

1239
123248
О ДВИЖЕНІИ

МАТЕРІАЛЬНОЙ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

ПО ПОВЕРХНОСТИ

ПСЕВДОСФЕРЫ.

Н. Е. Жуковского.

Отдѣльный оттискъ изъ XI тома Трудовъ Отдѣленія физическихъ
Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей
Естествознанія, Антропологии и Этнографіи.

МОСКВА.

Университетская типогр., Страстной бульв.

1902.

О ДВИЖЕНИИ

МАТЕРИАЛЬНОЙ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

ПО ПОВЕРХНОСТИ

ПСЕВДОСФЕРЫ.

Н. Е. Жуковского.

ПРОВЕРЕНО
1952

Отдѣльный оттискъ изъ XI тома Трудовъ Отдѣленія физическихъ
Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей
Естествознанія, Антропологии и Этнографіи.



МОСКВА.

Университетская типогр., Страстной бульв.
1902.

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРІАЛЬНОЙ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПСЕВДОСФЕРЫ.

Н. Е. Жуковского.

(Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 21 мая 1902 года).

§ 1. Въ одномъ изъ своихъ сочиненій Лобачевскій высказываетъ пожеланіе, чтобы въ указанномъ имъ неэвклидовскомъ пространствѣ были разсмотрѣны задачи механики. Это пожеланіе въ настоящее время выполнено во многихъ кинематическихъ и динамическихъ изслѣдованіяхъ по воображаемой и многомѣрной геометріи. Но между всѣми подобными вопросами по механикѣ одинъ имѣетъ вполнѣ реальное значеніе: это—задача о движеніи неизмѣняемой матеріальной площадки по плоскости Лобачевского, такъ какъ эта задача въ эвклидовскомъ пространствѣ представляетъ движеніе матерьяльной изгибающейся псевдосферической площадки по поверхности неподвижной псевдосферы. Рѣшеніе этой задачи представляетъ предметъ нашей замѣтки.

Чтобы съ большею наглядностью изложить это рѣшеніе, припомнимъ, какъ изслѣдуется аналогичная задача о движеніи по инерціи матеріальной сферической площадки по поверхности неподвижной сферы. Съ динамической точки зрѣнія послѣдняя задача есть извѣстная задача Эйлера о движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки. Построивъ три оси эллипсоида инерціи нашей сферической площадки относительно центра сферы и отмѣтивъ точки A, B, C , въ которыхъ эти оси пересѣкаютъ сферу, получимъ триортогональный сферическій треугольникъ ABC (фиг. (1)). Каждая изъ трехъ вершинъ этого треугольника явится свободнымъ полюсомъ вращенія нашей сферической площадки, т.-е. около этихъ вершинъ площадка можетъ по инерціи имѣть равномерное вращательное движеніе. Если нашей сферической площадкѣ сообщено начальное вращательное движеніе около какого-нибудь другого полюса, то она уже не будетъ продолжать около него вращаться, а будетъ совершать по поверхности сферы движеніе, которое удобно интерпретировать съ помощію, такъ называемыхъ, дополнительныхъ конусовъ.

Уравненія дополнительныхъ конусовъ по отношенію къ главнымъ осямъ инерціи площадки относительно центра сферы напишутся такъ:

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 0, \quad (1)$$

гдѣ a, b, c квадраты полуосей эллипсоида инерціи пло-

щадки относительно упомянутого центра, а λ параметръ семейства конусовъ. Если подставимъ въ форм. (1) выраженія:

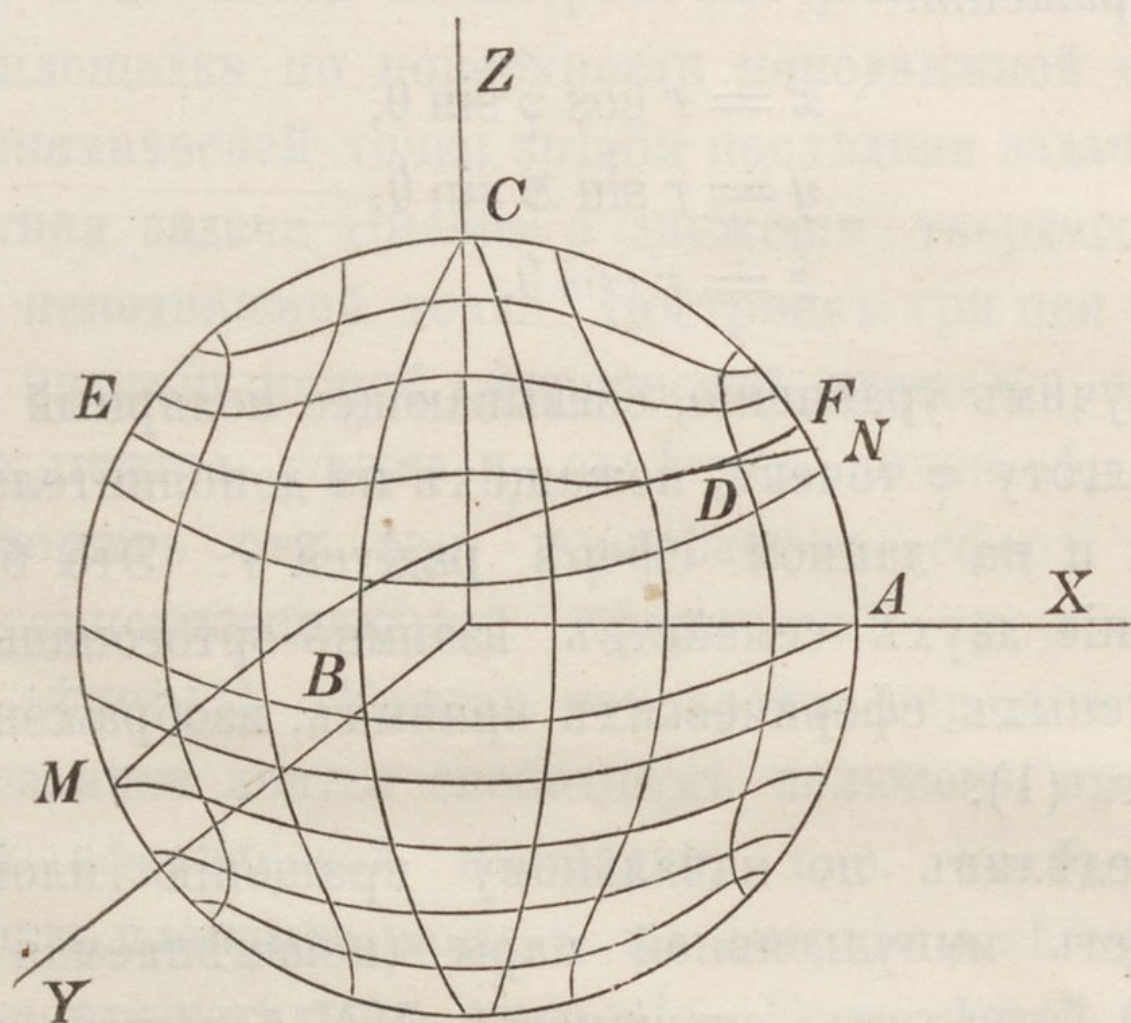
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

то получимъ уравненіе, связывающее полярный уголъ θ и долготу φ точекъ, лежащихъ на дополнительномъ конусѣ и на данной сферѣ радіуса r . Это будетъ уравненіе двухъ семействъ взаимно-ортогональных софокусныхъ сферическихъ кривыхъ, изображенныхъ на фиг. (1).

Опредѣливъ по начальному вращенію площадки плоскость импульсивной пары (неизмѣняемая плоскость), отмѣтимъ окружность MN большого круга, по которой эта плоскость пересѣкаетъ сферу, и отыщемъ ту изъ сферическихъ кривыхъ, которая прикасается къ этой окружности. Все движеніе сферической площадки по поверхности сферы сводится къ тому, что найденная сферическая кривая, соединенная съ площадкою, будетъ катиться безъ скольженія по окружности MN , а эта послѣдняя окружность вмѣстѣ съ площадкою и сферическою кривою будетъ равномерно вращаться около своего полюса.

