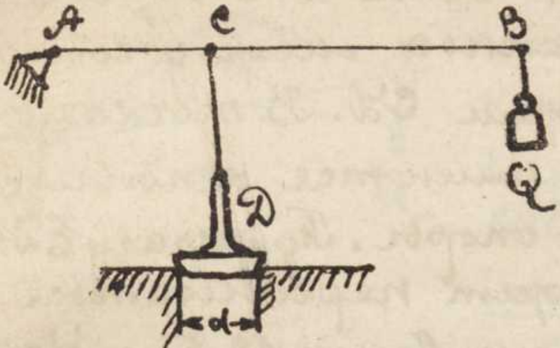
74. Брусок АВ, длина которого = 2l и вес которого соответствует p кгр. на единицу длины, поддерживает груз P, помещенный на расстоянии d от середины бруска. Определить давление бруска на подпоры А и В.



Отв. $pl + P\frac{l+d}{2l}$; $pl + P\frac{l-d}{2l}$.

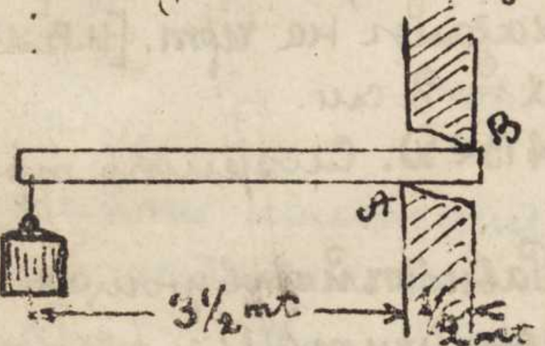
75. Предохранительный клапан Д парового котла соединен стержнем СД с однородным рычагом АВ

длины 50 ст. и веса 1 кгр., вращающимся вокруг неподвижной точки A и несущим на конце B противовес Q. Диаметр клапана $d = 6$ ст., $AC = 7$ ст. Каков должен быть вес груза Q, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле в 11 атмосфер. (1 метрическая атм. = = 1 кгр. на ст.²)



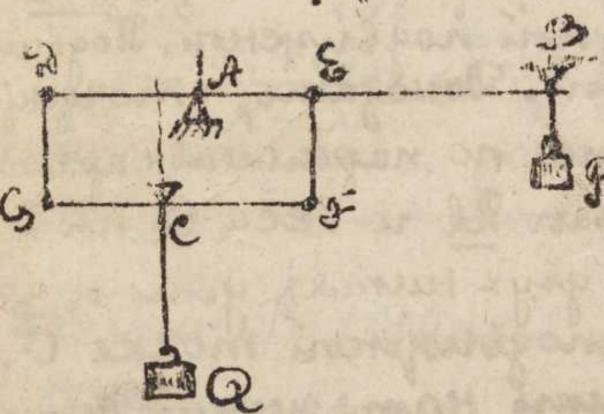
Отв. $Q \cong 43$ кгр. [И. В. Мещерский].

76. Железная балка, длиной 4 метра и весом в ½ тонны, заделана в стену, ширина которой = ½ mt. и опирается на нее в точках A и B. Определить в этих точках реакции, если к концу овины подвешен груз в 4 тн.?

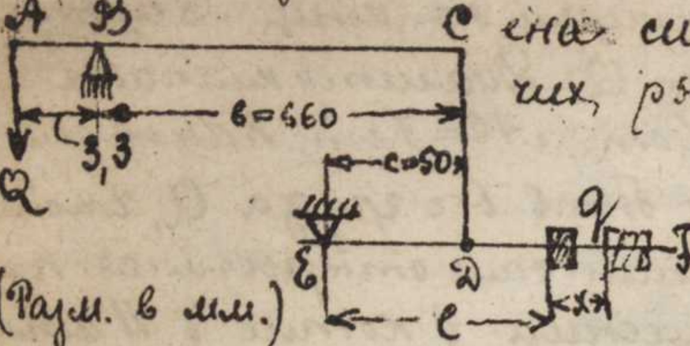


Отв. $R_A = -34$ тн. $R_B = +29{,}5$ тн. [И. В. Мещерский].

77. Какой груз Q уравновешивается грузом P = 1 кг. на дифференциальном рычаге, если AB = 1 мт., а расстояние между вертикалями, проведенными через острия (ножи) A и C равны 1 мм. AD = AE = 25 ст. GC = 24,9 ст. CF = 25,1 ст. В A неподвижная точка опоры, в D, G, E и F — шарниры. [Мещер.]. Отв. Q = 1 тн



78. Для измерения очень больших усилий Q устроена система двух неравноплечих рычагов ABC и EDF, соединенных между собою тяжем CD. В точках <u>B</u> и <u>E</u> имеются неподвижные опоры. По рычагу EDF может передвигаться груз q весом 12,5 кг. На

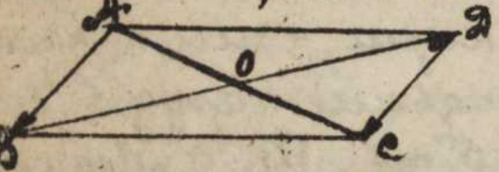


(Разм. в мм.)

какую длину <u>x</u> надо передвинуть груз <u>q</u> при увеличении нагрузки Q на 1000 кгр., чтобы сохранилось равновесие. Размеры указаны на черт. [И.В. Мещер.]

Отв. $x = 2$ см.

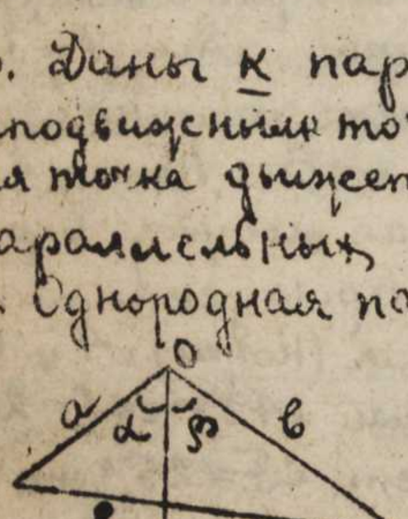
79. Дают параллелограм ABCD. Сложить три силы AB, DC и BD.



Отв. Равнодействующая пройдет через центр O и будет равна AC.

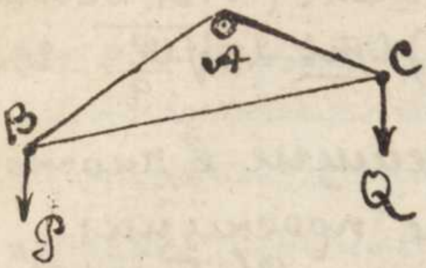
80. Даны <u>K</u> параллельных сил, приложенных к <u>K−1</u> неподвижным точкам и к одной подвижной. Подвижная точка движется по прямой. Доказать, что центр параллельных сил движется по параллельн. прямой.

81. Однородная палочка длины <u>2l</u> и веса Q подвешена на двух нитях длины <u>a</u> и <u>b</u> в неподвижной точке O. Определить натяжение нитей [Листок Н.Е. Жуковского].



Отв. $T = \dfrac{a\cdot Q}{\sqrt{2a^2+2b^2-4l^2}}$; $T_1 = \dfrac{b\cdot Q}{\sqrt{2a^2+2b^2-4l^2}}$;

82. Два неравных груза P и Q соединены невесомой линией BC. В точках B и C прикреплен шнур ABC, длина которого $= l$ и который в A перекинут через блок. Определить длины AB и AC при равновесии.

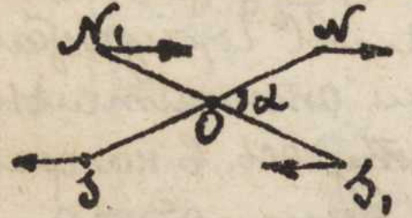


Отв. $\overline{AB} = l\cdot\frac{Q}{P+Q}$; $AC = l\cdot\frac{P}{P+Q}$;

83. Ломанный однородный рычаг BAC прикреплен к нити за точку B. Дано, что угол $A = 90^\circ$, $\overline{AC} = 2a$; $\overline{AB} = 2b$. Определить угол α при равновесии.

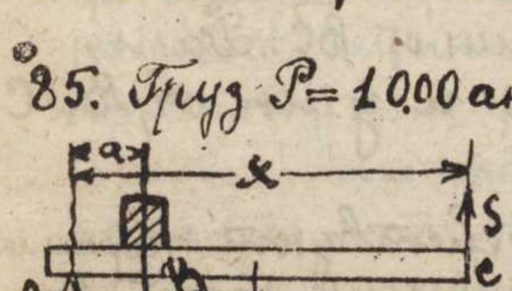
Отв. $tg\alpha = \frac{a^2}{2ab+b^2}$;

84. Найти положение равновесия немного расстроенной астатической магнитной стрелки. [Лиср. Н.Е.Ж.]



Отв. Если стрелка (NS) сильнее стрелки (N_1S_1), то вся система повернется по часовой стрелке на угол φ, определяемой ур-нием: $tg\varphi = \frac{N+N_1}{N-N_1}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; магнитный момент расстроенной стрелки равен: $M = \frac{M_0}{\cos\varphi}$, где $M_0 = a(N-N_1)$ есть магнитный момент не расстроенной системы, (т.е. при $\alpha = 0$).

85. Груз $P = 1000$ англ. фунтов, лежащий на рычаге, на расстоянии 2 фут. от опоры A, нужно поднять силой S, приложенной к другому концу рычага (C). Положив вес рычага $q = 10$ фунт. (св),



на погонный фут, определить такую длину рычага x, чтобы сила S оказалась наименьшей. (G. A. Osborne. Differential and Integral Calculus.) Отв. $x=\sqrt{\frac{2P.a}{q}}=20$ ф.

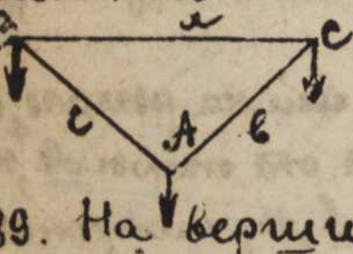
Моменты

86. Даны три силы P, P', P'' лежащие в плоскости xy и имеющие следующие проекции: $пр_x P = 3$ кг.; $пр_y P = 2$ кг.; $пр_x P' = -1$; $пр_y P' = 5$; $пр_x P'' = -2$; $пр_y P'' = -4$. Координаты точек приложения сил: $x = 1$; $y = 5$; $x' = 2$; $y' = -3$; $x'' = -1$; $y'' = 0$; к данным силам прибавляем новую силу F, параллельную оси y и проходящую через точку: $x = 8$; $y = 0$. Определить силу F так, чтобы равнодействующая проходила через начало координат. Отв. $F = 1/4$ кгр.

87. Прямоугольная однородная доска $ABCD$, имеющая вес P, наклонена к горизонту под углом в $45°$ и расположена так, что линия AC горизонтальна. Определить момент веса доски относительно

оси AB, считая эту ось в направлении от A к B. Дано $AD = a$.
Отв. $m_x(P) = -\frac{Pa}{2\sqrt{2}}$.

88. На вершины тр-ка действуют равные параллельные силы. Определить расстояние центра



параллельных сил от BC. Даны стороны a, b, c и углы A, B и C.
Отв. $\frac{b.\sin C}{3}$.

89. На вершины тр-ка ABC действуют параллельные силы, пропорциональные длинам противоположных сторон. Определить расстояние центра па-

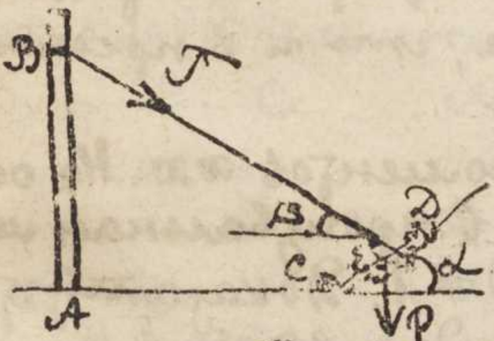
раллельных сил от стороны ВС. Даны стороны а, в, с и углы А, В и С. Отв. $\frac{ac\sin B}{a+b+c}$;

90. На вершины тр-ка АВС действуют параллельные силы, обратно пропорциональные длинам противолежащих сторон. Определить расстояние центра параллельных сил от ВС. Даны стороны а, в, с и углы А, В и С. Отв. $\frac{cb^2\sin C}{ab+bc+ac}$.

91. Веревкой, имеющей длину l, желают повалить дерево.

В какой точке M надо привязать веревку, чтобы повалить дерево с наименьшей силой? Отв. $ON = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

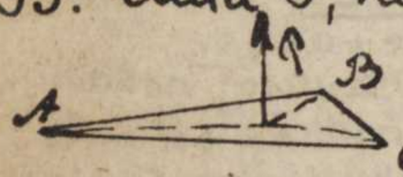
92. Та же задача, но тянущий за веревку человек опирается ногами в балку C, т.ч. имеет возможность использовать выгоду наклонного положения (см. рис.)



Длина веревки (+ рука) BD = l; длина человека от пяток до плеч CD = h; расстояние центра тяжести от пяток, CE = a; расстояние балки C от столба может быть выбираемо по произволу. Найти наивыгоднейшие углы наклона человека (α) и веревки (β) к горизонту. Наибольшее усилие T, какое может развить человек, сначала определяется статическими условиями равновесия, а затем мускульной силой человека и тогда равно $T_{max} = Q = nP$ (обычно тройной вес человека, т.е.

