

Профессоръ Н. Е. Жуковскій.

# О ТРЕНИИ ЖИДКОСТИ

ПРИ БОЛЬШОЙ

## РАЗНОСТИ СКОРОСТЕЙ ЕЯ СТРУЙ.

ДОКЛАДЪ

ПЯТОМУ ВОДОПРОВОДНОМУ СЪѢЗДУ,

бывшему въ г. Кіевѣ, въ мартѣ 1901 г.

МОСКВА.

Типо-литографія Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К<sup>о</sup>, Пименовская ул., собств. домъ.  
1902.



Профессоръ Н. Е. Жуковскій.

# О ТРЕНИИ ЖИДКОСТИ

ПРИ БОЛЬШОЙ

РАЗНОСТИ СКОРОСТЕЙ ЕЯ СТРУЙ.

ПРОВЕРЕНО  
1952

ДОКЛАДЪ

ПЯТОМУ ВОДОПРОВОДНОМУ СЪѢЗДУ

бывшему въ г. Кіевѣ, въ мартѣ 1901 г.



МОСКВА.

Типо-литографія Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К<sup>о</sup>, Пименовская ул., собств. домъ.  
1902.



Отдѣльн. оттискъ изъ Трудовъ Пятаго Водопроводнаго Съѣзда.



## Докладъ профессора Н. Е. Жуковскаго.

### О треніи жидкости при большой разности скоростей ея струй.

§ 1. Теоретическія и опытные изслѣдованія надъ треніемъ жидкости привели къ заключенію, что существуетъ два типа ея движенія, при которыхъ потеря напора отъ тренія проявляется различнымъ образомъ.

Въ движеніи жидкости перваго типа сохраняется перманентность, и измѣненіе скорости внутри жидкости, при переходѣ отъ одной точки къ другой, непрерывное; при второмъ типѣ движенія струйки жидкости колеблются около нѣкоторыхъ среднихъ положеній, и внутри жидкости происходятъ рѣзкія измѣненія скорости съ образованіемъ водоворотовъ. Потеря напора отъ тренія при первомъ типѣ движенія жидкости пропорціональна первой степени средней скорости, а при второмъ—она пропорціональна квадрату средней скорости. Движеніе жидкости перваго рода удовлетворяетъ уравненіямъ гидродинамики вязкой жидкости въ формѣ Навье; при изслѣдованіи же движенія второго рода можно пользоваться формулами Бусинеска <sup>1)</sup>, предложившаго рассматривать во всякой точкѣ потока среднюю скорость, за большой промежутокъ времени, и считать коэффициенты тренія въ формулахъ Навье зависящими отъ средней скорости на периметрѣ живого сѣченія и отъ мѣста точки.

Для того, чтобы жидкость имѣла движеніе перваго рода, необходимо соблюденіе извѣстныхъ условій. Для теченія по труб-

---

<sup>1)</sup> Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes.



камъ по закону Пуазеля требуется малый діаметръ трубокъ, небольшая скорость и отсутствіе рѣзкихъ выступовъ на стѣнкахъ трубокъ. Существуютъ интересные опыты Осборна <sup>1)</sup>, въ которыхъ показывается, какъ перманентный потокъ жидкости переходитъ въ колебательный. Осборнъ пускалъ воду вдоль стеклянной трубки изъ-подъ напора и располагалъ аппаратъ такъ, чтобы по оси трубки бѣжала еще изъ-подъ того же напора струйка окрашенной воды. Пока скорость потока не достигала извѣстнаго предѣла, окрашенная струйка была рѣзко очертана и направлялась по оси трубки; но когда скорость теченія переходила этотъ предѣлъ, вся жидкость въ трубкѣ смѣшивалась и дѣлалась окрашенной.

Интересныя опытыя изслѣдованія надъ двумя указанными типами движенія жидкости можно прочесть въ сочиненіи Couette <sup>2)</sup>.