Такъ какъ дифференціальныя уравненія движенія нашей сферической площадки зависятъ только отъ выраженія элемента дуги на поверхности сферы, а это послѣднее не измѣняется со сгибаніями сферы, то

указанная нами интерпретація движенія по инерціи матеріальной сферической площадки на поверхности



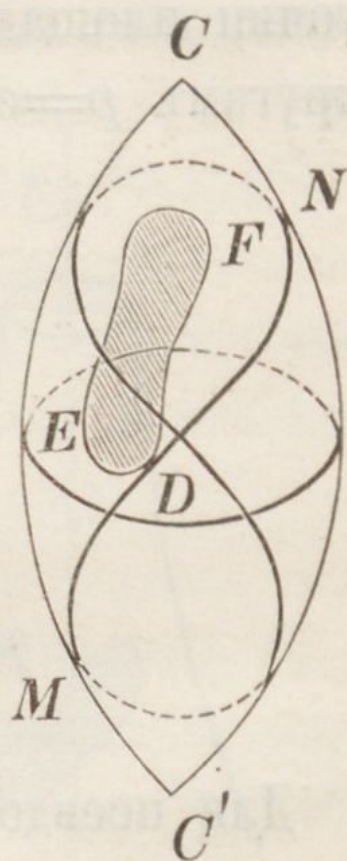
Фиг. 1.

сферы сохраняется при одновременномъ сгибаніи сферы и площадки.

Вообразивъ, напримѣръ, что опорная сфера разрѣзана по меридіану и вытянута въ форму сигары, мы должны подвергнуть тому же сгибанію: матеріальную площадку, сферическую кривую EDF и окружность MN . При этомъ окружность MN сдѣлаетъ нѣсколько оборотовъ и можетъ сомкнуться своими концами, какъ это представлено на фиг. (2), на которой сигарообразная форма обвертывается два раза полною поверхностью сферы.

Движеніе по инерціи изогнутой сферической площадки по нашей сигарообразной поверхности будетъ слагаться изъ катящегося движенія деформированной сферической кривой DEF по геодезической линіи MN и изъ движенія, при которомъ всѣ точки матеріальной площадки бѣгутъ по параллелямъ къ геодезической линіи MN съ постоянными скоростями.

§ 2. Представимъ элементъ дуги на поверхности псевдосферы въ одномъ изъ трехъ видовъ:



Фиг. 2.

$$ds^2 = r^2(dp^2 + \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2}\right)^2 dq^2),$$

$$ds^2 = r^2(dp^2 + \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2}\right)^2 dq^2), \quad (3)$$

$$ds^2 = r^2(dp^2 + e^{-2p} dq^2)$$

и предположимъ, что рассматриваемая псевдосфера есть поверхность вращенія съ меридіанами, направленными по геодезическимъ линіямъ $q = \text{const}$. Это приведетъ насъ къ одному изъ трехъ видовъ псевдосферы, представленныхъ на фиг. (3), при чемъ видъ (с) получается отъ вращенія трактрисы (линія постоянной касательной) около ея асимптоты.

Вообразивъ на одной изъ этихъ поверхностей матеріальную площадку k , будемъ вращать ее съ нѣкоторою постоянною угловою скоростью около оси вра-

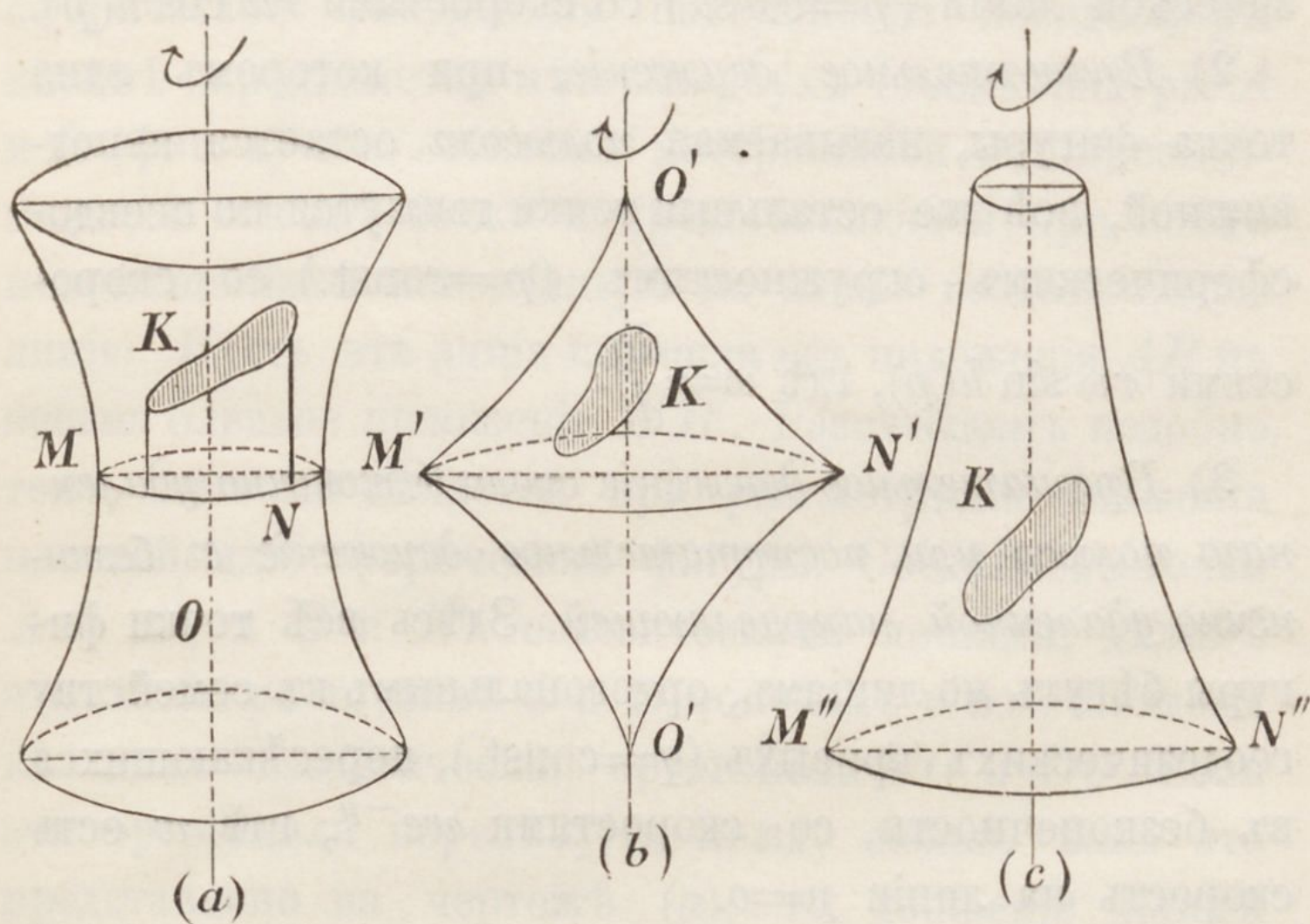
щенія поверхности. При этомъ на основаніи форм. (3), точки площадки будутъ двигаться по параллельнымъ кругамъ $p = \text{const.}$ со скоростями:

$$\begin{aligned} v &= r \cos h(p) \frac{dq}{dt}, \\ v &= r \sin h(p) \frac{dq}{dt}, \\ v &= r e^{-p} \frac{dq}{dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для псевдосферы вида (a) величина $r \frac{dq}{dt}$ есть скорость на горловомъ кругѣ MN ; для псевдосферы вида (b) величина $\frac{dq}{dt}$ представляетъ отношеніе къ элементу времени бесконечно малаго угла между двумя бесконечно близкими меридіанами, проходящими чрезъ точку O' , для псевдосферы же вида (c) величина $r \frac{dq}{dt}$ есть скорость на произвольномъ параллельномъ кругѣ $M''N''$, на которомъ мы принимаемъ $p = 0$.

Замѣтивъ, что вслѣдствіе постоянства кривизны $\left(-\frac{1}{r^2}\right)$ каждая изъ псевдосферъ можетъ быть наложена сама на себя или на другую псевдосферу, мы можемъ всѣ три типа движенія, данныя форм. (4), разсматривать на одной псевдосферѣ. Наложивъ, напримѣръ, псевдосферу (b), на псевдосферу (a) такъ, что точка

O' займеть какое-нибудь положеніе O и линіи $q = \text{const}$ во второй форм. (3) представлять намъ геодезиче-



Фиг. 3.

скія линіи, проходящія чрезъ полюсь O , мы выразимъ съ помощію второй форм. (4) движеніе площадки по поверхности псевдосферы (a) около неподвижнаго полюса O на этой поверхности, аналогичное вращательному движенію.