12–15 пудов). (В. П. В.) Отв. Если Q произвольно велико, то maximum ломающего момента сводится к max. $\cos\beta$, т.е. к $\beta = 0$. Если $Q = n.P$, где n — определенное число, то max. ломающего мом. будет $\frac{Pal}{h}\sqrt{1-\frac{a^2}{n^2h^2}}$ при $\sin\beta_0 = \frac{a}{h}\cdot\frac{1}{n}$. Угол α желательно обращать по возможности в 0.

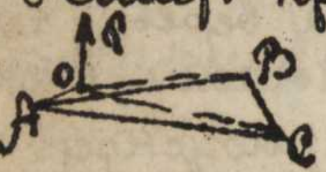
93. Сила P, перпендикулярная к пл-ти тр-ка ABC,



действует на точку O, лежащую внутри тр-ка. Разложить ее на три параллельных силы P', P'' и P''' действующие на вершины.

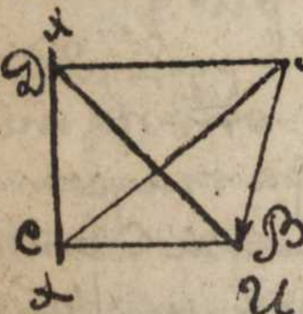
Отв. $P' = P\frac{\text{пл. }BOC}{\text{пл. }ABC}$; $P'' = P\frac{\text{пл. }AOC}{\text{пл. }ABC}$; $P''' = P\frac{\text{пл. }AOB}{\text{пл. }ABC}$;

94. Решить предыдущую задачу в предположении,



что точка O лежит вне тр-ка ABC. Отв. тот же, что и в предыдущей задаче.

95. Дана сила $P = AB$ и ось моментов xx. На оси



откладывают в произвольном месте длину $CD = 1$. Доказать, что объем пирамиды ABCD в шесть раз менее $m_x(P)$.

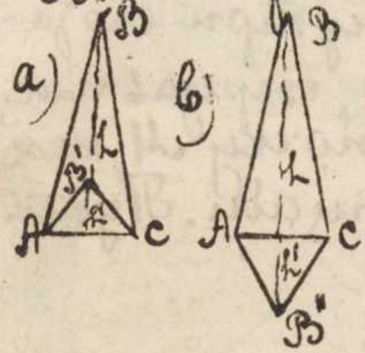
Центр тяжести.

96. Даны три силы, представляемые по величине

и направлению тремя линиями: gA, gB и gC. Точка g в равновесии. Доказать, что g совпадает с центр. тяж. тр-ка, образованного соединением концов линий.

97. На вершинах квадрата, сторона которого 20 саж., приложены силы, пропорциональные 1 : 3 : 5 : 7. Найти расстояние ц. т. от вершины, к которой приложена наименьшая сила. Отв. 18,0278.

98. Два равнобедренных тр-ка, высоты которых h и h_1 имеют общее основание. Найти расстояние от основания ц. т. площади, заключенной между сторонами: а) когда они расположены по одну сторону основания, в) когда по обе.



Отв. $\frac{h+h'}{3}$; $\frac{h-h'}{3}$;

99. В квадрате, сторона которого $= c$, соединяют последовательно середины смежных сторон; полученный тр-к отрезают. Точно также отрезают еще две вершины. Определить ц. т. оставшейся площ. Отв. $Og = \frac{c\sqrt{2}}{15}$;

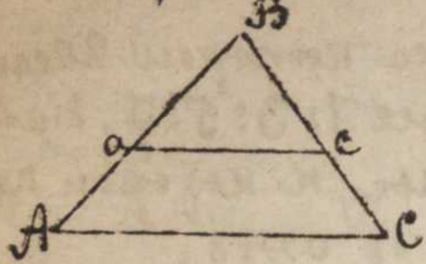
100. В шестиугольнике ABCDEF, сторона которого равна c, центр O соединяют с точками C и E. Определить ц. т. оставшейся фигуры. Отв. $Og = \frac{1}{4} c$.

101. В параллелограмме ABCD диагоналями отсекают тр-к AOB. Найти ц. т. оставшейся части.

Отв. $Og = \frac{1}{9} AD$.

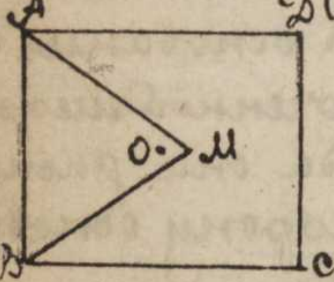
102. Тр-к ABC рассечен параллельно основанию

так, что площадь маленького тр-ка aBc составляет $\frac{1}{n}$ часть площади большого тр-ка ABC. Определить ц. т. оставшейся части.



Отв. расстояние от основания: $\frac{h}{3}\left(1-\frac{2}{n+\sqrt{n}}\right)$.

103. Дан квадрат $ABCD$; найти внутри его такую точку M, чтобы, вырезав площ. AMB, получили бы точку M, как ц. т. оставшейся площади. Пусть $OM = x$ и $AB = a$.



Отв. $x = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$;

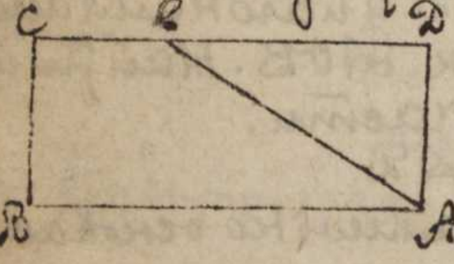
104. Кубический пустой ящик без крышки повешен за одну из вершин его верхнего основания. Толщиной его стенок можно пренебречь. Определить положение основания.

Отв. $tg\,\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

105. Тяжелый полуцилиндр, радиус которого $= r$ и длина $= l$, подвешен за точку O. Найти угол φ между ребром OA и вертикалью при равновесии (Wittenbauer.)

Отв. $tang\,\varphi = 2{,}172\,\frac{r}{l}$.

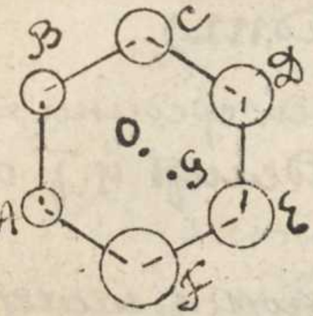
106. Дан однородный прямоугольник $ABCD$. Провести через вершину A такую линию $Aв$, чтобы, подвесив трапецию $ABCв$ за вершину $в$ получить угол стороны



АВ горизонтальное положение.

Отв. $EC = \frac{AB}{2}(\sqrt{3}-1)$.

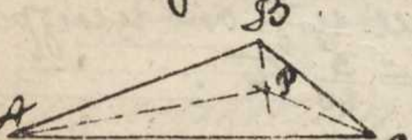
107. Шестиугольный стол, сторона которого $=c$, — однородный и одинаковой толщины, — покоится на острие.



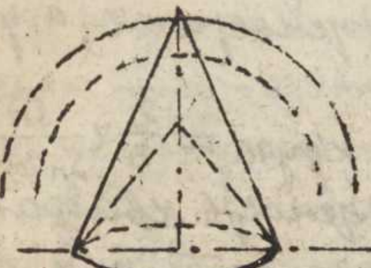
На вершины A, B, C, D, E, F кладут грузы: 7, 11, 15, 19, 23 и 27 kgr. Определить положение точки опоры при равновесии. (Вес стола $=p$)

Отв. Точка находится на BE и отстоит от центра стола на $Og = \frac{24c}{p+102}$.

108. Внутри тр-ка ABC точку P соединяют с тремя вершинами и эти линии принимают за силы, лежащие в одной пл-ти. Доказать, что равнодействующая пройдет через ц. т.



109. Два конуса имеют одно основание и расположены по одну его сторону. На каком расстоянии от основания находится ц. т. об'ема, заключенного между поверхностями?



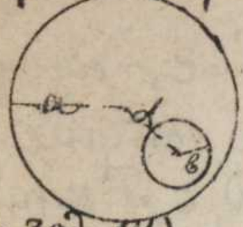
Отв. $\frac{1}{4}(h+h_1)$.

110. Внутренний радиус полусферической чаши равен $\underline{a}$, толщина стенок $=\underline{b}$. На каком расстоянии от основания находится ц. т. об'ема?

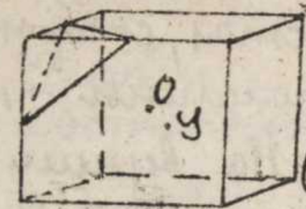
Отв. $\frac{3}{8}\,\frac{4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3}{3a^2+3ab+b^2}$.

111. В однородной сфере радиуса $\underline{a}$ сделана сферическая вырезка радиуса $\underline{b}$. Расстояние между цен-

трали равно a. Определить ц. т. об'ема.



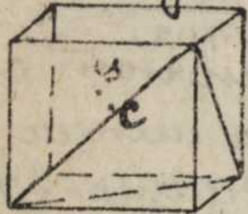
(К зад. 111).



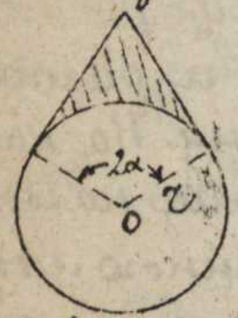
(к зад. 112)

112. Дан куб. Плоскостью, соединяющей средины трех смежных ребер отсекают угол. Определить ц. т. оставшейся фигуры. $\overline{OУ} = \frac{\sqrt{3}}{376}\sqrt{\frac{73}{8}}$.

113. От куба отсекают пирамиду, которая имеет основанием тр-к, образованный диагоналями трех смежных сторон. Определить расстояние ц. т. от центра куба С. Отв. $\overline{CУ} = \frac{3}{80}\sqrt{6}$.



114. Определить ц. т. площади, заключенной между окружностью и двумя касательными, проведенными к ней из данной точки, если радиус окружности $= r$, а угол при центре $= 2\alpha$.



Отв. Расстояние от ц. т. круга $= \frac{2}{3} r \frac{\sin^3\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos^2}$

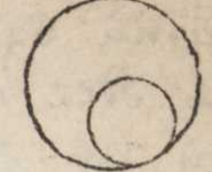
115. На стороне, вписанного в окружность квадрата, как на диаметре, описана полуокружность, т. ч. между нею и квадратом образуется луночка. Найти ц. т. ея.

Отв. Ц. т. на радиусе симметрии в расстоянии от ц. т. квадрата:

$$x = \frac{\pi R}{2\sqrt{2}}.$$

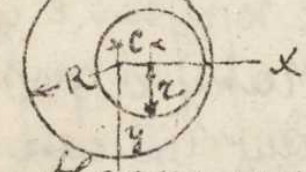
116. В диске радиуса R, сделан эксцентрический вырез в виде круга, построенного на радиусе,

как на диаметре. Найти ц. т.



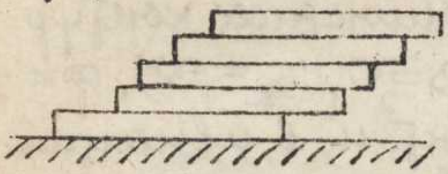
Отв. Он лежит на радиусе симметрии на расстоянии $\frac{R}{6}$ от центра.

117. Определить координаты ц. т. пластинки, указанной на фигуре.



Отв. $\bar{x} = -\frac{c r^2}{R^2 - r^2}$.

118. Несколько плиток, сделанных из одного материала и совершенно одинаковых размеров, сложены в столбик на столе. Верхнюю плитку передвигают по ея длине настолько, чтобы она могла остаться в равновесии, вторую подвигают, не нарушая равновесия первой, настолько, чтобы она могла остаться в равновесии; затем передвигают третью, не нарушая относительного положения двух первых, насколько это возможно, и т. д. до последней, остающейся неподвижной. Найти длину, на которую свешивается каждая плитка.

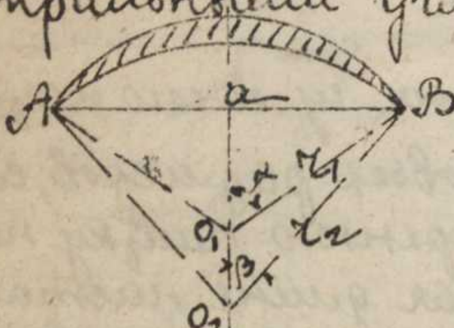


Отв. Решив вопрос сначала для двух плиток, затем для трех и т. д., найдем, что длина, на которую свешивается каждая последующая плитка, равна произведению из половины длины плитки на ряд последовательных чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ и т. д.

119. Около окружности центра O описан произвольный многоугольник, ц. т. периметра которого определяется точкой S_1, а ц. т. площади точкой S_2.

Найти взаимное расположение точек O, S_1 и S_2.
Отв. Все три точки расположены на одной прямой, при чем: $OS_2 : OS_1 = 2:3$. [Wittenbauer].