Мое сообщеніе будетъ заключаться въ изложеніи опытовъ, которые я дѣлалъ надъ трубками разнообразныхъ діаметровъ, заставляя въ нихъ двигаться воду, увлекаемую шнуромъ, движущимся съ большими скоростями вдоль оси трубки, при чемъ шнуръ въ видѣ безконечнаго шнура натягивался между двумя блоками.

Теоретическое изслѣдованіе наблюденныхъ мною явленій излагается въ сочиненіи, которое будетъ напечатано въ Бюллетеняхъ Политехническаго Общества, а здѣсь я изложу только результаты моихъ опытовъ, сдѣланныхъ въ 1900 году въ Московскомъ Университетѣ, и вытекающія изъ нихъ практическія приложенія.

§ 2. На фиг. 1 представлено расположеніе опытовъ. Безконечная нить перекидывалась черезъ блоки *A* и *B* и приводилась въ быстрое движеніе посредствомъ ремня *QQ*, надѣтаго на электромоторъ. Я употреблялъ сначала электромоторъ съ постояннымъ токомъ, а потомъ—съ переменнымъ, при чемъ во второмъ случаѣ для полученія различныхъ скоростей пользовался ступеньчатыми шкивами. Восходящая часть нити проходила

---

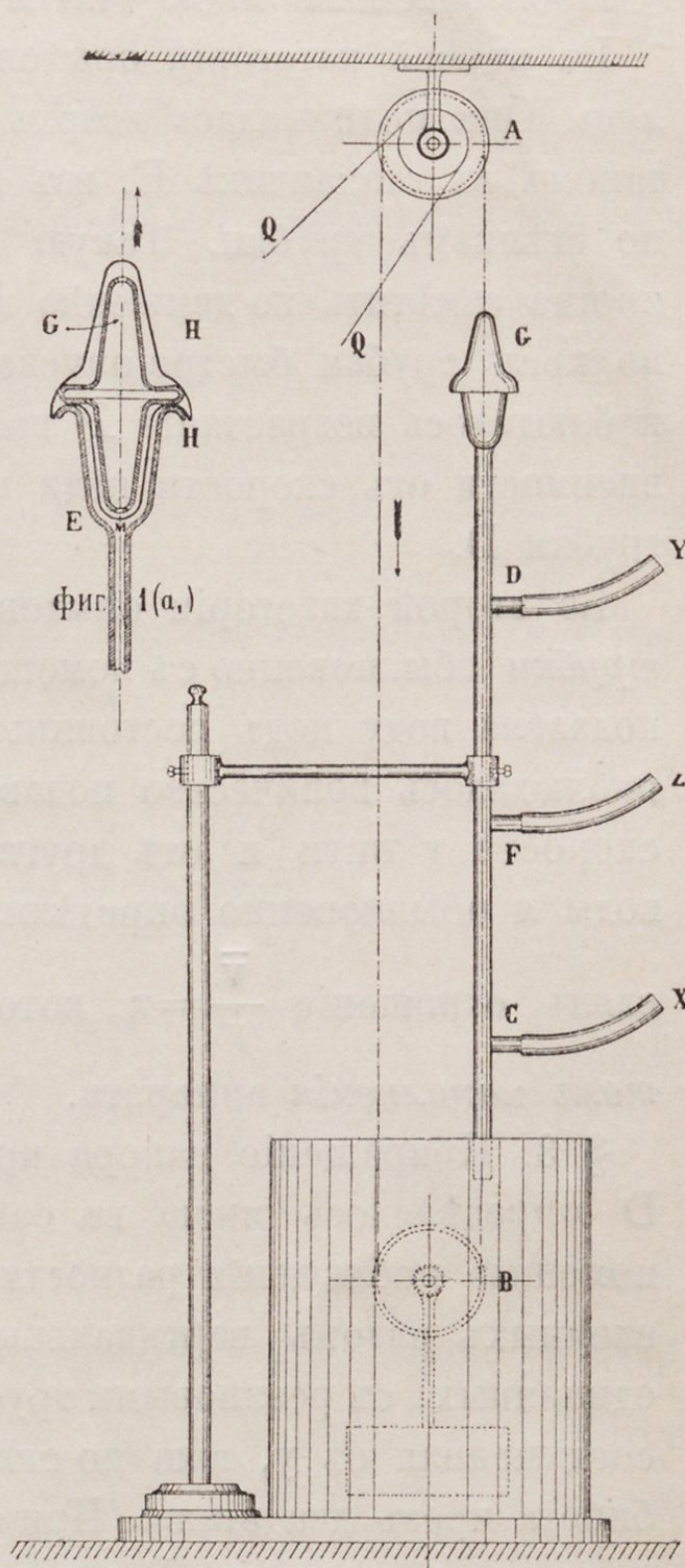
<sup>1)</sup> Osborne Reynolds, Proceedings of the Royal Society of London, t. XXXV