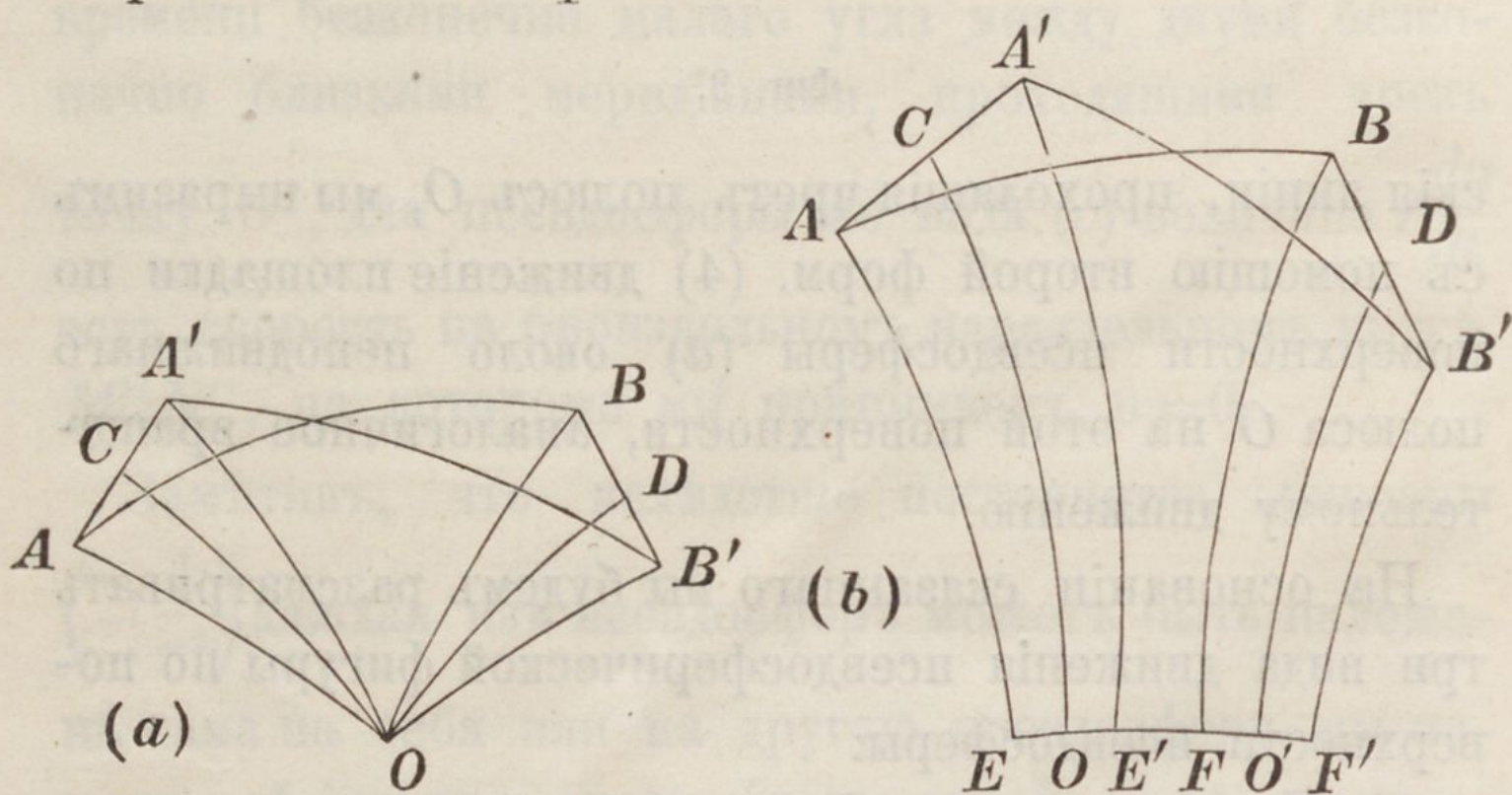
На основаніи сказаннаго мы будемъ разсматривать три вида движенія псевдосферической фігуры по поверхности псевдосферы:

1) *Поступательное движеніе*, при которомъ точки, лежащія на данной геодезической линіи, называемой *направляющей поступательнаго движенія*, движутся

съ постоянною скоростью rw , всѣ же остальные точки перемѣщаются по параллелямъ къ этой геодезической линіи ($p=\text{const.}$) со скоростями $rw \cos h(p)$.

2) *Вращательное движеніе*, при которомъ одна точка фигуры, называемая *полюсомъ*, остается неподвижной, всѣ же остальные точки движутся по псевдосферическимъ окружностямъ ($p=\text{const.}$) со скоростями $r\omega \sin h(p)$, гдѣ $\omega = \frac{dq}{dt}$.

3) *Вращательное движеніе около бесконечно удаленнаго полюса или поступательное движеніе съ бесконечно удаленной направляющей*. Здѣсь всѣ точки фигуры бѣгутъ по линіямъ, ортогональнымъ къ семейству геодезическихъ кривыхъ ($q=\text{const.}$), пересѣкающихся въ бесконечности, со скоростями $w e^{-p}$, гдѣ w есть скорость на линіи $p=0$.



Фиг. 4.

Легко показать, что всякое весьма малое перемѣщеніе псевдосферической фигуры по поверхности

псевдосферы непременно приводится къ одному изъ указанныхъ трехъ типовъ движенія. Положеніе псевдосферической фигуры на поверхности псевдосферы вполне опредѣляется мѣстомъ двухъ точекъ фигуры A и B (фиг. 4) или мѣстомъ матеріальной линіи, соединяющей эти двѣ точки и представляющей при всѣхъ перемѣщеніяхъ неизмѣнную по длинѣ геодезическую линію. Пусть эта линія перешла изъ положенія AB въ весьма близкое положеніе $A'B'$. Разсуждаемъ подобно тому, какъ это дѣлается при разсмотрѣніи движенія плоской или сферической фигуры. Соединяемъ точки A и A' , и B и B' геодезическими линіями; дѣлимъ эти линіи въ точкахъ C и D пополамъ и возставляемъ къ нимъ геодезическія ортогоналы CO и DO . Если эти ортогоналы пересѣкутся между собою, какъ это представлено на чертежѣ (а), то движеніе нашей псевдосферической фигуры въ рассматриваемый нами малый промежутокъ времени сведется къ вращенію ея около полюса O , что слѣдуетъ изъ равенства геодезическихъ треугольниковъ:

$$\triangle OAB = \triangle OA'B'.$$

Если же эти ортогоналы дойдутъ до кратчайшаго разстоянія OO' , и потомъ начнутъ расходиться, какъ это изображено на чертежѣ (b), то движеніе псевдосферической фигуры представится ея поступательнымъ движеніемъ съ направляющею OO' . Это можно доказать такъ. Продолжаемъ геодезическую линію OO' и опускаемъ на нее изъ точекъ A, A', B, B' геоде-

зическія ортогонали AE , AE' , BF , BF' . Изъ формуль псевдосферической тригонометріи:

$$\sin h\left(\frac{AE}{r}\right) = \sin h\left(\frac{CO}{r}\right) \cos h\left(\frac{CA}{r}\right),$$

$$\sin h\left(\frac{A'E'}{r}\right) = \sin h\left(\frac{CO}{r}\right) \cos h\left(\frac{CA'}{r}\right)$$

заключаемъ, что $AE = A'E'$ и такъ же доказываемъ, что $BF = B'F'$; далѣе изъ формуль:

$$\cos h\left(\frac{AB}{r}\right) = - \sin h\left(\frac{AE}{r}\right) \sin h\left(\frac{BF}{r}\right) + \cos h\left(\frac{AE}{r}\right) \cos h\left(\frac{BF}{r}\right) \cos h\left(\frac{EF}{r}\right),$$

$$\cos h\left(\frac{A'B'}{r}\right) = - \sin h\left(\frac{A'E'}{r}\right) \sin h\left(\frac{B'F'}{r}\right) + \cos h\left(\frac{A'E'}{r}\right) \cos h\left(\frac{B'F'}{r}\right) \cos h\left(\frac{E'F'}{r}\right)$$

заключаемъ, что $EF = E'F'$. Если теперь сообщимъ псевдосферической фигурѣ $EABF$ поступательное движеніе по направляющей линіи OO' такое, что въ разсматриваемый элементъ времени отрѣзокъ EF займетъ мѣсто $E'F'$, то вслѣдствіе прямыхъ угловъ при E , E' , F , F' и вслѣдствіе равенства сторонъ $AE = A'E'$, $BF = B'F'$, упомянутая псевдосферическая фигура накроетъ фигуру $E'A'B'F'$ и линія AB займетъ положеніе $A'B'$.