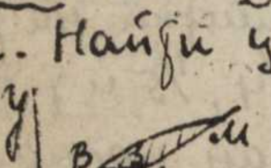
120. Определить координаты ц.т. „дужки Антуанет", образованной двумя дугами кругов с центральными углами 2α и 2β. Такую форму



поперечного сечения имели крылья аэропланов „Антуанет", откуда эта фигура и получила свое название. В частном случае, когда нижний контур обращается в прямую линию ($\beta=0$, $r_2=\infty$), фигура обращается в круговой сегмент и в авиации носит название „дужки Рато" (по имени ученого, исследовавшего эту форму в аэродинамическом отношении). [Н. Е. Жуковский].
[Приложить также к другому частному случаю Гиппократовой луночки ($\alpha=\frac{\pi}{2}$) и полукруга ($\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=0$). Отв. $x_s = a\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta\cdot(2\beta-\sin2\beta)-\sin^2\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha(2\alpha-\sin2\alpha)}{\sin^2\beta(2\alpha-\sin2\alpha)-\sin^2\alpha(2\beta-\sin2\beta)}$.

121. Найти ц.т. площади, заключенной между синусоиды $y=\sin x$ и осью x.
Отв. $x=\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{\pi}{8}$.

122. Найти ц.т. площади, заключенной между прямой $y=\beta x$ и параболой $y^2=2px$.



Найти его также графически.
Отв. $x=\frac{4p}{5\cdot\beta^2}$; $y=\frac{p}{\beta}$; графически: разделить OM пополам и провести ∥ оси x. Тогда $AS=\frac{2}{5}AB$.

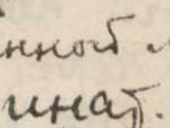
123. Найти координаты ц. т. параболического полусегмента

и его дополнения до прямоугольника. [Wittenbauer]
Отв. Для сегмента $x_s=\frac{3}{5}a$; $y_s=\frac{3}{8}b$; для его дополнения $x_s=\frac{3}{10}a$, $y_s=\frac{3}{4}b$.

124. Найти ц. т. эллиптического квадранта с полуосями a и b. Отв. $x_s=\frac{4a}{3\pi}$; $y_s=\frac{4b}{3\pi}$; [Wittenbauer.]

125. Найти ц. т. площади квадранта, ограниченного кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. [Walton].
Отв. $x_s=y_s=\frac{256}{315}\cdot\frac{a}{\pi}$.

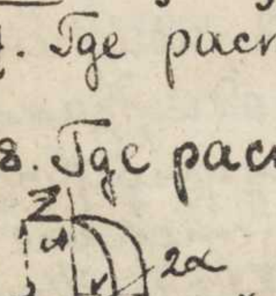
126. Найти ц. т. площади, заключенной между кривой $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, и осями координат. [Walton].
Отв. $x_s=\frac{a}{5}$; $y=\frac{b}{5}$.



к зад. 127

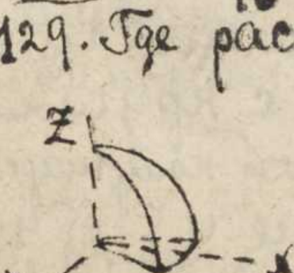
127. Где расположен ц. т. дуги винтовой линии AP? [Фурман].

128. Где расположен ц. т. апельсинного ломтика,



т. е. шарового выреза, имеющего центральный угол 2α и сторонами меридианы, если радиус шара $=a$? Для поверки найти этим способом положение ц. т. полушара. [Фурман.]
Отв. $\bar{x}=\frac{3}{16}\pi a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $\bar{z}=0$; для полушара $\bar{x}=3/8\,a$.

129. Где расположен ц. т. половины апельсинного



ломтика, (т. е. разрезанного пополам плоскостью экватора)? Найденными формулами воспользоваться для нахождения ц. т. шарового октанта (см. для 128.)
Отв. $x=\frac{3}{16}\pi a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $z=\frac{3}{8}a$. [Фурман.]

Для октанта $\bar{x} = \frac{3}{8} a\sqrt{2}$; $\bar{z} = \frac{3}{8} a$. Если координатные оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ направить по ребрам октанта, то $\bar{\xi} = \bar{\eta} = \bar{\zeta} = \frac{3}{8} a$.

130. Плоскость катится без скольжения по цилиндру; определить поверхность и объем тела, полученного от вращения круга, начерченного в этой плоскости.

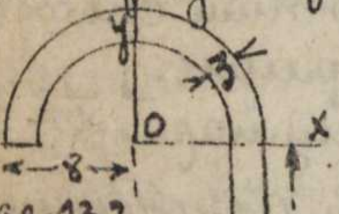
Отв. Если a — радиус круга, r — радиус цилиндра, b — первоначальное расстояние центра круга от образующей прикосновения и ω — угол, на который повернулась плоскость, проходящая постоянно через ось цилиндра и образующую прикосновения, то объем $= \pi a^2 \omega \left(b + \frac{\omega r}{2}\right)$, а поверхность $= 2\pi a \omega \left(b + \frac{\omega r}{2}\right)$.

131. Найти объем обручального кольца, полученного от вращения площади, заключенной между полуокружностью и диаметром $= 2a$. Расстояние от оси $= r$. Отв. $v = \pi a^2 (\pi r + \frac{4}{3} a)$.

(к зад. 133.)

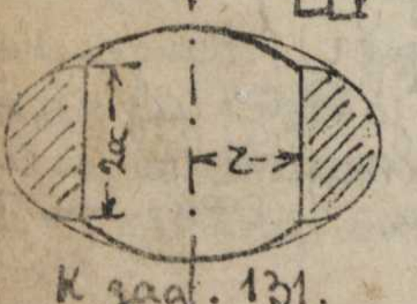
132. Определить координаты ц. т. пластинки, указанной на фигуре.

Отв. $\bar{x} = 2{,}14$; $\bar{y} = 1{,}18$.



к зад. 132

133. Найти ц. т. объема и полной поверхности тела, состоящего из цилиндрической балки с круглым сечением, завершенной полушаром. Определить расстояние ц. т. от центра цилиндра. Отв. $\bar{x} = \frac{3r^2 + 4rh}{8r + 12h}$.



К зад. 131.

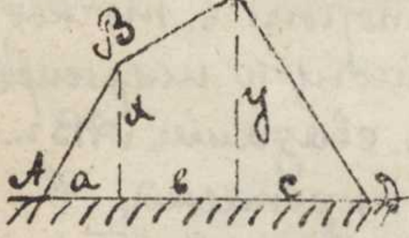
134. К однородному полушару прикреплен конус. Какая должна быть высота конуса, чтобы ц. т. всей фигуры попал в центр сферы. Отв. $h = r\sqrt{3}$.

135. Цилиндрическая дымовая труба наружного радиуса R и внутреннего r стоит вертикально и находится под горизонтальным действием силы ветра K, приложенной на середине высоты.

Определить наружный диаметр R, если нужно, чтобы равнодействующая сила проходила через точку A основания. Вес единицы объема $= \gamma$.

Отв. $R = \sqrt{r^2 + \frac{K}{2\pi r \gamma}}$.

136. В каком отношении должны находиться высоты x и y стены, поперечное сечение ABCD которой представлено на чертеже, чтобы устойчивость ея относительно A и D была одинаковой, т. е. чтобы ц. т. лежал на середине линии AD. Решить задачу только графически. [Wittenbauer и В. П. В.]



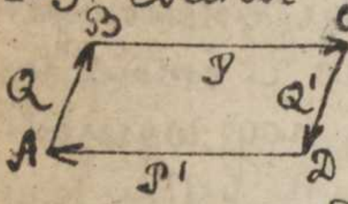
°137. Найти ц. т. половины эллипсоида, полученного вращением четверти эллипса около его полуоси a. [Wittenbauer]. Отв. $x_0 = \frac{3}{8}a$ (от центра эллипса).

Пары.

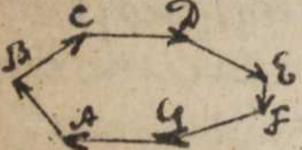
138. Даны три силы, слагающие которых по осям координат суть: 1) $x = 3$, $y = 5$, $z = 4$; 2) $x = -2$, $y = 2$, $z = -6$;

3) $x=-1$, $y=-7$, $z=2$. Эти силы приложены в точках с координатами: 1). $x=0$, $y=2$, $z=1$; 2) $x=1$, $y=-1$, $z=3$; 3) $x=2$, $y=3$, $z=1$. Определить момент пары, которою может быть заменена данная система.

139. Даны две пары (P, P') и (Q, Q'), силы которых направлены по сторонам параллелограмма ABCD и равны соответствующим сторонам его. Определить момент равнодействующей пары.

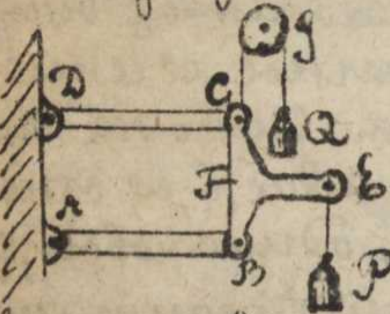


140. По сторонам многоуг-ка ABCDEFG действуют силы в одном направлении. Заменить все эти силы парой.



Отв. 2 площ. мног-ка ABCDEFG.

141. Горизонтальный рычаг FE прикреплен под прямым углом к вертикальному бруску BC, который в точках B и C соединен помощью шарниров с горизонтальными связями AB и BC. Эти связи прикреплены в свою очередь помощью шарниров A и D к вертикальной стене. В точке C привязана веревка, которая перекинута через блок g и поддерживает груз Q. Определить P, груз необходимый для равновесия системы, а также давления N и N' в точках A и D, если $FE=a$, $BC=b$.

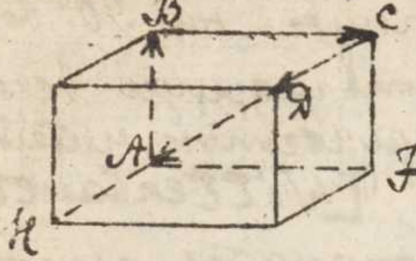


(На этом принципе основаны весы Роберваля).

Отв. $P=Q$; $N=N'=P\frac{a}{b}$.

142. Даны силы AB, BC, CD и AD, действующие

по трем сторонам и диагонали прямоугольного

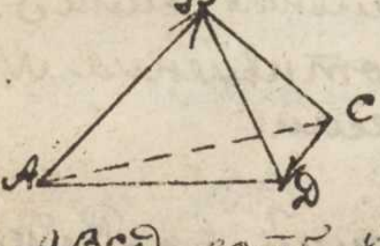


параллелепипеда. Определить момент пары L, — заменяющей эти силы, а также углы α, β, γ, которые ось пары образует с линиями AF, AH и AB.

Отв. $L = \sqrt{(AB.BC)^2 + (AB.CD)^2 + (BC.CD)^2}$

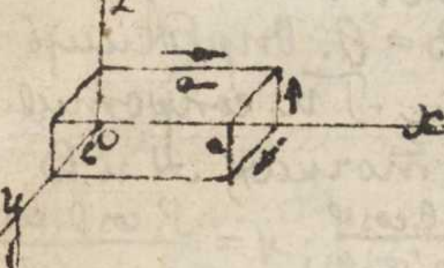
$\cos\alpha = \dfrac{AB.CD}{L}$; $\cos\beta = \dfrac{AB.BC}{L}$; $\cos\gamma = \dfrac{BC.CD}{L}$;

143. Заменить произвольную систему сил двумя



силами, имеющими данные направления. Показать, что при замене системы сил двумя силами AB и CD об'ем тетраэдра $ABCD$ есть величина постоянная.

144. По сторонам прямоугольного параллелепипеда



действуют силы, отмеченные стрелками и равные длинам сторон параллелепипеда. Заменить эти три силы силой, приложенной в точке O и парою. (Листок Н. Е. Жуковского).

Отв. $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; $L_x = 0$; $L_y = 0$; $L_z =$ [illegible]

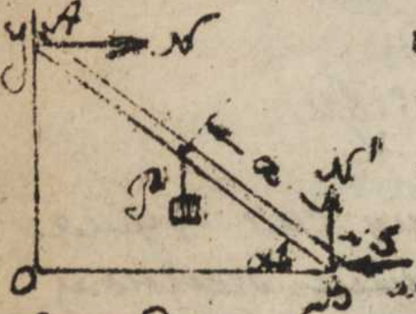
145. Вращающийся около геометрической оси ци-

линдр радиуса r связан четырьмя одинаково напряженными упругими нитями с углами квадрата. Натяжение нити пропорционально дли-

не ся и угла 1-го длины имеет значение к; сто-
рона квадрата = 4ч. Вал повернут на 90° во-
круг его оси. Найти равнодействующую всех
сил, развиваемых при этом упругостью нитей.
Отв. Момент пары сил = 12 кч². [Wittenbauer].

Равновесие

146. Невесомая палочка, длины l, опирается своими концами B и A на горизонтальную и вертикальную стену. На расстоянии a от конца B к ней прикреплен груз P, а в точке B на нее действует горизонтальная сила S.



Определить силу S, а также сопротивления N и N' в точках A и B при равновесии.

Отв. $S = P \cdot \frac{a}{l} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; $N = S$; $N' = P$.

147. Однородный брусок $AB = l$, имеющий вес P, удерживается в равновесии натяжением нити OC. Даны углы $ABO = \varphi$; и $COB = \theta$. Определить натяжение нити T и сопротивления N и N' в точках A и B.