<sup>2)</sup> Couette, Etudes sur le frottement des liquides, Thèses, Paris, 1890.



вдоль оси стеклянной трубки, имѣющей сверху расширеніе въ видѣ стаканчика *E* съ загнутыми краями. Въ этотъ стаканчикъ помѣщалась стеклянная пробка *G*, пустая внутри, сквозь узкія дырки которой проходила нить. На нижній и верхній выступъ пробки надѣвались гуттаперчевые соски *H* и *H*, тоже съ маленькими дырками, пропускающими нить; края этихъ сосковъ привязывались проволокой къ закраинамъ стаканчика *E*. Такое расположеніе, внося незначительное треніе, давало прочный затворъ, не выпускающій воду изъ трубки, несмотря на весьма большое давленіе, которое развивалось въ стаканчикѣ *E*<sup>1)</sup>.

При началѣ трубки, въ точкѣ *C*, и при концѣ ея, въ точкѣ *D*, имѣлось два насадка для резиновыхъ трубокъ—*x* и *y*, идущихъ къ манометру, показывающему разность *P* давленій въ точкахъ *C* и *D*. Разстояніе  $l = CD$  измѣнялось въ различныхъ опытахъ отъ 10 сантиметровъ до 100, при чемъ при той же скорости обнаружена пропорціональность напора *P* разстоянію *l*. Въ нѣкоторыхъ трубкахъ я дѣлалъ три насадка, при чемъ насадокъ *F* помѣщался на срединѣ разстоянія между *C* и *D*. При этомъ



Фиг. 1.

<sup>1)</sup> Эта деталь была изобрѣтена моимъ даровитымъ помощникомъ при опытахъ, покойнымъ студентомъ Московскаго Университета Труткинымъ.



оказывалось, что разности давлений между F и C и между D и F одинаковы.

Произведенные мною опыты были двухъ родовъ.

Въ первой категоріи опытовъ *вода изъ трубки не выпускалась*. Она поднималась вверхъ вмѣстѣ съ нитью и была фонтаномъ въ стаканчикѣ E, изъ котораго она опускалась внизъ по стѣнкамъ трубки. Такую циркуляцію воды можно было иногда замѣтить по движенію воздушныхъ пузырьковъ, которые по краю трубки быстро опускались внизъ. При этихъ опытахъ наблюдалось возрастаніе  $P$  напора на длину  $l$  трубки въ зависимости отъ скорости нити  $v$ , діаметра нити  $d$  и діаметра трубки  $D$ .

Во второй категоріи опытовъ *вода бралась изъ стеклянной трубки* обыкновенно съ помощью резиновой трубки  $y$ , которая подавала воду подъ постоянный напоръ. При этихъ опытахъ наблюдалось количество подаваемой воды въ зависимости отъ скорости  $v$  нити и отъ другихъ элементовъ. По количеству воды я обыкновенно опредѣлялъ среднюю скорость  $\bar{v}$  и составлялъ отношеніе  $\frac{\bar{v}}{v} = \eta$ , которое можно назвать *коэффициентомъ наполненія* аппарата.