Можетъ еще быть третій случай, когда ортогонали CO и DO пересѣкаются въ бесконечно удаленной точкѣ; онъ соотвѣтствуетъ вращенію фигуры около бесконечно удаленнаго полюса или ея поступательному движенію съ бесконечно удаленною направляющею.

Формулы (4), выражающія скорости точекъ фигуры въ трехъ разсматриваемыхъ видахъ движенія, могутъ быть легко получены изъ чертежа (4). Изъ треугольника OAC на фиг. (a) можемъ написать:

$$\sin h\left(\frac{AC}{r}\right) = \sin h\left(\frac{OA}{r}\right) \sin (COA);$$

отсюда, по положеніи

$$AC = \frac{vdt}{2}, \quad \frac{AO}{r} = p, \quad \angle COA = \frac{dq}{2},$$

находимъ вторую форм. (4):

$$v = r \sin h(p) \frac{dq}{dt}.$$

Далѣе изъ четырехугольника $ASOE$ на фиг. (b) имѣемъ:

$$\sin h\left(\frac{AC}{r}\right) = \cos h\left(\frac{AE}{r}\right) \sin h\left(\frac{EO}{r}\right),$$

откуда, по положеніи

$$AC = \frac{vdt}{2}, \quad \frac{AE}{r} = p, \quad \frac{EO}{r} = \frac{dq}{2},$$

получимъ первую форм. (4):

$$v=r \cos h(p) \frac{dq}{dt}.$$

Наконецъ, если примемъ, что точка O на черт. (а) удаляется въ безконечность и положимъ при весьма большемъ P , что

$$\frac{OA}{r} = P - p, \quad \lim(e^P \sin(COA)) = dq,$$

то найдемъ третью форм. (4):

$$v=re^{-p} \frac{dq}{dt}.$$

Скажемъ нѣсколько словъ о сложеніи и разложеніи движенія псевдосферической фигуры.

Напишемъ форм. (4) поступательнаго и вращательнаго движенія въ видѣ:

$$\begin{aligned} v &= r \cos h(p) \cdot w, \\ v &= r \sin h(p) \cdot \omega \end{aligned} \tag{4'}$$

и будемъ звать величины w и ω параметрами поступательнаго и вращательнаго движенія. Сдѣлаемъ подстановку $p = p' + \alpha$:

$$\begin{aligned} v &= r \cos h(p') \cdot w \cos h(\alpha) + r \sin h(p') \cdot w \sin h(\alpha), \\ v &= r \sin h(p') \cdot \omega \cos h(\alpha) + r \cos h(p') \cdot \omega \sin h(\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Эти формулы приводятъ насъ къ двумъ заключеніямъ:

1) Опустивъ изъ какой-нибудь точки O' ортогональную геодезическую линію OO' на направляющую поступательнаго движенія, мы можемъ это движеніе замѣнить: поступательнымъ движеніемъ, направляющая котораго проходитъ чрезъ точку O' ортогонально къ OO' съ параметромъ $w \cos h\left(\frac{OO'}{r}\right)$, и вращательнымъ движеніемъ около полюса O' съ параметромъ $w \sin h\left(\frac{OO'}{r}\right)$.

2) Соединивъ какую-нибудь точку O' съ полюсомъ O вращательнаго движенія, мы можемъ все это движеніе замѣнить вращеніемъ около полюса O' съ параметромъ $\omega \cos h\left(\frac{OO'}{r}\right)$ и поступательнымъ движеніемъ съ направляющею, проходящею чрезъ точку O' ортогонально къ OO' , съ параметромъ $\omega \sin h\left(\frac{OO'}{r}\right)$.

На основаніи этихъ замѣчаній мы можемъ составить правило для сложенія двухъ поступательныхъ движеній, направляющія которыхъ имѣютъ кратчайшее разстояніе OO' , и двухъ вращательныхъ движеній около полюсовъ O и O' , а также вращательнаго движенія, совершающагося около полюса O , съ поступательнымъ, имѣющимъ направляющую, проходящую чрезъ эту точку.

Два поступательныхъ движенія, совершающіяся въ одну сторону съ параметрами w и w' , замѣняются однимъ поступательнымъ движеніемъ, направляющая котораго ортогональна OO' ($OO' = d$) и проходитъ чрезъ точку C , лежащую на этой геодезической линіи между O и O' и опредѣляемую формулою:

$$w \sin h\left(\frac{OC}{r}\right) = w' \sin h\left(\frac{O'C}{r}\right). \quad (6)$$

Положивъ здѣсь $OC = d - x$, $O'C = x$, найдемъ

$$\operatorname{tg} h(x) = \frac{w \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}{w' + w \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}, \quad (6')$$

при чемъ вторая часть менѣ единицы.

Параметръ W сложнаго поступательнаго движенія выражается такъ:

$$W = w \cos h\left(\frac{OC}{r}\right) + w' \cos h\left(\frac{O'C}{r}\right). \quad (7)$$

Если складываютъ два поступательныхъ движенія, совершающихся въ разныя стороны съ параметрами $w' > w$, то направляющую сложнаго поступательнаго движенія можно отыскивать со стороны направляющей поступательнаго движенія съ параметромъ w' , поло-

живъ въ форм. (6) $OC = x + d$, $OC' = x$. Это даетъ намъ

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{w \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}{w' - w \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}. \quad (8)$$

Такъ какъ $\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right)$ непремѣнно долженъ быть меньше единицы и достигаетъ этого значенія только при $x = \infty$, то для того, чтобы сложное движеніе было поступательно, необходимо условіе:

$$\frac{w'}{w} > e^{\frac{d}{r}}. \quad (9)$$

При существованіи этого условія найдемъ по форм. (8) мѣсто направляющей сложнаго поступательнаго движенія (со стороны направляющей движенія съ параметромъ w'); что же касается параметра этого сложнаго движенія, то онъ будетъ:

$$W = w' \cos h\left(\frac{O'C}{r}\right) - w \cos h\left(\frac{OC}{r}\right). \quad (10)$$

Если

$$\frac{w'}{w} = e^{\frac{d}{r}}, \quad (9')$$

то сложное движеніе представить намъ вращеніе около бесконечно удаленнаго полюса.

Если же

$$\frac{w'}{w} < \frac{d}{e'}, \quad (9'')$$

то мы получаемъ сложное движеніе вращательное. Мѣсто полюса этого вращательнаго движенія найдется изъ форм. (10), положивъ въ ней $W=0$, $O'S=x$, $OS=d+x$. Это даетъ намъ слѣдующую форм., опредѣляющую x :

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{w' - w \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}{w \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}. \quad (11)$$

Вторая часть этой форм. вслѣдствіе неравенства (9'') всегда менѣе единицы. Пока

$$\frac{w'}{w} > \cos h\left(\frac{d}{r}\right),$$

мы будемъ имѣть x положительнымъ, и полюсъ вращенія S помѣщеннымъ со стороны направляющей съ параметромъ w' . При

$$\frac{w'}{w} = \cos h\left(\frac{d}{r}\right)$$

полюсъ вращенія вступаетъ въ точку O' ($x=0$); наконецъ при

$$\frac{w'}{w} < \cos h\left(\frac{d}{r}\right)$$

полюсъ вращенія будетъ между точками O и O' и при $w'=w$ онъ займетъ средину отръзка OO' . Что касается параметра сложнаго вращенія, то онъ будетъ выражаться формулою:

$$\Omega = w' \sin h\left(\frac{OC'}{r}\right) \mp w \sin h\left(\frac{OC}{r}\right), \quad (12)$$

гдѣ знакъ $(-)$ берется для полюса, лежащаго внѣ OO' , а знакъ $(+)$ берется для полюса, лежащаго на отръзкѣ OO' . На основаніи неравенствъ (9) и (9'') легко усмотрѣть, что выраженіе (10) и (12) положительны. Переходимъ къ сложенію двухъ вращательныхъ движеній. Предполагая, что псевдосферическая фигура вращается одновременно около полюсовъ O и O' въ одну и ту же сторону съ параметрами ω и ω' , найдемъ, что сложное движеніе будетъ вращеніе, совершающееся около полюса C , лежащаго на отръзкѣ OO' и опредѣленнаго уравненіемъ:

$$\omega \sin h\left(\frac{OC}{r}\right) = \omega' \sin h\left(\frac{O'C}{r}\right). \quad (13)$$