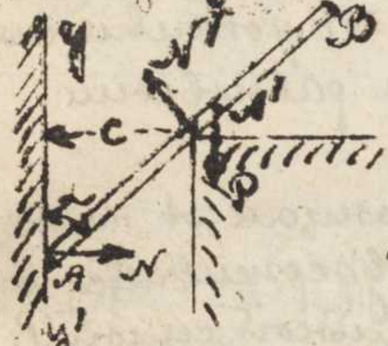
Отв. $T = P \cdot \frac{\cos\varphi}{2\sin(\varphi-\theta)}$; $N' = P + \frac{P\sin\theta\cos\varphi}{2\sin(\varphi-\theta)}$; $N = \frac{P\cos\theta\cos\varphi}{2\sin(\varphi-\theta)}$

148. Невесомая палочка длины l опирается одним концом на горизонтальную плоскость, а другим на угол B. На расстоянии a от конца A к точке C прикреплен груз P, а в точке A на палочку действует горизонтальная сила S.

определить силу S и давления N, N' в точках A и B при равновесии. Угол α дан.

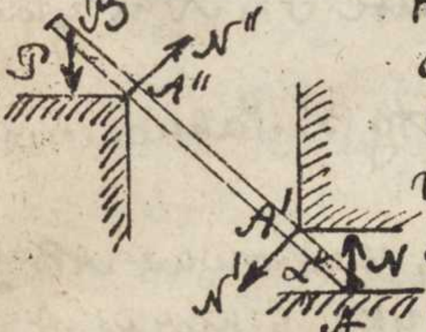
Отв. $S' = \frac{1}{2} P \frac{a}{x} \sin 2\alpha$; $N = P \frac{x - a\cos^2\alpha}{x}$.

149. Однородный брусок $AA'B$ веса P, опирается в точке A на вертикальную плоскость yy' и в точке A' на неподвижную подпору. Определить давления N и N' в точках A и A' и угол $\alpha = BAy$. Дано $AB = 2a$; расстояние точки A' от $yy' = c$.



Отв. $\sin\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/3}$; $N = P \cdot ctg\alpha$; $N' = \frac{P}{\sin\alpha}$. Равновесие неустойчивое.

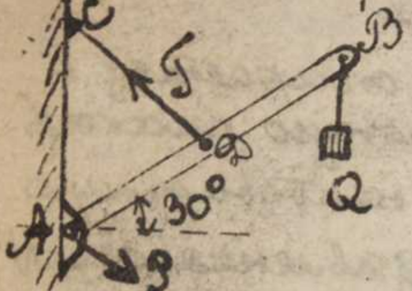
150. Невесомая палочка AB опирается концом A на горизонтальную плоскость xx', а в точках A' и A'' на неподвижные подпоры. К точке B подвешен груз P. Определить силы сопротивлений N, N' и N'', если дано: α $AB = a$, $A'A'' = b$.



157. Невесомый брусок $AA'B$, на конце которого прикреплен груз P, опирается в точке A на вертикальную плоскость, а в точке A' на неподвижную подпору. Определить $AA' = x$ и силу сопротивления N при равновесии. Дано $AB = a$ и расстояние точки A' от пл-ти $yy' = b$.

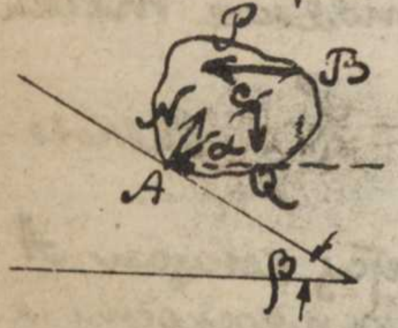
152. Груз Q подвешен на конце B невесомого бруса

АВ. В точке А прут укреплен на шарнире, а в точке Д, лежащей на середине АВ он поддерживается нитью ДС, перпендикулярной к АВ. Угол прямой АВ с горизонтом равен 30°. Определить сопротивления в точках А и С при равновесии.



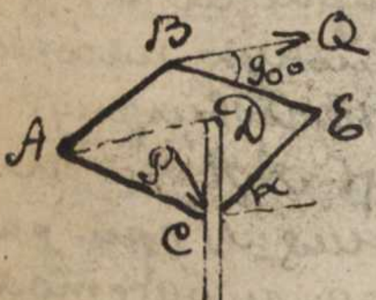
<u>Отв.</u> $P=Q$; $T=Q\sqrt{3}$.

153. Некоторое тело АВ опирается концом А на наклонную плоскость и удерживается в точке В горизонтальной силой Р. Вес тела Q; ц. т. его С лежит на АВ. Дано: АВ = а; АС = в, угол наклонной плоскости с горизонтом = β. Определить силы Р и N и угол α линии АВ с горизонтом.



<u>Отв.</u> $P=Q\cdot tg\beta$; $N=\frac{Q}{\cos\beta}$; $tg\alpha=\frac{b}{a}\,ctg\beta$. Равновесие неустойчивое.

154. Прямоугольная доска АВЕС, имеющая АВ = 4 mt, АС = 2 mt, укреплена на <u>шарнире</u> Гука в точке А и расположена так, что АС горизонтальна и АВ образует с горизонтом угол $\alpha=30°$. На точку В действует под прямым углом к ВЕ горизонтальная сила Q = 5, а на точку С сила Р = 4, перпендикулярная доске. Доска подпирается в точке Д на расстоянии от А = 3.



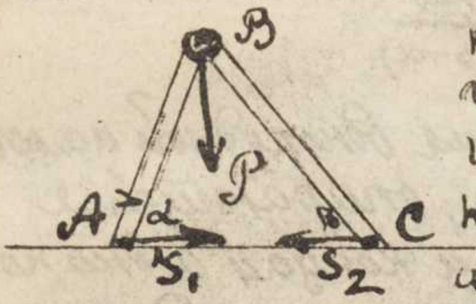
Определить координаты точки Д при равновесии.

<u>Отв.</u> $x=1,87$; $y=2,34$. (Листок Н. Е. Жук.)

155. Однородный брусок AB веса P опирается на две наклонные плоскости в точках A и B. Углы наклонения плоскостей α и α'. Определить угол θ, который линия AB делает с горизонтом при равновесии, а также сопротивления N и N' в точках A и B.

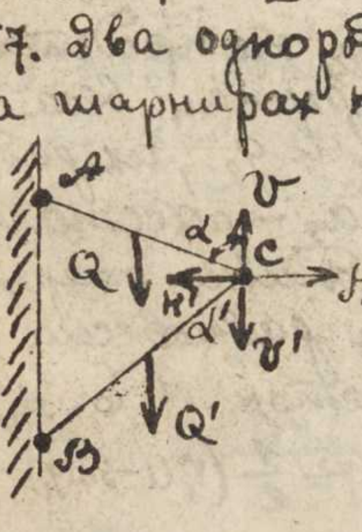
Отв. $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha\cdot\sin\alpha'}$; $N' = \frac{P\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')}$; $N' = \frac{P\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}$.

156. Два невесомые бруска AB и BC соединены в точке B при помощи шарнира и опираются концами A и C на горизонтальную плоскость. В точке B на бруски действует сила P, а в точках A и C они удерживаются горизонтальными силами S_1 и S_2. Определить эти силы, если α и β известны.



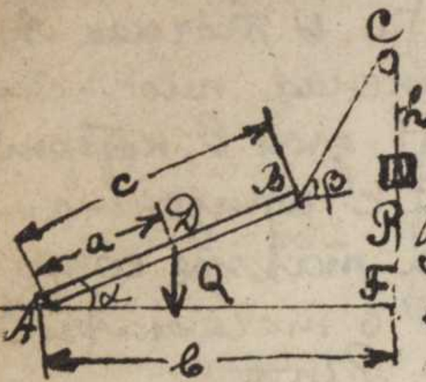
Отв. $S_1 = S_2 = P\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

157. Два однородных стержня CA и CB прикреплены на шарнирах к вертикальной стене в точках A и B, а в точке C связаны между собой шарниром. Вес стержней Q и Q'. Определить горизонтальную силу H и вертикальную V, с которыми нижний стержень действует на верхний, а также силы H' и V' действия верхнего стержня на нижний. (Листок, Н. Е. Ж.)



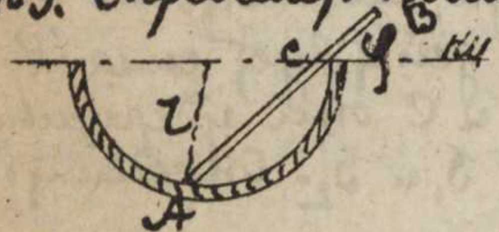
Отв. $H = \frac{1}{2}(Q+Q')\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha'}$; $V = \frac{1}{2}\frac{Q\operatorname{tg}\alpha - Q'\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha'}$.

158. Невесомая палочка AB прикреплена на шарнире к точке A горизонтальной плоскости $\alpha\alpha'$. К концу палочки B привязана нить, перекинутая через блок C и обремененная грузом P. В точке D на палочку действует вертикальная сила Q. Дано: AD = a, AB = c, AF = b, FC = h. Определить углы α и β при равновесии.



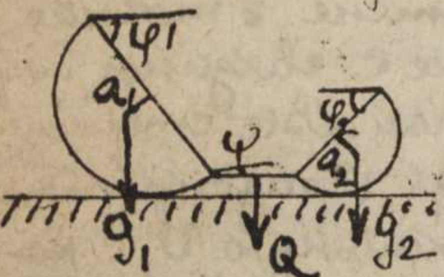
Отв. $tg\beta = \frac{h - c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha}$; $Pc = \frac{Qa\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$

159. Определить положение равновесия однородной палочки AB, длины 2a, опирающейся своим нижним концом о дно полусферической чашки радиуса r, а своей стороной о край чашки.



Отв. $\cos\varphi = \frac{1}{8r}\left(\sqrt{a^2+32r^2}+a\right)$. (Листок Н. Е. Ж.)

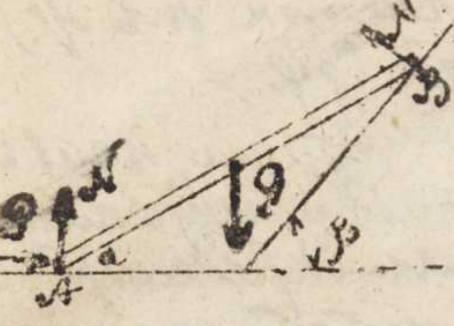
160. Два полушара соединены, как это представлено на фигуре, стержнем веса Q. Веса полушаров g_1 и g_2, их радиусы r_1 и r_2 и a_1, a_2 — расстояния центров тяжести. Длина стержня l. Определить при равновесии углы φ_1, φ_2 и ψ. (Листок Н. Е. Ж.)



Отв. $tg\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{Qr_1}{g_1a_1}$; $tg\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{g_2 \cdot a_2}r_2$; $\sin\psi = \frac{1}{l}\left(r_1(1-\sin\varphi_1) - r_2(1-\sin\varphi_2)\right)$

161. Палочка AB = a опирается концом A о горизонтальный пол и концом B о стену, наклоненную

к горизонту под углом β. Определить приложенную в A силу P, удерживающую палочку, и давления палочки на пол и стену. Даны: длина палочки a, вес палочки q, приложенный на расстоянии b от конца A, и угол α, который палочка образует с горизонтом.

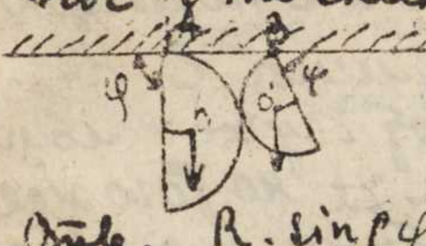


Отв. $P = q\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$, $A = q\left(1-\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)}\right)$;

$B = q\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}$. (Листок Н.Е. Ж.).

162. Между двумя наклонными плоскостями, имеющими углы наклонения к горизонту α и α', помещены две сферы веса P и P'. Определить угол θ, который образует линия OO' с горизонтом при равновесии. Отв. $\operatorname{tg}\theta = \frac{P'\operatorname{tg}\alpha' - P\operatorname{tg}\alpha}{(P+P')\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha'}$.

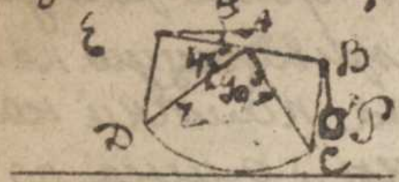
163°. Два однородных полуцилиндра радиусов R, r и весов q_1 и q_2 прикреплены в точках A и B на шарнирах к потолку и находятся в соприкосновении. Определить связь между углами φ и ψ при равновесии. (Листок Н.Е. Ж.)



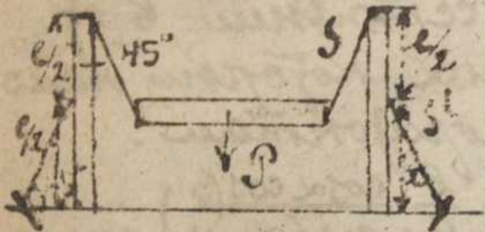
Отв. $\frac{R.\sin(\varphi+\psi)+b\sin\psi}{r.\sin(\varphi+\psi)+b\sin\varphi} = \frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{3\pi\cos\psi-4\sin\psi}{3\pi\cos\varphi-4\sin\varphi}$.

164. Призматическое тело длины c и плотности δ имеет сечение ABCDE, состоящее из дуги окружности и трех прямых. На краю B тело

обремененно грузом P. Определить P, чтобы верхний край BE образовал с горизонтом угол φ. (Листок Н. Е. Жук.) Отв. $P = \frac{5}{6}\gamma \cdot l \cdot r^2 \cdot tg\varphi$.