§ 3. Приращеніе напора при переходѣ отъ точки C къ точкѣ D опредѣлялось мною въ сантиметрахъ водяного столба съ помощью наблюденія разности уровней воды въ двухъ поставленныхъ рядомъ вертикальныхъ стеклянныхъ трубкахъ, соединенныхъ съ резиновыми трубками  $x$  и  $y$ . При этомъ трубка, соединенная съ  $y$ , шла по стѣнѣ лѣстницы механическаго кабинета чрезъ два этажа. При очень большихъ скоростяхъ нити получалась величина  $P$  настолько значительная, что приходилось пользоваться ртутнымъ манометромъ.

Скорость нити  $v$  иногда опредѣлялась по числу оборотовъ шкива A, но по большей части она находилась, прямо подсчитывая число пробѣговъ всей безконечной нити, которая имѣла 12 метровъ; для этого на нити дѣлалось пятно и опредѣлялось число прохожденій пятна чрезъ опредѣленную точку въ данное время.

Мое главное вниманіе было обращено на опредѣленіе зави-



симости между  $P$  и  $v$ . Оказалось, что, начиная со скоростей, при которых вода поднимается въ трубкахъ (въ узкихъ трубкахъ около 3 метровъ),  $P$  измѣняется приблизительно пропорціонально  $v^2$ . Движеніе жидкости надо такимъ образомъ отнести здѣсь ко второму типу, несмотря на то, что рѣчь идетъ о трубкахъ малаго діаметра.

Приводимъ здѣсь таблицу опытовъ со стеклянною трубкою діаметра 3,5 миллиметра:

Опыты 27 іюля 1900 г.

$$l = 750 \text{ mm.}, D = 3,5 \text{ mm.}, d = 0,3 \text{ mm.}$$

| Нумеръ<br>опыта. | $v$ въ<br>метрахъ. | $P$ въ<br>сантиметрахъ. | $\frac{P}{v}$ | $\frac{P}{v^2}$ |
|------------------|--------------------|-------------------------|---------------|-----------------|
| 1                | 3,57               | 59                      | 16,53         | 4,65            |
| 2                | 4,42               | 90                      | 20,36         | 4,61            |
| 3                | 5,69               | 154                     | 27,06         | 4,74            |
| 4                | 7,87               | 291                     | 36,97         | 4,70            |
| 5                | 8,45               | 340                     | 40,24         | 4,76            |
| 6                | 10,45              | 533                     | 51,00         | 4,88            |
| 7                | 10,84              | 555                     | 51,20         | 4,72            |
| 8                | 11,73              | 665                     | 56,69         | 4,83            |

Изъ этой таблицы видно, что законъ пропорціональности напора скорости, который бы требовалъ постоянства  $\frac{P}{v}$ , совершенно не удовлетворяется, такъ какъ эта величина быстро увеличивается вмѣстѣ со скоростью  $v$ ; законъ же пропорціональности напора квадрату скорости нити удовлетворяется довольно близко, вслѣдствіе малой измѣняемости  $\frac{P}{v^2}$ .

Ниже приводится вторая таблица подобныхъ же опытовъ, въ которыхъ жидкость увлекалась тремя соединенными вмѣстѣ нитями толщины  $d=0,3 \text{ mm.}$  (обыкновенная швейная бумага, медвѣдь № 20), для того, чтобы указать, какіе громадныя напоры можно получать съ помощью описываемаго способа.



Опыты 15, 17 и 24 марта 1900 г.