Положивъ въ немъ $OC=d-x$, $O'C=x$, найдемъ:

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\omega \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}{\omega' + \omega \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}. \quad (13')$$

Параметръ же найденнаго вращательнаго движенія будетъ:

$$\Omega = \omega \cos h\left(\frac{OC}{r}\right) + \omega' \cos h\left(\frac{O'C}{r}\right). \quad (14)$$

Если вращенія совершаются въ различныя стороны и $\omega' > \omega$, то мѣсто C полюса сложнаго вращенія найдется изъ форм. (13), полагая въ ней $OC = d + x$, $O'C = x$. Это даетъ намъ:

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\omega \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}{\omega' - \omega \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}. \quad (15)$$

При

$$\frac{\omega'}{\omega} > e^{\frac{d}{r}} \quad (16)$$

найденный $\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right)$ будетъ менѣ единицы и мы найдемъ искомый полюсъ на продолженіи геодезической линіи OO' со стороны O' . Величина угловой скорости Ω сложнаго вращенія будетъ:

$$\Omega = \omega' \cos h\left(\frac{OC}{r}\right) - \omega \cos h\left(\frac{O'C}{r}\right). \quad (17)$$

При

$$\frac{\omega'}{\omega} = e^{\frac{d}{r}} \quad (16')$$

этотъ полюсъ удаляется въ безконечность.

Если же

$$\frac{\omega'}{\omega} < e^{\frac{d}{r}}. \quad (16'')$$

то сложное движеніе будетъ поступательное, при чемъ направляющая поступательнаго движенія найдется, полагая въ форм. (17) $\Omega=0$, $OC=x+d$, $OC=x$. Мы получаемъ:

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\omega' - \omega \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}{\omega \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}. \quad (18)$$

Вторая часть этой форм. вслѣдствіе неравенства (16'') менѣе единицы. Пока

$$\frac{\omega'}{\omega} > \cos h\left(\frac{d}{r}\right),$$

мы будемъ получать направляющую сложнаго поступательнаго движенія со стороны полюса O' ; при

$$\frac{\omega'}{\omega} = \cos h\left(\frac{d}{r}\right)$$

эта направляющая пройдетъ чрезъ точку O' ; когда же

$$\frac{\omega'}{\omega} < \cos h\left(\frac{d}{r}\right),$$

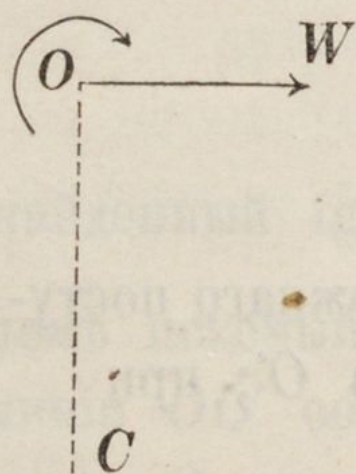
эта направляющая пересѣчетъ подъ прямымъ угломъ

отрѣзокъ OO' , при чемъ въ случаѣ $w'=w$, точка пересѣченія C будетъ лежать на срединѣ отрѣзка.

Что касается до параметра сложнаго поступательнаго движенія, то онъ будетъ выражаться формулою:

$$W = \omega' \sin h\left(\frac{O'C}{r}\right) \mp \omega \sin h\left(\frac{OC}{r}\right), \quad (20)$$

гдѣ знакъ $(-)$ соотвѣтствуетъ сложному поступательному движенію, направляющая котораго лежитъ со стороны полюса O' , а знакъ $(+)$ соотвѣтствуетъ тому случаю, при которомъ направляющая сложнаго движенія пересѣкаетъ отрѣзокъ OO' . На основаніи неравенства (16) и (16'') вторыя части форм. (17) и (20) положительны.



Фиг. 5.

Случай сложенія вращательнаго движенія, совершающагося около полюса O съ параметромъ ω , и поступательнаго съ параметромъ w , имѣющаго направляющею нѣкоторую геодезическую линію, проходящую чрезъ O' , очень простъ. Переходя отъ точки O въ нѣкоторую точку C (фиг. (5)), лежащую на ортогонали $OC=x$, къ на-

правляющей геодезической линіи, ставимъ условіе, чтобы поступательныя движенія уничтожились:

$$\begin{aligned} \omega \sin h\left(\frac{x}{r}\right) &= w \cos h\left(\frac{x}{r}\right), \\ \operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) &= \frac{w}{\omega}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если $w < \omega$, то изъ форм. (21) опредѣлимъ полюсъ C сложнаго вращательнаго движенія, параметръ котораго будетъ:

$$\Omega = \omega \cos h\left(\frac{x}{r}\right) - w \sin h\left(\frac{x}{r}\right). \quad (22)$$

Если $w > \omega$, то сложное движеніе будетъ поступательное, и точка C , чрезъ которую пройдетъ ось сложнаго поступательнаго движенія, опредѣляется изъ уравненія:

$$\omega \cos h\left(\frac{x'}{r}\right) = w \sin h\left(\frac{x'}{r}\right), \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x'}{r}\right) = \frac{\omega}{w}.$$

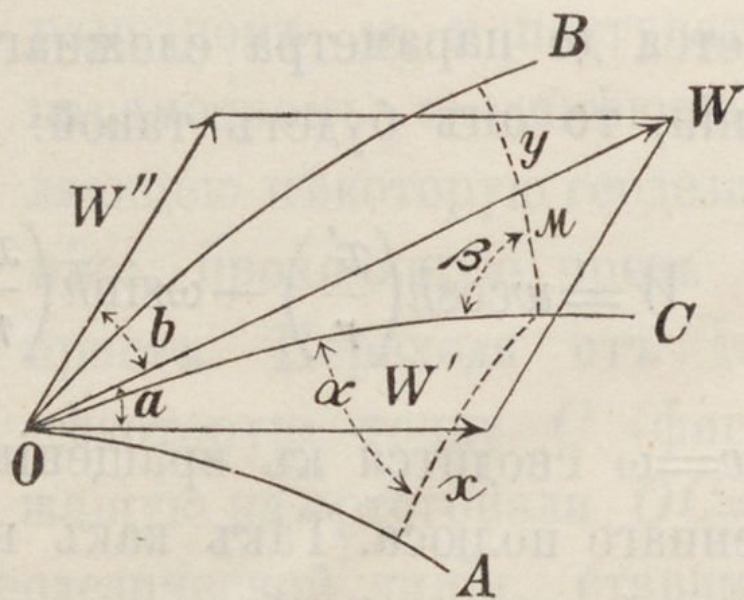
Что касается до параметра сложнаго поступательнаго движенія, то онъ будетъ такой:

$$W = w \cosh\left(\frac{x'}{r}\right) - \omega \sinh\left(\frac{x'}{r}\right). \quad (24)$$

Случай $w = \omega$ сводится къ вращенію около бесконечно удаленнаго полюса. Такъ какъ всякое перемѣщеніе псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы можетъ быть выражено поступательнымъ движеніемъ съ направляющей, проходящей чрезъ данную точку, и вращательнымъ движеніемъ около этой точки, а эти послѣднія движенія, слагаясь между собою, приводятъ насъ къ одному изъ трехъ указанныхъ

видовъ движенія, то въ сказанномъ выше заключается новое доказательство того, что всякое движеніе псевдосферической фигуры въ весьма малое время можетъ быть выражено одною изъ форм. (4).

Намъ остается еще разсмотрѣть сложеніе двухъ поступательныхъ движеній, направляющія которыхъ пересѣкаются. Это сложеніе приводитъ насъ къ правилу параллелограмма. Проведя въ точкѣ пересѣченія направляющихъ линій касательныя къ послѣднимъ и отложивъ на этихъ касательныхъ соотвѣтственные величины параметровъ поступательныхъ движеній, складываемъ полученные векторы по правилу параллелограмма. Результирующій векторъ даетъ намъ направленіе направляющей сложнаго поступательнаго движенія и его параметръ.



Фиг. 6.

Для доказательства этого правила обратимся къ фиг. (6). Пусть OA и OB направляющія сложныхъ поступательныхъ движеній съ параметрами w' и w'' , а OC направляющая сложнаго поступательнаго дви-

женія съ параметромъ W , который полученъ по вышеупомянутому правилу параллелограмма.