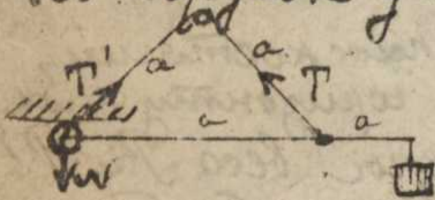


165. Бревно веса P удерживает нитями, привязанными к столбам, укрепленным на якорях. Определить натяжение всех нитей, если они образуют с горизонтом угол 45°.



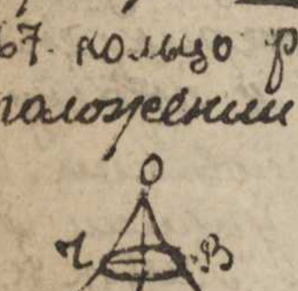
Отв. $S = \frac{P}{\sqrt{2}}$, $S_1 = P\sqrt{2}$. (Листок Н. Е. Жук.)

166. Брусок длины 2a обременен с одной стороны грузом P, а с другой имеет ролик, могущий катиться по горизонтальной подпорке; кроме того он прикреплен двумя тягами длины a к неподвижной точке опоры, как показано на чертеже. [Определить реакцию N и натяжение нитей T и T_1.]



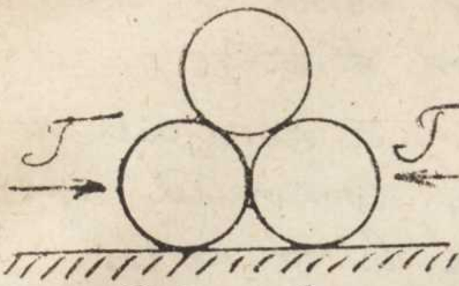
Отв. $N = 3P$; $T = T_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}P$. (Листок Н. Е. Жук.)

167. Кольцо радиуса R подвешено в горизонтальном положении к неподвижной точке O с помощью нескольких нитей длины l. На эти нити надевают другое кольцо меньшего радиуса r, но того же веса. Определить отношение расстояний колец от вершины O и их радиусов при равновесии, если второе кольцо делит l пополам.



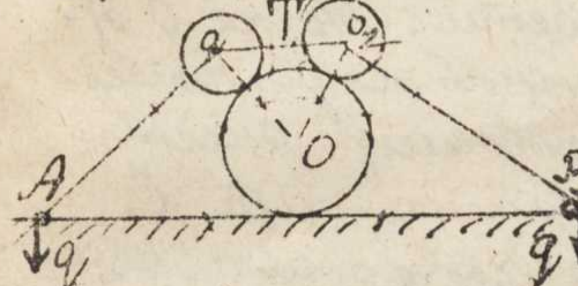
Отв. 2:3; $\frac{r}{R} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$; (Листок Н. Е. Жук.)

168. Три бревна веса P положены одно на другое, как представлено на фигуре. Определить силы $Г$, удерживающие их в равновесии.



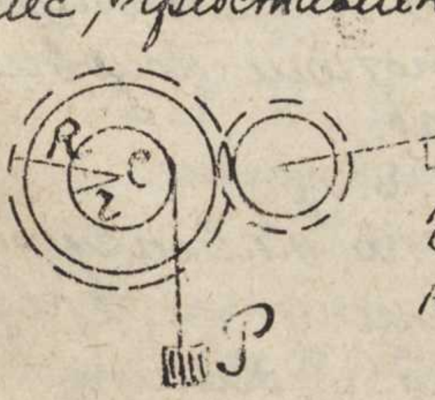
Отв. $Г = \frac{P}{2\sqrt{3}}$. (Листок Н. Е. Жук.)

169. Два одинаковых цилиндра веса P каждый опираются на неподвижный цилиндр так, что центры O, O_1, O_2 образуют равносторонний тр-к. Цилиндры перевязаны горизонтальной нитью O_1O_2 и находятся под тягой нитей O_1A и O_2B, образующих с OO_1 и OO_2 прямые углы. Эти нити перекинуты в точках A и B через блоки и обременены равными грузами q. Определить наибольшую величину груза q, если нить разрывается при тяге $ч$!



Отв. Натяжение $T = \frac{2q+p}{\sqrt{3}}$, $q_{max} = \frac{ч\sqrt{3}-p}{2}$. (Лист. Н. Е. Жук.)

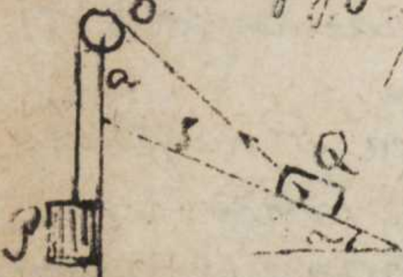
170. Груз P поднимается с помощью зубчатых колес, представленных на фигуре, причем радиус большого зубчатого колеса $= R$, а радиус вала, на который наматывается нить груза $= r$. Определить давление C на подшипники, если вес боль-



щего дуб. колеса вместе с валом есть Q

Отв. $C = P\cdot\frac{R-r}{R} + Q$. (Листок Н. Е. Ж.)

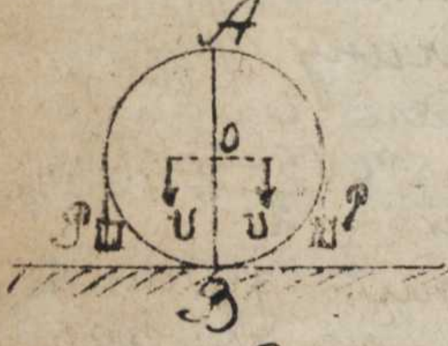
171°. Два груза P и Q привязаны к концам нерастяжимой нити, которая перекинута через блок в точке O.



P висит свободно, а Q лежит на наклонной плоскости. Точка O отстоит от наклонной пл-ти по вертикали на расстояние a. Определить расстояние s при равновесии, если длина нити l.

Отв. $s^2 + 2as\cos\alpha = \frac{(Q^2 - P^2)a^2\cos^2\alpha}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}$. (Лист: Н. Е. Ж.)

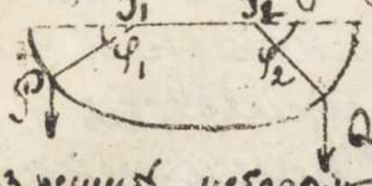
172. Круглый диск веса $2v$ стоит в вертикальной пл-ти, опираясь на гладкий горизонтальный стол.



Через диск перекинута нить концы которой свешиваются с диска и обременены равными грузами P. Диск разрезан пополам по вертикальному диаметру AB. Каково наименьшее значение грузов P при котором половинки диска не разваливаются.

Отв. $P = \frac{4v}{3\pi}$. (Листок Н. Е. Ж.)

°173. Два груза P и Q скользят по эллипсу, будучи привязаны к нити PF_1F_2Q, перекинутой через блоки F_1 и F_2, помещенные в фокусах эллипса. Большая ось эллипса горизонтальна. Найти связь между углами φ_1 и φ_2 при равнов... (Лиц. н.2 ж.)

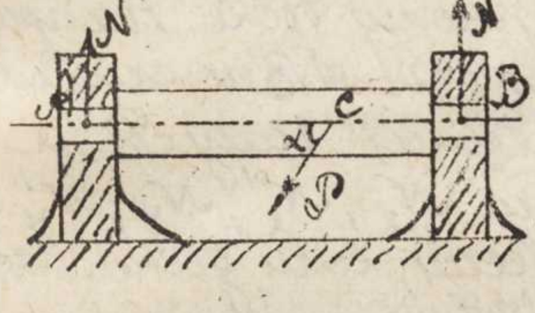


Отв. $P\cdot\frac{\varepsilon+\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} = Q\frac{\varepsilon+\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}$

где ε — эксцентриситет эллипса.

№173 решить методом возможных перемещений

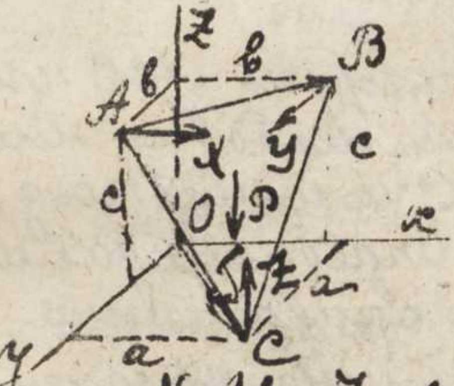
174. В точке C действует сила P, образующая с осью угол α. Определить давления N и N' в точках A и B по направлению перпендикулярному оси. Дано $AC=a$, $BC=b$.



Отв. $N=\frac{b}{a+b}\cdot P.\sin\alpha$.

$N'=\frac{a}{a+b}P.\sin\alpha$.

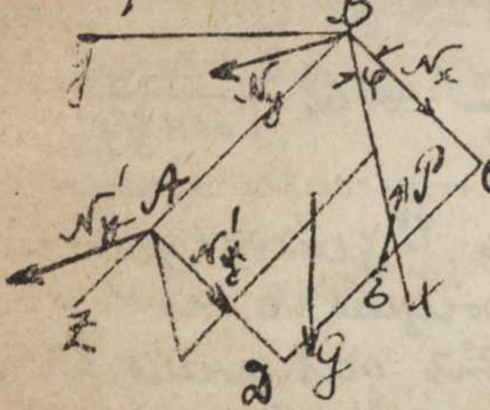
175. Однородная доска ABC, представляющая из себя равнобедренный тр-к, веса P, опираясь своими концами на три плоскости координат, привязана за точку C к началу координат O помощью нити CO. Определить натяжение нити T и силы сопротивления X, Y и Z в точках A, B и C. Даны координаты точек a, b и c. Угол $co\alpha=45°$.



Отв. $X=Y=P\frac{2a-b}{3c}\cdot\sqrt{2}=T$; $Z=P$.

176. Однородная четырехугольная доска ABCD, имеющая вес q, может вращаться около двух непод-

вершных точек A и B. Ось AB с горизонтом



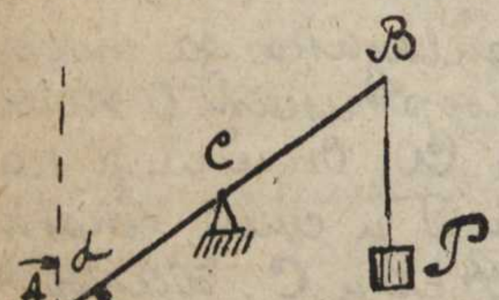
образует угол в 45^o. Доска выведена из вертикальной плоск-ти на угол φ и удерживается в равновесии силою P, приложенной к точке E доски по направлению, перпендикулярному доске. Направляя ось z по оси AB и считая B за начало координат, определить силу P, а также силы сопротивлений N_x, N_x', N_y, N_y' в точках A и B при равновесии, если дано: $AB = 2l$, $BC = 2b$. Отв. $P = \frac{g \sin\varphi}{2\sqrt{2}}$;

$N_x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi - 1 - \frac{b}{l}\cos\varphi\right)g$; $N_y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{b}{l}\right)g\sin\varphi$.

$N_x' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi - 1 + \frac{b}{l}\cos\varphi\right)g$; $N_y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{b}{l}\right)g\sin\varphi$.

$N_z + N_z' = -\frac{g}{\sqrt{2}}$

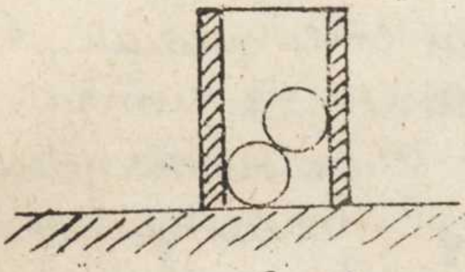
177. Невесомый и твердый стержень ACB прикреплен к двум неподвижным точкам A и C и имеет груз P на конце B. Определить давления в точках прикрепления, если



дано: a — длина стержня; α — угол наклонения стержня к вертикали; $AC = b$; f и g давления параллельные бруску; R и S — давления, перпендикулярные к бруску.

Отв. $f + g = P\cdot\cos\alpha$; $S = \frac{a}{b}\cdot P\cdot\sin\alpha$; $R = \frac{a-b}{b}\cdot P\cdot\sin\alpha$

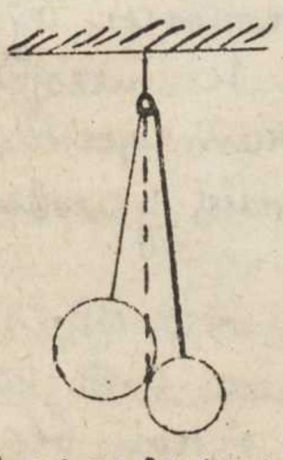
178. Полый с очень тонкими стенками, открытый с обеих сторон, цилиндр поставлен на горизонтальную плоскость.



Внутрь его кладут два равные шара радиуса r (r — больше $1/2$ радиуса основания цилиндра — R) веса P. Каков должен быть наименьший вес цилиндра S, чтобы он не упал.

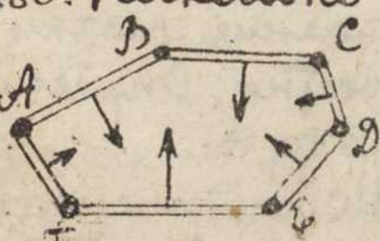
Отв. $S = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)$; для устойчивого равновесия должно быть: $S > 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)$

179. Два неравные шара подвешены на нить, проходящую через блок.