$l = 1000$  mm.,  $D = 2,8$  mm., три нитки  $d = 0,3$  mm.

| Нумеръ<br>опыта. | $v$ въ<br>метрахъ. | $P$ въ<br>сантиметрахъ. | $\frac{P}{v}$ | $\frac{P}{v^2}$ |
|------------------|--------------------|-------------------------|---------------|-----------------|
| 1                | 3,97               | 250                     | 62,97         | 15,86           |
| 2                | 4,40               | 300                     | 68,18         | 15,49           |
| 3                | 4,69               | 375                     | 79,26         | 16,90           |
| 4                | 5,32               | 450                     | 84,59         | 15,90           |
| 5                | 5,49               | 500                     | 91,07         | 16,59           |
| 6                | 5,87               | 600                     | 102,21        | 17,41           |
| 7                | 6,37               | 690                     | 108,32        | 16,98           |
| 8                | 7,38               | 880                     | 119,24        | 16,15           |
| 9                | 7,58               | 1.000                   | 131,93        | 17,40           |
| 10               | 8,57               | 1.200                   | 140,01        | 16,34           |
| 11               | 9,29               | 1.450                   | 156,08        | 16,80           |
| 12               | 9,49               | 1.600                   | 168,60        | 17,78           |
| 13               | 10,76              | 2.000                   | 185,87        | 17,27           |

Въ этой таблицѣ постоянно  $\frac{P}{v^2}$  слабѣе, нежели въ предыдущей, что, вѣроятно, произошло оттого, что опытъ дѣлался съ тѣми же нитями въ теченіе 3-хъ дней. Мы видимъ, что давленіе  $P$  доходило почти до двухъ атмосферъ, несмотря на то, что факторомъ, производящимъ это давленіе являлись три тоненькія швейныя нитки. Этотъ парадоксальный, на первый взглядъ, результатъ при разборѣ теоріи явленія получаетъ полное объясненіе и находится въ согласіи съ величинами коэффиціентовъ тренія воды, введенныхъ Бусинескомъ. Указанный мною способъ полученія большихъ давленій можетъ быть найденъ практическое примѣненіе для устройства гидравлическихъ прессовъ безъ поршней и клапановъ.

Желая опредѣлить вліянія толщины нити на величину  $P$ , я дѣлалъ опыты съ одною и тою же трубкою:  $l = 250$  mm.,  $D = 4,3$  mm., въ которой образовывался напоръ съ помощью



$n$  нитей въ 0,3 mm., при чемъ дѣлалось три серіи опытовъ—при  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=4$ , и изъ каждой опредѣлялась средняя величина  $\frac{P}{v^2}$ .

Результаты этихъ опытовъ выразились нижеслѣдующею таблицею.

**Опыты 31 января 1900 г.**

$l = 250$  mm.,  $D = 4,3$  mm.,  $d = 0,3$  mm.

| Число<br>нитей $n$ . | Средняя<br>величина $\frac{P}{v^2}$ . | $\frac{P}{v^2 n}$ |
|----------------------|---------------------------------------|-------------------|
| 1                    | 0,73                                  | 0,73              |
| 2                    | 1,42                                  | 0,71              |
| 4                    | 3,56                                  | 0,73              |

Таблица показываетъ, что  $\frac{P}{nv^2}$  мало измѣняется, и, слѣдовательно, сила напора приблизительно пропорціональна числу нитокъ. То обстоятельство, что съ уменьшеніемъ толщины ведущаго шнура до очень малыхъ размѣровъ  $P$  не стремится къ опредѣленному предѣлу, даетъ важное заключеніе для теоріи явленія, такъ какъ вслѣдствіе этого нельзя принять, что жидкость, прилегающая къ шнуру, движется со скоростью шнура.

Что касается до вліянія діаметра, то сдѣланные нами опыты при одной и той же нити относятся къ трубкамъ съ діаметрами мало измѣняющимися, и потому довольно трудно установить изъ нихъ вліяніе діаметра.

Теоретически это вліяніе выражается сложно. Приводимъ здѣсь среднюю величину серій наблюденій надъ трубкою  $l = 250$  mm. при четырехъ нитяхъ  $d = 0,3$ :

Здѣсь оправдывается приблизительно обратная пропорціональность величины  $P$  діаметру  $D$ .



Опыты 8 и 13 декабря 1899 г.