Мы имѣемъ изъ чертежа:

$$w' \sin (a) = w'' \sin (b), \quad (25)$$

$$W = w' \cos (a) + w'' \cos (b). \quad (26)$$

Возьмемъ на OC какую-нибудь точку псевдосферической фигуры M и докажемъ, что эта точка движется вдоль геодезической линіи OC со скоростью W . Для перваго положенія надо оправдать равенство:

$$w' \cos h\left(\frac{x}{r}\right) \cos (\alpha) = w'' \cos h\left(\frac{y}{r}\right) \cos (\beta),$$

которое по раздѣленіи на форм. (25), даетъ:

$$\frac{\cos h\left(\frac{x}{r}\right) \cos (\alpha)}{\sin (a)} = \frac{\cos h\left(\frac{y}{r}\right) \cos (\beta)}{\sin (b)}.$$

Но по извѣстной форм. псевдосферической тригонометріи имѣемъ:

$$\cos (a) = \cos h\left(\frac{x}{r}\right) \sin \alpha, \quad (27)$$

$$\cos (b) = \cos h\left(\frac{y}{r}\right) \sin \beta;$$

поэтому наше равенство преобразуется такъ:

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} \beta,$$

а это справедливо, такъ какъ оба произведенія равны $\cos h\left(\frac{OM}{r}\right)$.

Теперь остается оправдать равенство:

$$W = w' \cos h\left(\frac{x}{r}\right) \sin \alpha + w'' \cos h\left(\frac{y}{r}\right) \sin \beta,$$

которое на основаніи (форм. 27) прямо приводитъ насъ къ уравненію (26).

§ 3. Къ вышеизложеннымъ кинематическимъ соображеніямъ прибавимъ еще нѣкоторыя замѣчанія по статикѣ псевдосферической фигуры. Мы будемъ разсматривать силы, приложенныя къ точкамъ псевдосферической фигуры и направленные по касательной плоскости къ псевдосферѣ. Геодезическую линію, проведенную чрезъ точку приложенія силы и касающуюся силы, мы будемъ называть направленіемъ силы на псевдосферѣ. Легко усмотрѣть, что точка приложенія силы можетъ быть переносима по направленію силы. Это слѣдуетъ изъ того, что элементарная работа силы при всякомъ безконечно маломъ перемѣщеніи псевдосферической фигуры не измѣняется съ упомянутымъ перенесеніемъ точки приложенія силы. Представляя перемѣщеніе псевдосферической фигуры вращеніемъ ея около нѣкоторой точки O , лежащей на разсматриваемой геодезической линіи, и нѣкоторымъ поступательнымъ движеніемъ относительно направляющей, проходящей чрезъ эту точку, увидимъ, что элементарная работа силъ во вращательномъ

движеніи есть нуль; что же касается до поступательнаго движенія, то его можно разложить на два: одно, направленное по разсматриваемой геодезической линіи и другое, направляющая котораго ортогональна къ этой линіи. Работа силы во второмъ поступательномъ перемѣщеніи есть нуль; работа же силы въ первомъ поступательномъ перемѣщеніи не измѣняется при перенесеніи силы по направленію силы, что доказываетъ сказанное выше.

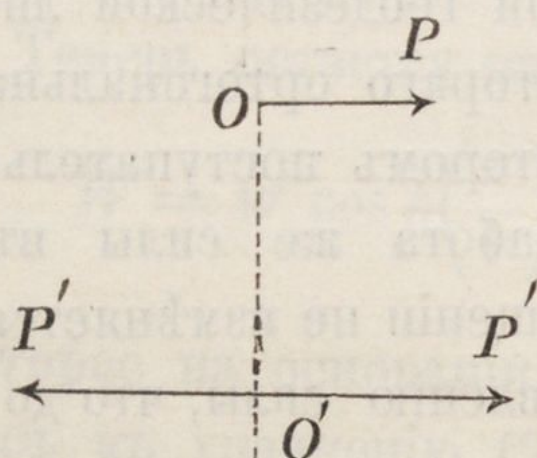
Если мы желаемъ перенести силу C (фиг. 7) въ нѣкоторую точку O' , не лежащую на направленіи силы, то надо на направленіе силы изъ точки O' опустить геодезическую ортогональ OO' и перенести силу въ точку O , потомъ къ точкѣ O' надо приложить двѣ равныя и противоположныя силы:

$$P' = P \cos h\left(\frac{OO'}{r}\right), \quad (28)$$

направленные по перпендикуляру къ линіи $O'O$. Мы получимъ силу P' , приложенную къ точкѣ O' , и комбинацію силъ (P, P') , которую будемъ называть парюю съ центромъ O' . Пара съ центромъ O' есть такая комбинація силъ, элементарная работа которыхъ при всякомъ поступательномъ движеніи псевдосферической площадки съ направляющею, проходящею чрезъ точку O' есть нуль. Что взятая нами комбинація силъ (P, P') этимъ свойствомъ обладаетъ, видно изъ разложенія всякаго поступательнаго движенія съ направляющею, проходящею чрезъ O' , на

два поступательныя движенія съ направляющими, идущими по направленію силы P' и по OO' .

Работа нашей пары силъ при вращеніи около центра O' на бесконечно малый уголъ $\delta\theta$ будетъ:



$$Pr \sin h\left(\frac{OO'}{r}\right) \delta\theta.$$

Величину

$$M = P \sin h\left(\frac{OO'}{r}\right) \quad (29)$$

Фиг. 7.

мы будемъ называть параметромъ пары. Очевидно, что пару (P, P') , не измѣняя ея дѣйствія, можно поворачивать около ея центра O' , а также можно отдалять точку O отъ O' , лишь бы параметръ пары M не измѣнялся. Сказанное можемъ формулировать такимъ образомъ: при перенесеніи точки приложенія силы P въ какую-нибудь точку O' , отстоящую отъ направленія силы на геодезическое разстояніе d , надо къ этой точкѣ ортогонально къ d приложить силу $P \cos h\left(\frac{d}{r}\right)$ и присоединить еще пару съ центромъ O' и съ параметромъ $P \sin h\left(\frac{d}{r}\right)$.

Если бы вмѣсто пары (P, P') съ центромъ O' , мы желали бы (фиг. 7) взять пару съ центромъ O'' съ добавленіемъ нѣкоторой силы P'' , проходящей чрезъ этотъ центръ, то слѣдовало бы повернуть пару около цен-

тра O такъ, чтобы плечо ея пошло по геодезической линіи OO' , силы пары P и P' перенести по выше-указанному правилу въ центръ O'' и прибавить при этомъ надлежащія пары съ этимъ центромъ. Мы получили бы силу:

$$P'' = P \cos h\left(\frac{OO''}{r}\right) - P \cos h\left(\frac{OO'}{r}\right) \cdot \cos h\left(\frac{O'O''}{r}\right),$$

или

$$P'' = M \sin h\left(\frac{O'O''}{r}\right) \quad (30)$$

и пару съ параметромъ:

$$M' = P \sin h\left(\frac{OO''}{r}\right) - P \cos h\left(\frac{OO'}{r}\right) \sin h\left(\frac{O'O''}{r}\right),$$

или

$$M' = M \cos h\left(\frac{O'O''}{r}\right). \quad (31)$$

Такимъ образомъ, если желаемъ измѣнить центръ пары изъ точки O въ точку O'' , отстоящую на $O'O'' = d$, то должны измѣнить параметръ пары M на $M \cos h\left(\frac{d}{r}\right)$ и приложить къ точкѣ O'' силу, ортогональную $O''O$ и равную $M \sin h\left(\frac{d}{r}\right)$.

Теперь легко установить правило сложенія двухъ силъ $P' > P$, направляющія которыхъ имѣютъ кратчайшее разстояніе OO' .