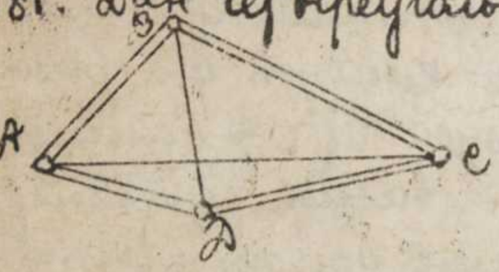
Известно, что сферы могут быть в равновесии, если они касаются друг друга и если центр более легкой сферы лежит ниже центра более тяжелой. Доказать, что, если сферы находятся в таком положении, то расстояния сфер от блока обратно пропорциональны, пренебрегая весом нити и трением сфер.

180. Несколько стержней, твердых и невесомых, соединено в концах шарнирами,

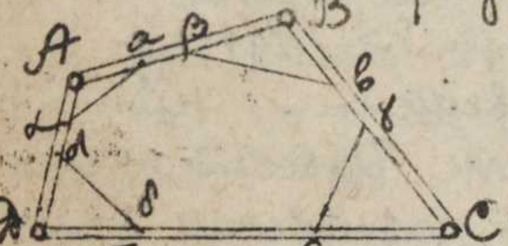


т.ч. образуется плоский многоугольник с переменными углами. На средины стержней действуют силы, пропорциональные их длинам и перпендикулярные брускам, в одной пл-ти с контуром. Как

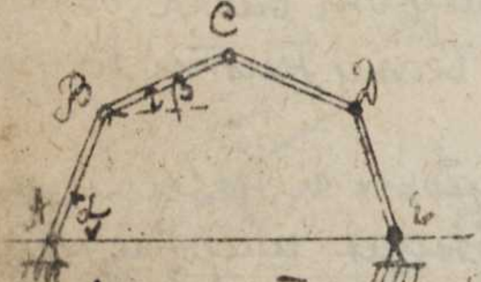
ва форма м-ка, когда он находится в равновесии.
Отв. Вписан в окружность равновесие неустойчивое.
181. Дан четырехугольник, образованный невесомыми



и твердыми стержнями, в вершинах соединенных нитями, имеющими силы натяжений F и F'. Каково геометрическое условие равновесия четырехугольника?
182. Дан четырехугольник АВСД, образованный невесомыми и твердыми стержнями с шарнирами в вершинах; смежные стороны четырехугольника соединены между

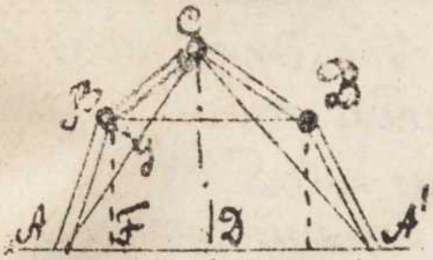


собой нитями $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ и $d\delta$, силы натяжения которых А, В, С и Д. Найти геометрические условия равновесия.
183. Четыре равные и однородные бруска АВ, ВС, СД и ДЕ соединены шарнирами в точках В, С и Д, лежащих в одной вертикальной пл-ти, и находятся в равновесии (в А и Е также шарниры). АЕ и расстояние точки Д



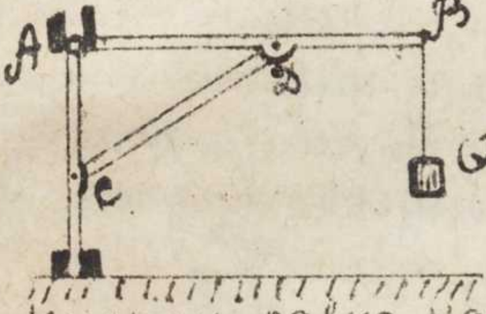
до горизонтальной плоскости — известно. Определить условия равновесия. Отв. $tg\alpha = 3tg\beta$.
184. Четыре бруска АВ, ВС, А'В' и В'С соединены шарнирами в точках В, С и В', лежащих в одной вертикальной пл-ти. Кроме того вершины этого многоугольни-

ка соединены шнурками через одну, и вся система находится в равновесии, опираясь в точ-



ках A и A'. Отрезки AB и A'B' имеют веса P и Q, пропорциональные их длинам. Определить натяжения T и N шнурков AC и BB' и давления p и q в точках B и C, предполагая, что система расположена симметрично относительно CD; весом шнурков пренебречь.

185. Горизонтальный брусок AB поддерживает груз



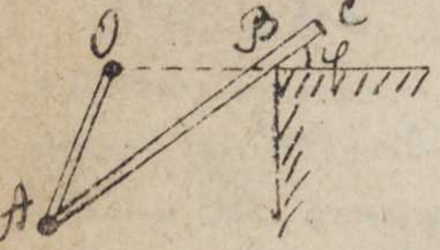
Q на конце B с помощью стержня CD. Точки C и A неподвижны и лежат на одной вертикальной прямой. Стержни CD и AB присоединены к ним шарнирами, равно как и стержень CD в точке D. Определить давление в точке C. Отв. $Q\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{CD}{AC}$.

186. Два равные и однородные бруска соединены

шарниром и помещаются на выпуклой поверхности цилиндра. Найти угол между брусками в положении равновесия, r — радиус цилиндра, 2a — длина бруска, 2θ — угол между ними.

Отв. $r\cdot\cos\theta = a\cdot\sin^3\theta$.

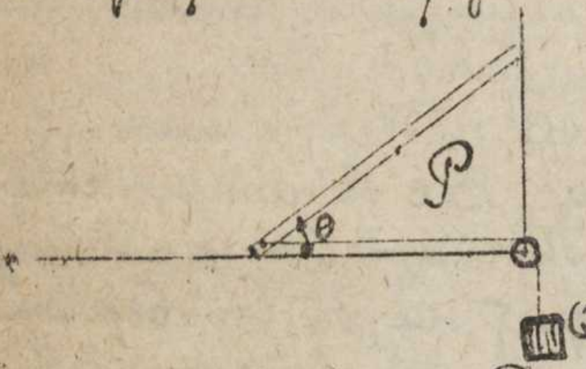
°187. Два стержня AA и AC, из которых второй вдвое длиннее и вдвое тяжелее первого соединены шарниром в точке A. Стержень AO укреплен в точке вращения O, а стержень AC опирается краем об угол B. Дано OA OB. Определить угол φ при равновесии.



Отв. $\cos^2\varphi - 0{,}2\cos\varphi = 0{,}5$.

$\varphi = 35^\circ 30'$ (Мисюк Н. Е. Хр.)

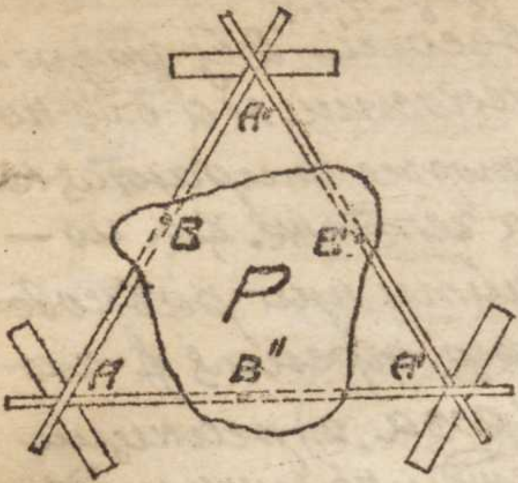
188. Однородный брусок опирается концами на вертикальную и горизонтальную плоскости. К нижнему концу бруска прикреплена нить, перекинутая через блок и имеющая на конце груз Q. Найти положение равновесия. Дано: P — вес бруска, θ — угол между бруском и горизонтом. Отв. $tg\,\theta = \frac{P}{2Q}$.



189. Круглая пластинка находится в покое на вертикальном стержне. Поместить на окружности три груза P_1, P_2 и P_3 так, чтобы пластинка была горизонтальна.

Отв. $\cos(P_1P_2) = -\frac{P_1^2+P_2^2+P_3^2}{2P_1P_2}$; $\cos(P_2P_3) = \frac{P_1^2+P_2^2+P_3^2}{2P_2P_3}$; $\cos(P_1P_3) = \frac{P_1^2+P_2^2+P_3^2}{2P_1P_3}$

190. Три невесомые и негибкие стержня помещены так, что переплетаются между собою, как это показано на чертеже. Вершины A, A′ и A″ лежат на подставках и бруски поддерживают некоторое тело



...са P. Дано: $AB = A'B' = A''B'' = a$

$AB'' = A'B = A''B' = b$

Определить давление в A, A', A'' между стержнями.

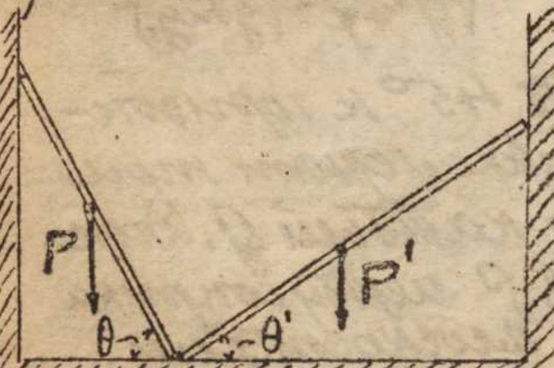
Отв. $\dfrac{aP}{3(a-b)}$

191. Однородная и одинаковой толщины треугольная пластинка прикреплена к одной точке на потолке тремя нитями за вершины. Доказать, что если пластинка горизонтальна, то между тремя длинами нитей α, β и γ и сторонами треугольника, противолежащими нитям, будет существовать соотношение:

$$3\alpha^2 + a^2 = b^2 + 3\beta^2 = c^2 + 3\gamma^2 = 3h^2 + \tfrac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

где h — вертикальное расстояние пластинки от точки привеса.

192. Два невесомые и однородные бруска опираются одним концом на горизонтальную плоскость, а другие другими на две противоположные вертикальные стены.



Бруски и общая точка пересечения с горизонтальной плоскостью лежат в одной вертикальной плоскости. Найти для данных брусков положение равновесия. Углы наклона брусков к горизонту θ и θ'. Отв. $P:P' = tg\theta : tg\theta'$

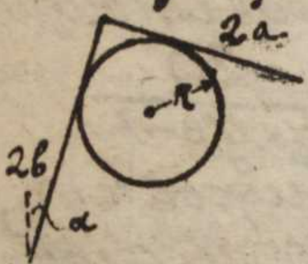
193. Две нерастяжимые нити укреплены в точке A. К одной из них подвешен шар, к другой груз; последний висит ниже шара. Определить угол первой нити с вертикалью. Дано: вес шара Q, груза - P, длина нити BA = l, радиус шара a.

Отв. $\sin\theta = \frac{Pa}{(Q+P)l}$

194. Равнобедренный треугольник, высота которого h, а равные стороны = a, подвешен в полусферической чаше радиуса r. Зная, что три его вершины касаются внутренней поверхности полусферической чаши, определить положение равновесия, т.е. угол α наклонения плоскости треугольника к горизонту.

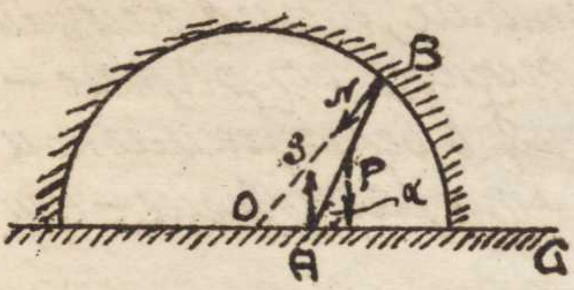
Отв. $tg\alpha = \frac{4h^2 - 3a^2}{6\sqrt{r^2h^2 - \frac{a^4}{2}}}$

195. Однородный рычаг, плечи которого 2a и 2b расположены под прямым углом, находится на вертикальном блоке и касается плечами внешней его окружности радиуса R. Найти наклонение плеча 2a к вертикали.



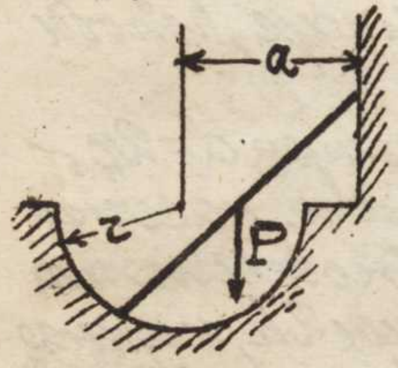
Отв. $tg\alpha = \frac{b^2 - R(a+b)}{a^2 - R(a+b)}$

196. Однородный брусок AB опирается одним из своих концов на горизонтальную плоскость AC, а другим на вогнутую поверхность опро-



кинутой полусферы, центр которой на AC. Найти горизонтальную силу Q, которую надо приложить в A, чтобы удержать брусок в данном положении, при угле наклона к горизонту $= \alpha$; вычислить давления N на сферу и на плоскость S.

197. Найти положение равновесия бруска опирающегося одним концом на вертикальную плоскость, а другим на внутреннюю поверхность данной полусферы радиуса r, центр которой отстоит на расстоянии a от вертикальной плоскости.