$l = 250$  mm., четыре нитки  $d = 0,3$  mm.

| Диаметръ<br>$D$ въ мил-<br>лиметрахъ. | $\frac{P}{v^2}$ | $\frac{PD}{v^2}$ |
|---------------------------------------|-----------------|------------------|
| 3,5                                   | 4,54            | 15,9             |
| 3,9                                   | 4,21            | 16,4             |
| 4,3                                   | 3,56            | 15,3             |

§ 4. Переходимъ ко второй категоріи опытовъ, служащихъ для опредѣленія коэффиціента наполненія.

При употребленіи аппарата (фиг. 1) вода подавалась резиновою трубкою  $y$  въ литровку, при чемъ изливающий конецъ трубки  $y$  ставился на высотѣ насадка  $D$ , а длина  $l$  измѣрялась отъ нижняго конца стеклянной трубки до  $D$ . Привожу таблицу опытовъ:

Опыты 30 апрѣля 1900 г.

$l = 1.000$  mm.,  $D = 4$  mm.,  $d = 1$  mm.

| Нумеръ<br>опыта. | $v$ въ<br>метрахъ. | $\bar{v}$ въ<br>метрахъ. | $\eta = \frac{\bar{v}}{v}$ |
|------------------|--------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1                | 2,63               | 0,68                     | 0,26                       |
| 2                | 2,95               | 0,81                     | 0,27                       |
| 3                | 3,10               | 0,88                     | 0,28                       |
| 4                | 3,60               | 1,21                     | 0,34                       |
| 5                | 4,32               | 1,63                     | 0,38                       |
| 6                | 5,63               | 2,41                     | 0,43                       |
| 7                | 6,82               | 2,94                     | 0,43                       |
| 8                | 7,55               | 3,63                     | 0,48                       |

Изъ таблицы видно, что съ возрастаніемъ скорости  $v$  коэффиціентъ  $\eta$  увеличивается, приближаясь къ  $\frac{1}{2}$ . Такой же результатъ былъ найденъ мною и изъ многихъ другихъ опы-



товъ. Приведу еще таблицу опытовъ, въ которыхъ направляющею трубкою служила вертикально натянутая резиновая трубка въ 6 метровъ длины:

Опыты 18 мая 1900 г.

$$l = 6.000 \text{ mm.}, D = 4, d = 1,1.$$

| Нумеръ<br>опыта. | v въ<br>метрахъ. | $\bar{v}$ въ<br>метрахъ. | $\eta = \frac{\bar{v}}{v}$ |
|------------------|------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1                | 3,26             | 1,33                     | 0,41                       |
| 2                | 4,02             | 1,66                     | 0,41                       |
| 3                | 5,52             | 2,65                     | 0,48                       |
| 4                | 8,38             | 4,24                     | 0,51                       |
| 5                | 8,71             | 4,71                     | 0,54                       |

Вообще при гладкихъ нитяхъ и отношеніи  $\frac{d}{D} = \frac{1}{4}$  мы получали при наибольшихъ доступныхъ намъ скоростяхъ нити коэффициентъ наполненія около  $\frac{1}{2}$ . Этотъ коэффициентъ увеличивается при употребленіи шнуровъ съ выступами или цѣпей. Для его увеличиванія выгодно пускать въ одной и той же трубѣ нѣсколько цѣпей рядомъ, на нѣкоторомъ разстояніи другъ отъ друга. Я пробовалъ дѣлать практическое приложеніе изслѣдуемаго явленія къ подъему воды.