Если силы направлены въ одну сторону, то точка приложенія C найдется на отрѣзкѣ OO' подѣ условіемъ уничтоженія паръ:

$$P \sin h \frac{OC}{r} = P' \sin h \left(\frac{O'C}{r} \right), \quad (32)$$

$$\operatorname{tg} h \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{P \sin h \left(\frac{d}{r} \right)}{P' + P \cos h \left(\frac{d}{r} \right)}. \quad (32')$$

При этомъ величина равнодѣйствующей будетъ:

$$R = P \cos h \left(\frac{OC}{r} \right) + P' \cos h \left(\frac{O'C}{r} \right). \quad (33)$$

Если же силы направлены въ различныя стороны, то, подобно сказанному въ предыдущемъ параграфѣ о сложении движеній, надо обращать вниманіе на то, которое изъ трехъ условій:

$$\frac{P'}{P} > e^{\frac{d}{r}},$$

$$\frac{P'}{P} = e^{\frac{d}{r}},$$

$$\frac{P'}{P} < e^{\frac{d}{r}}.$$

(34)

имѣетъ мѣсто. Въ первомъ случаѣ мы найдемъ равно-

дѣйствующую силу и точку ея приложенія изъ формулъ:

$$R = P' \cos h \frac{O'C}{r} - P \cos h \frac{OC}{r}, \quad (35)$$

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{P \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}{P' - P \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}.$$

Во второмъ случаѣ, мы будемъ имѣть безконечно малую силу, приложенную къ безконечно удаленному центру. Что R будетъ приближаться къ нулю, слѣдуетъ изъ формулъ:

$$\begin{aligned} R &= P' \cos h\left(\frac{x}{r}\right) - P \cos h\left(\frac{x+d}{r}\right) \\ &= \cos h\left(\frac{x}{r}\right) \left[P' - P \cosh\left(\frac{d}{r}\right) \right] - P \sin h\left(\frac{d}{r}\right) \sin h\left(\frac{x}{r}\right). \end{aligned}$$

Такъ какъ по условію

$$P' - P \cosh\left(\frac{d}{r}\right) = P \sinh\left(\frac{d}{r}\right),$$

то

$$\begin{aligned} R &= P \sinh\left(\frac{d}{r}\right) \left[\cosh\left(\frac{x}{r}\right) - \sinh\left(\frac{x}{r}\right) \right] \\ &= P \sinh\left(\frac{d}{r}\right) e^{-\frac{x}{r}}, \end{aligned}$$

что съ возрастаніемъ x до безконечности приближается къ нулю.

Наконецъ въ третьемъ случаѣ мы получимъ пару съ центромъ C и параметромъ L , опредѣляемыми формулами:

$$L = P' \sin h\left(\frac{O'C}{r}\right) \mp P \sin h\left(\frac{OC}{r}\right), \quad (36)$$

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{P' - P \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}{P \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}.$$

При сложеніи двухъ паръ мы можемъ, проведя чрезъ ихъ центры геодезическую линію OO' , искать на ней центръ C равнодѣйствующей пары. Если пары вращаютъ въ одну сторону, то параметръ и центръ L равнодѣйствующей пары найдутся по формуламъ:

$$L = M \cos h\left(\frac{OC}{r}\right) + M' \cos h\left(\frac{O'C}{r}\right), \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{M \sin h\left(\frac{d}{r}\right)}{M' + M \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}.$$

Если пары съ параметрами $M' > M$ вращаютъ въ различныя стороны, то мы будемъ имѣть опять три случая, смотря потому, которое изъ трехъ условій:

$$\frac{M'}{M} > e^{\frac{d}{r}}.$$

$$\frac{M'}{M} = e^{\frac{d}{r}}.$$

$$\frac{M'}{M} < e^{\frac{d}{r}}.$$

удовлетворяется. При первомъ условіи получается равнодѣйствующая пара, опредѣляемая формулами:

$$L = M' \cos h\left(\frac{O'C}{r}\right) - M \cos h\left(\frac{OC}{r}\right), \quad (39)$$

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{M \sinh\left(\frac{d}{r}\right)}{M' - M \cos h\left(\frac{d}{r}\right)};$$

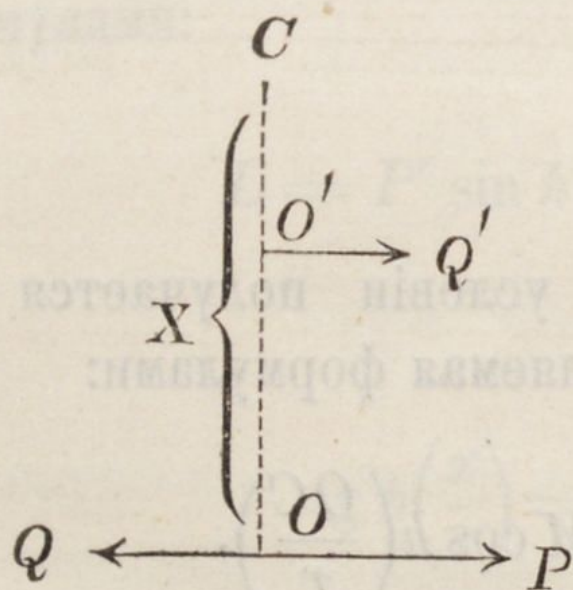
при второмъ получается пара съ безконечно малымъ параметромъ и безконечно удаленнымъ центромъ; наконецъ, при третьемъ—мы получимъ равнодѣйствующую силу, опредѣляемую формулами:

$$R = M' \sin h\left(\frac{O'C}{r}\right) \mp M \sin h\left(\frac{OC}{r}\right), \quad (40)$$

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{M' - M \cos h\left(\frac{d}{r}\right)}{M \sinh\left(\frac{d}{r}\right)}.$$

Въ частномъ случаѣ $M'=M$, эта сила проходить чрезъ средину плеча OO' и равняется $Me^{\frac{d}{2r}}$.

Разсмотримъ еще сложеніе силы P , дѣйствующей на точку O , съ парюю (Q, Q') параметра M' , имѣющей эту точку центромъ. Проведа (фиг. (8)) геодезическую линію OC , ортогональную силѣ P , выберемъ точку C такъ, чтобы по переносѣ въ нее силы и пары мы получили бы одну силу или одну пару.



Фиг. 8.

Первое обстоятельство будетъ имѣть мѣсто при $P > M$, а второе—при $P < M$, при чемъ въ случаѣ одной силы имѣемъ формулы:

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{P}{M}, \quad R = P \cosh\left(\frac{x}{r}\right) - M \sinh\left(\frac{x}{r}\right), \quad (41)$$

а въ случаѣ одной пары:

$$\operatorname{tg} h\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{P}{M}, \quad L = M \cosh\left(\frac{x}{r}\right) - P \sinh\left(\frac{x}{r}\right). \quad (42)$$

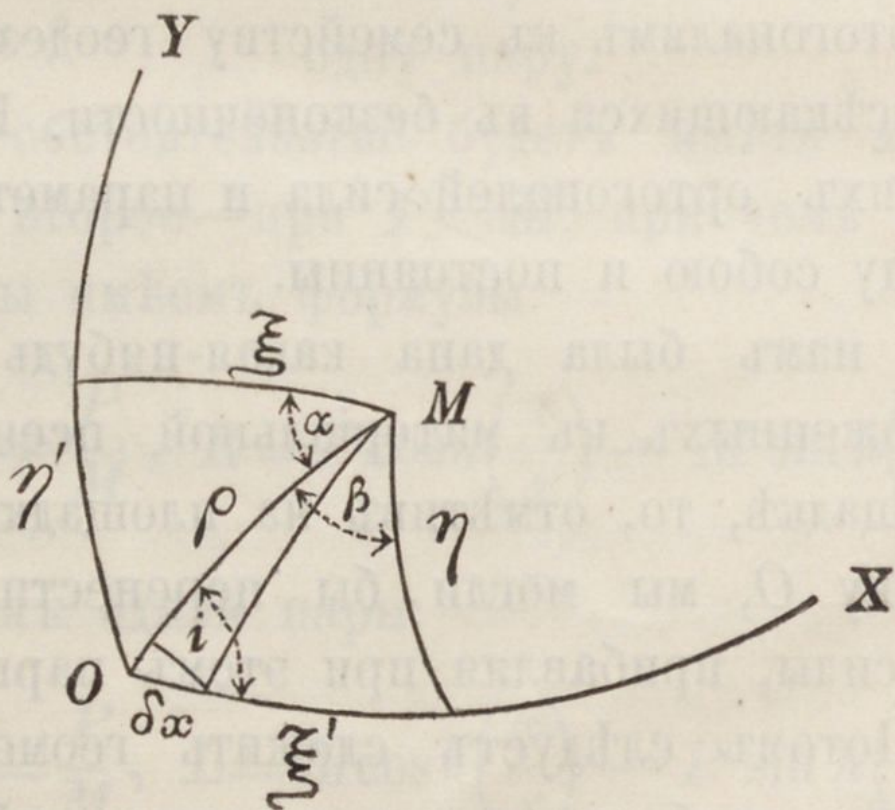
Случай $P = M$ даетъ намъ пару съ безконечно удаленнымъ центромъ.