198. n неподвижных точек A, B, C... притягивают материальную точку P силами пропорциональными расстоянию. Показать, что вся сила на точку P направлена к центру тяжести данных масс и равна расстоянию до него, помноженному на сумму всех масс. Отв. $R = \sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2}\,\Sigma m = \bar{r}\,\Sigma m$. Направление ее определяется формулами:

$$\frac{X}{R} = \frac{\bar{x}}{\bar{r}} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2}}$$

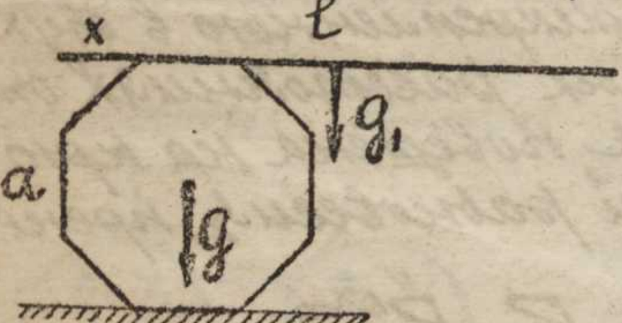
(Листок Н.Е.)

199. Три одинаковые точки m_1, m_2, m_3 расположены на неподвижной прямой так, что $m_1m_2 = m_2m_3 = a$. Первая и последняя из этих

точек притягивают, а m_2 отталкивает подвижную точку M с силами действующими обратно пропорциональными квадратам расстояний. Считая, что M находится на прямой $\perp$-ой $m_1 m_3$ и проходящей через m_2, найти положение равновесия для точки M. (Листок Н.Е.)

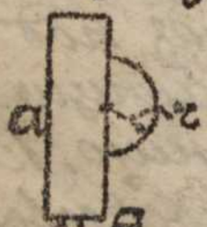
Отв. $x = \frac{a}{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}} = 1{,}30477a$.

200. Однородный стержень длины l и веса g_1 прикреплен к стороне однородной восьмигранной правильной призмы, сторона основания которой a и вес g. Определить наименьшую величину конца x при равновесии стержня и призмы. (Листок Н.Е.)



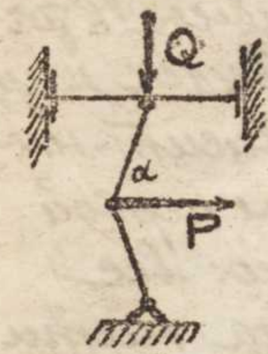
Отв. $x = \frac{l}{2} - \frac{g}{g_1}\frac{a}{2} - a$.

201. В прямоугольной коробке с размерами $a \times a \times y$ сделано на стороне квадрата круглое отверстие радиуса r. Это отверстие закрыто полусферической крышкой. Определить такое y, чтобы коробка стояла на столе, опираясь на свой край A. Поверхностная плотность везде одинакова.

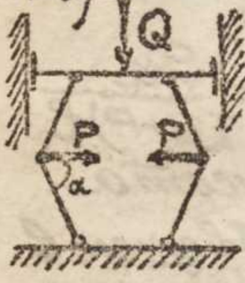


Отв. $y = \frac{-a^2+\sqrt{a^4+8\pi r^3 a}}{4a}$ (Листок Н.Е.)

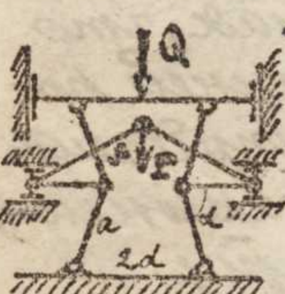
202. Два равных стержня, наклоненных к горизонту под углом α, соединены шарниром, на который действует горизонтальная сила P. Нижний стержень укреплен на неподвижном шарнире, а верхний прикреплен шарниром к доске, могущей перемещаться только вертикально. Определить силу Q, с которой надо удерживать доску в равновесии.



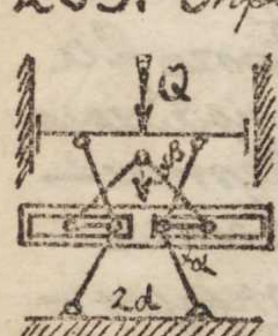
Отв. $Q=\frac{1}{2}P\,tg\alpha$ (Листок Н.Е.)



203. Определить связь между силою P и грузом Q в рычажном прессе, указанном на фигуре. (Листок Н.Е.) Отв. $P=Q\,ctg\alpha$



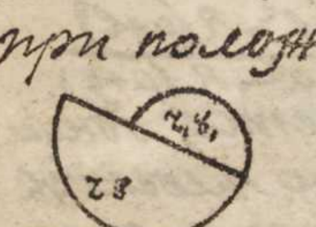
204. Определить связь между силою P и грузом Q в сложном рычажном прессе указанном на фигуре (направляющие у горизонтальных стержней неподвижны) (Листок Н.Е.) Отв $P=\frac{2Q}{tg\alpha\,tg\beta}$



205. Определить связь между силою P и грузом Q в сложном рычажном прессе, указанном на фигуре. (Направляющие подвижны)

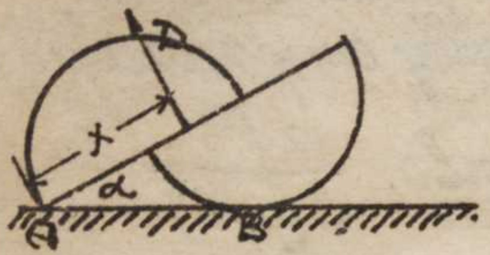
Отв. $P=\frac{2Q}{tg\alpha\,tg\beta-1}$

206. Два полушара, радиусов r и r_1 и плотностей γ и γ_1, будучи сложены основаниями, находятся в равновесии при положении, указанном на фигуре. Определить наименьший коэффициент трения f, при котором это может иметь место (Ли-



сток Н. Е.) Отв. $f=\frac{8}{3}\frac{(r-r_1)\,r_1^3 Q_1}{r^4 Q-r_1^4 Q_1}$.

207 Цилиндр радиуса r и весом $2Q$ разрезан по диаметральной плоскости на две половины, которые опираются как показано на чертеже. $\angle\alpha$ известен. Найти при равновесии: 1) коэфф. трения f плоскостей разреза, 2) реакции опор A и B и 3) давление между полуцилиндрами, а также и точку его приложения – расстояние x. (Листок Н.Е.) Отв. $f=\operatorname{tg}\alpha$; $A=Q(1-\sin\alpha)$; $B=Q(1+\sin\alpha)$; $D=Q\sin\alpha\cos\alpha$; $x=r\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{4}{3\pi}\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

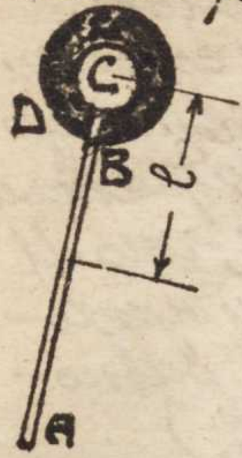


208. Полуцилиндр опирается на два других полуцилиндра, лежащих на горизонтальной плоскости. Трения происходят только между плоскостью и нижними полуцилиндрами. Определить расстояние x, при котором начнется скольжение. (Листок Н. Е.)

Отв. $x=\frac{2f(r+r_1)(Q+2Q_1)}{\sqrt{Q^2+f^2(Q+2Q_1)^2}}-2r_1$

209. На двух наклонных под 45° к горизонту плоскостях лежат три куба, весом каждый Q. Дан угол трения ρ между соприкасающимися плоскостями. Какой вертикальной силой можно поднять нижний куб?

Отв. $P=Q(2+\sin 2\rho)$



210. Стержень AB, имеющий на конце шип C, радиуса r, висит опираясь этим шипом на внутреннюю поверхность горизонтального цилиндра D с трением. Определить наибольший угол отклонения стержня, если угол трения есть i и расстояние центра тяжести стержня от центра шипа — l. (Листок Н.Е.) Отв. $\sin\theta = \frac{r}{l}\sin i$

Устойчивость.

211. Квадратная однородная пластинка поддерживается нитью, прикрепленною в двух точках K и L на равных расстояниях от вершины. Вся система повешена на крючек C. Найти случай равновесия, пренебрегая весом нити.

212. Две весомые точки P и P' соединены невесомою нитью и помещены на выпуклой поверхности цилиндра, положенного горизонтально. Найти положение равновесия и найти какое оно будет.

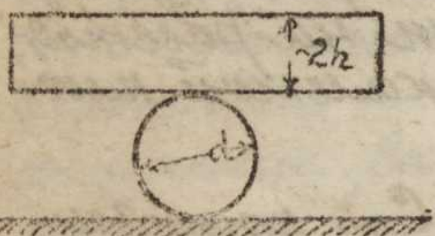
213. Материальная точка находится под действием двух центров, притягивающих с силою, пропорциональной расстоянию. В каком случае равновесие будет устойчивое, неустойчивое и безразличное?

214. Эллиптический диск, весьма плотный и однородный, опирается на две точки, на-

ходящиеся на одной горизонтали, двумя ближайшими концами симметричных сопряженных диаметров и находится в вертикальном положении. Показать, что это равновесие – неустойчивое.

215. Твердое тело, форме полушара, соединено своей плоской частью с основанием конуса и поставлено выпуклостью на горизонтальную плоскость. Найти наибольшую высоту, которую может иметь конус, чтобы равновесие было устойчивое.

216. На круглом цилиндре диаметра $d=2r$, покрытом мелкими продольными насечками,



лежит в равновесии пластинка, толщины $2h$, нижняя сторона которой покрыта такими же насечками, предохраняющими пластинку от скольжения. Найти при какой толщине пластинки равновесие будет устойчивое и при какой неустойчивое. (В.П.В.)

Момент устойчивости.

217. Определить устойчивость стены, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, высота которого H, длина L и ширина B.

Отв. $\delta\frac{B^2 \cdot H \cdot L}{2}$

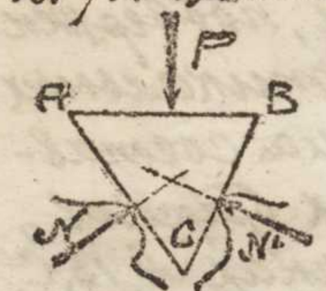
218. Определить устойчивость стены, представляющей в поперечном сечении прямоу-

гольную трапецию, высота которой H, а основания - верхнее и нижнее - B и b, если длина стороны L, а вес куб. ед. материи γ

Отв. $\gamma\frac{h\gamma}{6}(B^2+Bb+b^2)$; $\gamma\frac{h\gamma}{6}(2B^2+Bb-b^2)$

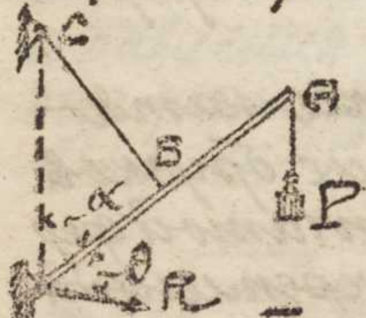
Графостатика.

219. Решить с помощью силового многоугольника задачу об определении отношения между собой силы P, действующей на клин ABC и сил N и N' при сопротивлении.



Отв. $P : N : N' = AB : AC : BC$.

220. Палочка AO укреплена в точке O на шарнире и привязана за свою середину B к нити BC, которая перпендикулярна к палочке и прикреплена другим концом к неподвижной стене; в точке A палочка подвержена действию груза P. Определить

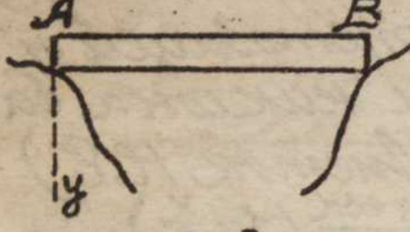


графостатически силу R, сопротивление шарнира, и угол θ, который эта сила делает с палочкой, если $\angle COA = \alpha$. Отв. $R = P$; $\theta = \alpha$.

221. Решить графостатически задачу об определении силы T, поддерживающей в равновесии брус AB, веса P, опирающийся на горизонтальную и наклонную плоскости.

222. Однородный брусок веса P и длины l, ле-

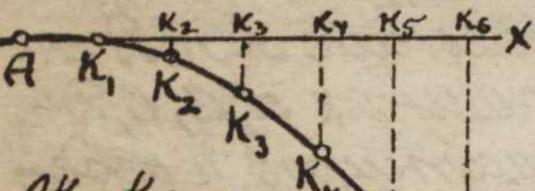
жит горизонтально, опираясь концами на подпорки A и B. Определить уравнение кривой ABC, в которую обращается для этого случая нитяной многоугольник, проходящий через точку A.



Отв. Приняв за ось x AB, а верхнюю прямую проходящую через точку A вниз, за ось y, найдем:

$y = hP\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$, где h длина перпендикуляра, опущенного из полюса силового многоугольника на этот последний.

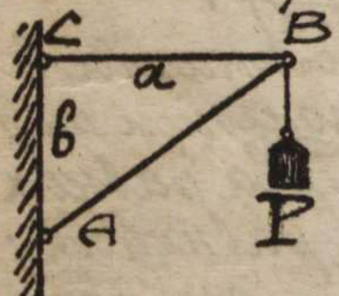
223. Дан нитяной многоугольник $AK_1K_2 \dots B$, расположенный так, что первое звено AK_1 направлено по горизонтальной прямой Ax, проекции же всех остальных звеньев на ось Ax равны AK_1. Силы p_1, $p_2 \dots$, действующие в точках $k_1, k_2 \dots$, равны между собою.