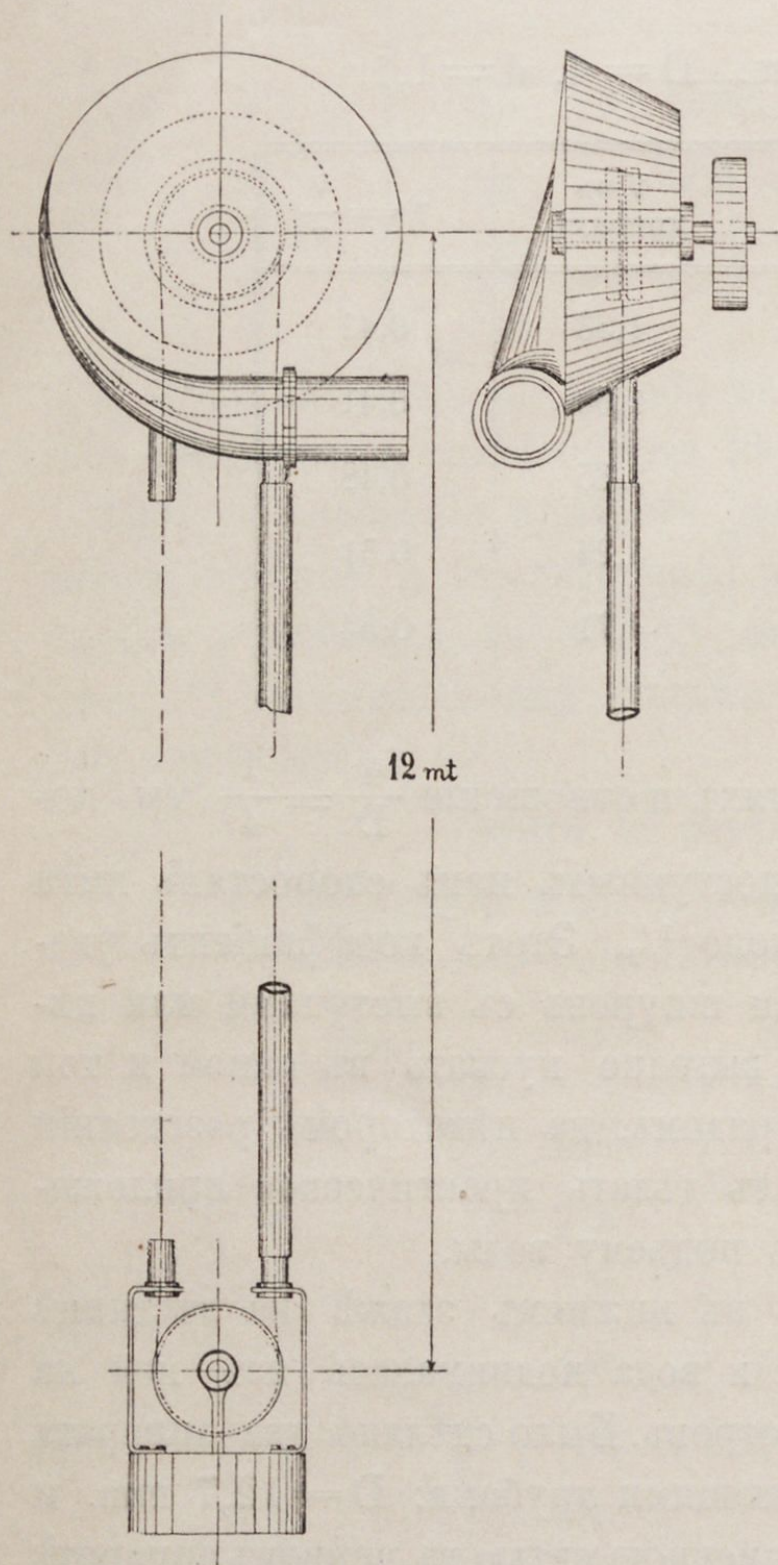
Бочка воды помѣщалась въ нижнемъ этажѣ на лѣстницѣ математическаго факультета, и вода поднималась изъ нея на третій этажъ, на высоту 13 метровъ. Было сдѣлано два аппарата съ гуттаперчевыми направляющими трубами:  $D = 12,7 \text{ mm.}$  и  $D = 31,7 \text{ mm.}$ , при чемъ безконечною нитью въ первомъ аппаратѣ служила цѣпочка въ 5 mm. въ среднемъ поперечникѣ, надѣваемая на гладкіе блоки съ резиною набивкою, а во второмъ — цѣпочка съ плоскими прямоугольными звеньями  $15 \times 20$ , надѣваемая на зубчатые шкивы.