$AK_1 = K_1K_2 =$
$= K_2K_3 = \dots\dots$

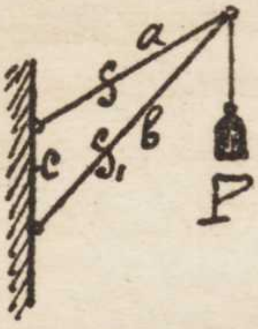
Доказать, что этот многоугольник может быть вписан в параболу.

224. Определить силы растяжения брусьев CB и AB кронштейна (сжатие зовем отрицательным растяжением.) Дан повешенный груз P и даны длины CB = a и CA = в. (Листок Н.Е.)



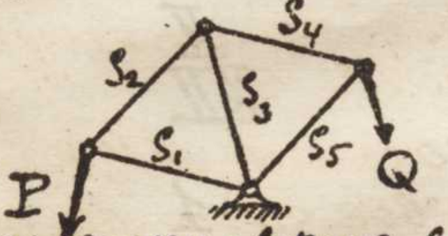
Отв. $T_{CB} = \frac{Pa}{в}$; $T_{AB} = -\frac{P}{в}\sqrt{a^2+в^2}$

2.25. Кронштейн состоит из двух брусьев a и в, соединенных шарниром и прикрепленных на шарнирах к вертикальной стене при расстоянии между шарнирами c. Определить натяжения звеньев a и b, если кронштейн удерживает груз P. (Листок Н. Е.)



Отв. $S = \frac{Pa}{c}$; $S_1 = -\frac{Pb}{c}$

226. Стержневой шарнирный ромб, перетянутый диагональю, равной стороне ромба, имеет точкою опоры вершину на конце диагонали. На его левую вершину действует сила P, перпендикулярная к соответствующей стороне ромба, а на его правую вершину сила Q, параллельная диагонали. Определить силу Q по P и натяжения звеньев.



(Листок Н. Е.)

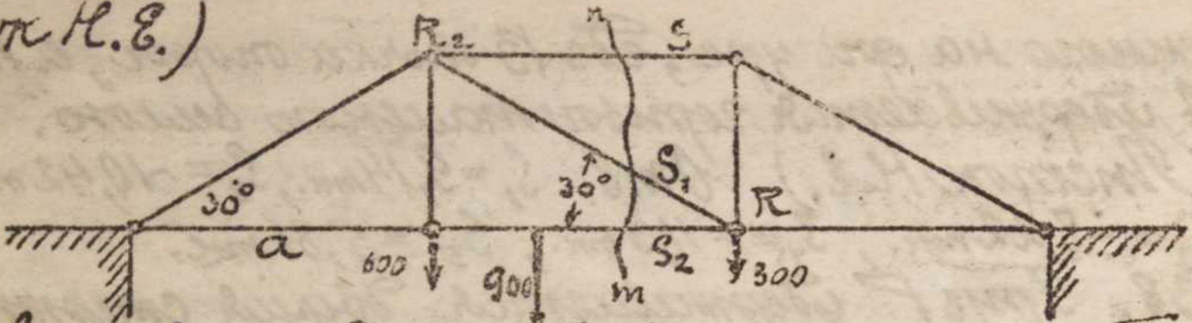
Отв. $Q = \frac{2P}{\sqrt{3}}$; $S_1 = -\frac{P}{\sqrt{3}}$; $S_2 = S_4 = +\frac{2P}{\sqrt{3}}$; $S_3 = S_5 = -\frac{2P}{\sqrt{3}}$

227. Определить по способу Риттера натяжения S, S_1, S_2 в стержнях фермы, изображенной на фигуре. (Листок Н. Е.)

Отв. $S = -40$, $S_1 = 29$ и $S_2 = 80$.

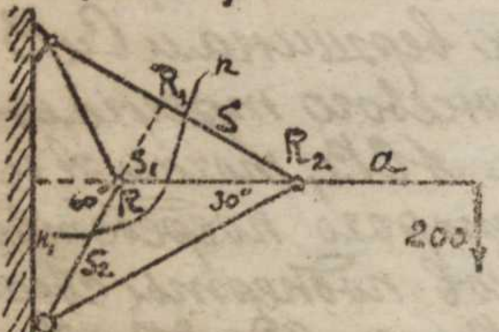
228. Определить по способу Риттера натяжения S, S_1, S_2, а равно и наибольший ломающий момент для бруска S_2 в ферме, изображенной на фигуре. (Ли-

сток Н.Е.)



Отв. $M = 200a$; $S = -400\sqrt{5}$; $S_1 = -200$; $S_2 = 500\sqrt{3}$.

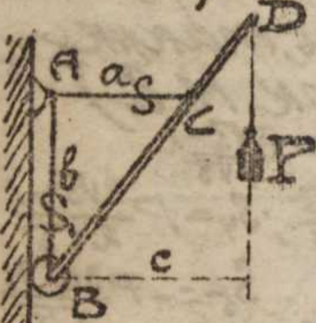
229. Определить по способу Риттера натяжения S, S_1, S_2 и наибольший ломающий момент на звене S_1 в ферме, изображенной на фигуре. (Листок Н.Е.)



Отв. $S = 1300$; $S_1 = 100\sqrt{3}$

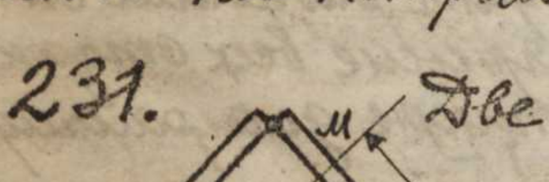
$M = 200a$

230. Брусок BCD с помощью тяг a и b прикреплен к неподвижному шарниру A. В точке B брусок опирается на стену, от которой получает горизонтальную силу реакции N. В точке D брусок поддерживает груз P. Определить силы натяжения тяг a и b и сопротивление N стены, если длина перпендикуляра, опущенного из B на направление P есть c. (Листок Н.Е.)



Отв. $N = \frac{Pc}{b}$; $S = \frac{Pc}{b}$; $S_1 = -P$.

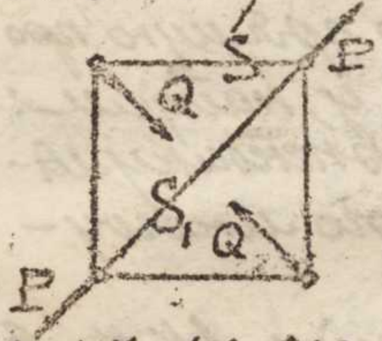
231. Две балки длины a и веса P соединены вверху шарниром, а внизу стянуты тягой, причем нижние концы могут скользить по горизон-



тальной плоскости. Определить момент пары ломающий балку в точке M, отстоящей от нижнего конца на x, если углы наклона балок к горизонту равны α. (Листок Н.Е.)

Отв. $L = -\frac{Pa\cos\alpha}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)$.

232. Определить силу натяжения диагонального бруска и сжатие стержневых сторон шарнирного квадрата под эффектом растягивающих сил P,P и сжимающих Q,Q, действующих на его противоположные вершины.



(Листок Н.Е.) Отв. $S=-\frac{Q}{\sqrt{2}}$ $S_1=P+Q$.

233. Стержневой четырехугольник ABCD соединен в вершинах A, B, C, D с помощью шарниров и перетянут диагональною тягою AC. По направлению другой тяги BD на вершины D и B действуют равные и противоположные силы Q. Определить натяжение диагонали AC, если даны отрезки диагоналей a, b, c, d.

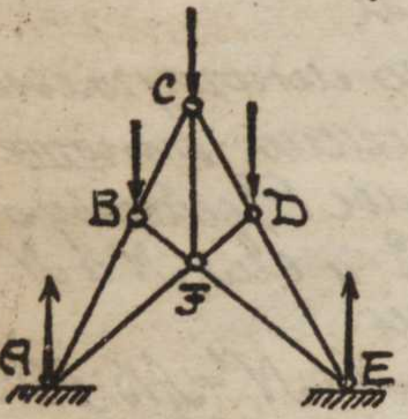
(Листок Н.Е.) Отв. $Q = P\frac{db(a+c)}{ca(b+d)}$.

234. К потолку комнаты в точках A и B при помощи шарниров прикреплены два равных стержня, длины a, равной AB; такие же два стержня соединяют также при помощи

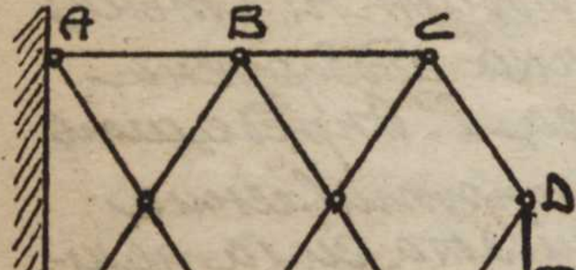
шарниров концы C и D между собою и точки B и C. Найти натяжения всех стержней, если к D прикреплен груз P. (Листок Н.Е.)

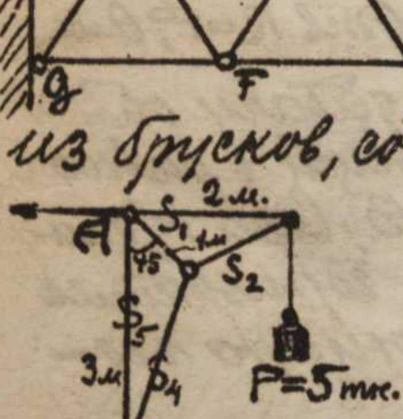
Отв. $S_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}}$; $S_2 = -\frac{P}{\sqrt{3}}$; $S_3 = \frac{P}{\sqrt{3}}$; $S_4 = -\frac{P}{\sqrt{3}}$

235. Дана стропильная ферма ABCDEF, опирающаяся в точках A и E на неподвижные опоры, подверженная действию вертикальных сил P_1, P_2, P_3. Ферма составлена из отдельных брусков, соединенных в точках A, B, C, D, E и F шарнирами. Определить графостатически натяжение в ключевом бруске CF и построить для всей фермы диаграмму Кремона.



236. Определить графостатически натяжение и давление брусков навесной решетчатой фермы ABC...G, укрепленной посредством шарниров в точках A и G и поддерживающей на своем конце D груз P. Ферма состоит из брусков, соединенных в точках A, B, C, D, E, F и G шарнирами. Построить для нее также диаграмму Кремона.

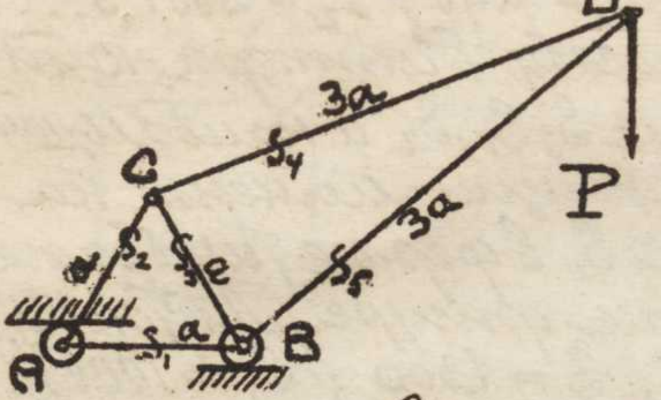




237. Определить силы натяжения брусьев крана, представ-

ленного на фигуре, где B точка опоры, а точка A удерживается горизонтальною силою. (Листок Н.Е.) Отв. $S_1 = 9{,}14$ тн., $S_2 = -10{,}42$ тн. $S_3 = -8{,}22$ тн., $S_4 = -11{,}3$ тн., $S_5 = 5{,}81$ тн.

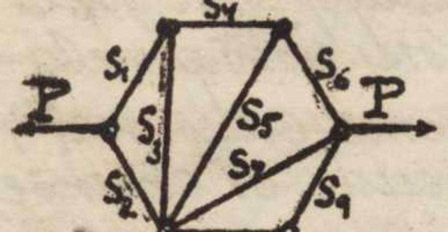
238. Груз P удерживается двумя стержнями DC и DB, прикрепленными на шарнирах к вершинам C и B стержневого треугольника ACB, точки A и B которого посредством катков подперты сверху и снизу. Дано: $AC = CB = AB = a$, $CD = DB = 3a$. Определить натяжение всех пяти стержней и давления на катки. Построить также диаграмму Кремона. (Листок Н.Е.)



Отв. $A = \frac{P}{4}(3\sqrt{5}-1)$; $B = \frac{3}{4}P(1+\sqrt{5})$; $S_1 = -P\frac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{3}}$

$S_3 = +P\frac{3\sqrt{5}-1}{3\sqrt{3}}$; $S_3 = -P\frac{7+\sqrt{115}}{2\sqrt{15}}$; $S_4 = P\frac{3\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$

$S_5 = -P\frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{15}}$



239. Правильный шестиугольник, стянутый диагоналями из одной вершины находится под вытяжкою двумя равными силами P. Определить натяжение всех сторон и диагоналей. Построить также диаграмму Кремона. (Листок Н.Е.)

Отв. $S_1 = P$; $S_2 = P$; $S_3 = -\frac{P}{2}\sqrt{3}$; $S_4 = \frac{P}{2}$

$S_5 = -\frac{P}{2}$; $S_6 = \frac{P}{2}$; $S_7 = \frac{P\sqrt{2}}{2}$; $S_8 = S_9 = 0$.

КОНЕЦ

Оглавление:

Главлит № 4757.