Направляющій резиновый рукавъ своимъ верхнимъ концомъ прикрѣплялся къ особому центробѣжному приѣмнику (фиг. 2),



а своимъ нижнимъ концомъ—къ свободно висящей рамѣ, на которой находился нижній шкивъ цѣпочки. Опыты показали, что устройство свободно висящаго нижняго шкива не вызываетъ крученія устроенной системы, которая при ходѣ цѣпочки держится вполне устойчиво. При скорости  $v = 8$  метровъ произ-

водительность малаго аппарата была 0,3 литра въ 1", а большого—2,6 литра въ 1" (761 ведра въ часъ). Коэффициентъ полезнаго дѣйствія мнѣ не удалось еще опредѣлить прямымъ опытомъ, но простое теоретическое соображеніе показываетъ, что онъ долженъ быть менѣе  $\eta$ , а такъ какъ  $\eta$  былъ около  $\frac{1}{2}$ , то построенные аппараты имѣли низкій коэффициентъ полезнаго дѣйствія. Но за то они отличаются простотою и транспортностью. Я думаю, что для временныхъ откачекъ, гдѣ нужна быстрая установка, они могутъ быть полезны. Точно такъ же надо ожидать ихъ примѣнимости для добыванія нефти изъ скважинъ, гдѣ вслѣдствіе обилія топлива главное значеніе не въ механической экономичности, а въ дешевизнѣ



Фиг. 2.

и компактности пріемника. Прибавлю въ окончаніе моей замѣтки, что инженеръ А. А. Саткевичъ, который слушалъ мой докладъ на Кіевскомъ Водопроводномъ Съѣздѣ, любезно сообщилъ мнѣ, что еще въ 1782 году французскій механикъ



*Véra* \*) съ успѣхомъ пользовался вертикальнымъ безконечнымъ шнуромъ для подъема воды на значительныя высоты. При этомъ онъ не употреблялъ направляющаго рукава. Подобныя же изслѣдованія въ Москвѣ были сдѣланы относительно подъема нефти инженеромъ В. Г. Шуховымъ, результаты которыхъ, къ сожалѣнію, не опубликованы. Теоретически разсуждая, можно сказать, что способъ открытаго шнура, увлекающаго за собою жидкость, даетъ болѣе высокій коэффициентъ полезнаго дѣйствія (я показываю въ своей теоретической статьѣ, что коэффициентъ этотъ можетъ быть доведенъ до 0,8). Но здѣсь, какъ показалъ *Parcieux* изъ разсмотрѣнія водоподъемниковъ, осуществленныхъ по типу *Véra*, коэффициентъ полезнаго дѣйствія уменьшается съ увеличеніемъ высоты подъема, вслѣдствіе потери воды со шнура; между тѣмъ какъ дѣйствіе водоподъемника съ направляющимъ рукавомъ одинаково при всякой высотѣ подъема. Теперь я предпринимаю опыты, въ которыхъ потеря воды устраняется безъ помощи направляющаго рукава; о нихъ сообщу въ моей теоретической статьѣ въ бюллетеняхъ Политехническаго Общества.

---

По этому докладу, по предложенію докладчика, принято слѣдующее постановленіе, въ дополненіе къ докладу инженера Д. Н. Вѣникова.

Представляется желательнымъ, чтобы были произведены изслѣдованія не только потерь напора въ трубахъ, но и изслѣдованія давленій въ различныхъ мѣстахъ поперечнаго сѣченія трубы и скоростей въ различныхъ точкахъ этого сѣченія.

---

\*) *Parcieux*, Dissertation sur le moyen d'élever l'eau par la rotation d'une corde verticale sans fin. Paris. 1782.



Отд. оттискъ изъ «Трудовъ 5-го Водопроводнаго Съѣзда».