Въ случаѣ существованія равнодѣйствующей силы, при ея замѣнѣ одной силой и одной парой съ центромъ въ различныхъ точкахъ псевдосферы, мы будемъ имѣть силы, направленные по линіямъ, орто-

гональнымъ къ семейству геодезическихъ кривыхъ, проведенныхъ подъ прямымъ угломъ къ направленію равнодѣйствующей силы. При этомъ для всякой такой ортогональной линіи силы и параметры пары постоянны. Въ случаѣ существованія одной пары будемъ имѣть для различныхъ точекъ псевдосферы пары и силы, направленные по геодезическимъ кругамъ, имѣющимъ центромъ центръ равнодѣйствующей пары, при чемъ на этихъ кругахъ силы и параметры пары постоянны. Наконецъ, въ третьемъ случаѣ, когда центръ пары лежитъ въ безконечности для различныхъ центровъ пары будемъ имѣть силы направленные по ортогоналамъ къ семейству геодезическихъ линій, пересѣкающихся въ безконечности. Во всѣхъ точкахъ этихъ ортогоналей сила и параметръ пары равны между собою и постоянны.

Если бы намъ была дана какая-нибудь система силъ, приложенныхъ къ матеріальной псевдосферической площадкѣ, то, отмѣтивъ на площадкѣ, какую-нибудь точку O , мы могли бы перенести въ эту точку всѣ силы, прибавляя при этомъ пары съ центромъ O . Потомъ слѣдуетъ сложить геометрически всѣ силы и алгебраически параметры всѣхъ паръ (параметру пары будемъ приписывать знакъ по тому же правилу, какъ моменту пары на плоскости). Получимъ равнодѣйствующую силу R и пару съ параметромъ L . Эти послѣднія сила и пара замѣняются, какъ было сейчасъ указано, одною силою или одною парюю.

§ 4. Мы будемъ называть *центромъ инерціи псевдосферической площадки* матеріальную точку, отличную отъ центра ея тяжести и играющую при движеніи псевдосферической площадки по поверхности псевдосферы ту же роль, какую играетъ центръ инерціи плоской матеріальной площадки при ея движеніи по плоскости. Мы можемъ сказать, что центръ инерціи при движеніи плоской матеріальной площадки въ ея плоскости есть точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что при вращеніи площадки около этой точки всѣ импульсивныя силы (количества движенія) сводятся къ парѣ.



Фиг. 9.

Подобнымъ образомъ мы будемъ называть *центромъ инерціи псевдосферической площадки* такую точку, при вращеніи около которой всѣ импульсивныя силы сводятся къ парѣ, имѣющей рассматриваемую точку центромъ. Пусть O будетъ представлять въ указан-

номъ смыслѣ центръ инерціи данной матеріальной площадки. Проведемъ чрезъ него (фиг. (9)) двѣ взаимно-ортогональныя геодезическія линіи OX и OY и выразимъ, что всѣ импульсивныя силы, происходящія при вращеніи площадки около этого центра, сводятся къ парѣ съ центромъ O . Для этого надо написать, что сумма работъ всѣхъ этихъ силъ при безконечно малыхъ поступательныхъ перемѣщеніяхъ вдоль осей OX и OY будетъ нулемъ:

$$\sum m \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \cos (\beta) = 0, \quad (43)$$

$$\sum m \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \cos (\alpha) = 0,$$

гдѣ сумма распространяется на массы m всѣхъ точекъ фигуры, а значенія буквъ ξ , η , ρ , α , β указаны на фигурѣ (9). Подобно тому, какъ центръ инерціи плоской фигуры есть точка, относительно которой моментъ инерціи фигуры есть $\min.$, центръ инерціи псевдосферической фиг. есть точка, для которой сумма

$$I = \sum m \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \quad (44)$$

есть $\min$ imum. (При этомъ легко усмотрѣть, что параметръ пары импульсивныхъ силъ при вращеніи около центра O , опредѣляемомъ параметромъ ω , есть: $L = r\omega I$).

Для доказательства этого, подвинувъ точку O на оси OX на нѣкоторое пространство δx , выразимъ, что приращеніе суммы I отъ этого передвиженія есть нуль:

$$\delta \sum m \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) = \frac{2}{r} \sum m \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \delta \rho = 0.$$

Но изъ чертежа видно, что

$$\delta \rho = -\delta x \cos(i),$$

$$\cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) = \cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \cos h\left(\frac{\eta'}{r}\right),$$

$$\cos h\left(\frac{\eta'}{r}\right) \cos(i) = \cos(\alpha),$$

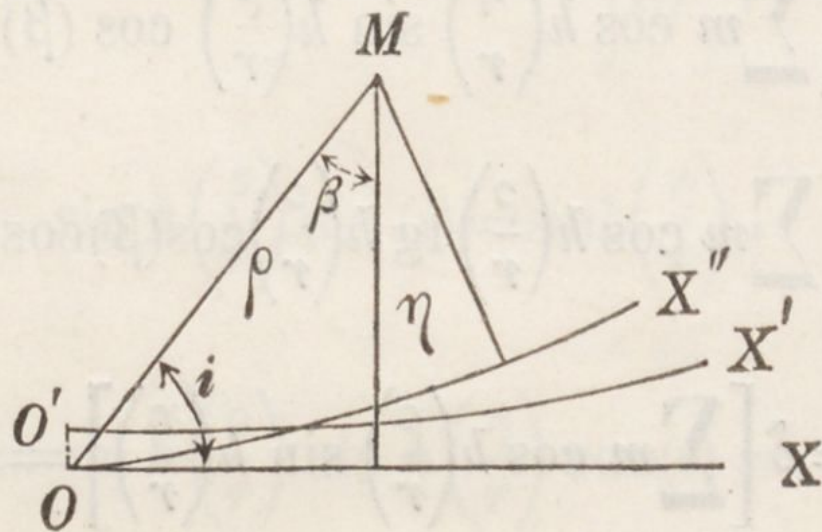
поэтому

$$\sum m \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \cos(\alpha) = 0.$$

Это есть второе ур. (43). Подобнымъ же образомъ, перемѣщая точку O вдоль оси OY , докажемъ справедливость перваго ур. (43).

Вмѣстѣ съ центромъ инерціи псевдосферической площадки мы будемъ еще отыскивать оси, которыя будемъ называть *главными осями инерціи псевдосферической площадки*. Такія оси суть геодезическія линіи, обладающія тѣмъ свойствомъ, что для всякаго поступательнаго движенія, имѣющаго такую линію

своею направляющею, равнодѣйствующая импульсивныхъ силъ сводится къ силѣ, направленной по упомянутой оси.



Фиг. 10.

Пусть (фиг. 10) ось OX есть ось инерціи площадки. Импульсивныя силы для каждой точки будутъ: $mw \cosh\left(\frac{\eta}{r}\right)$. Онѣ должны давать, слагаясь между собою, равнодѣйствующую, направленную по оси OX , и потому сумма работъ этихъ силъ при поворотѣ около всякаго центра O , лежащаго на оси OX , есть нуль. Напишемъ это условіе:

$$\sum m \cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos (\beta) = 0. \quad (45)$$

Такъ какъ это уравненіе должно быть удовлетво-рено для всякаго центра, лежащаго на оси OX , то мы можемъ приравнять нулю дифференціалъ его пер-вой части, взятый въ предположеніи, что полюсъ O

(фиг. (9)) перемѣщается по оси OX на нѣкоторое пространство δx . Мы получаемъ:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\sum m \cos h \left(\frac{\eta}{r} \right) \sin h \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos (\beta) \right) \\ &= \delta \left(\sum m \cos h \left(\frac{\rho}{r} \right) \operatorname{tg} h \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos (\beta) \cos h \left(\frac{\eta}{r} \right) \right) \\ &= \delta \left[\sum m \cos h \left(\frac{\rho}{r} \right) \sin h \left(\frac{\eta}{r} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

или

$$\sum m \sin h \left(\frac{\rho}{r} \right) \sin h \left(\frac{\eta}{r} \right) \cos (i) = 0. \quad (46)$$

Этими двумя ур. (45) и (46) вполне охарактеризовано то обстоятельство, что импульсивныя силы свелись въ этомъ случаѣ къ силѣ, направленной по геодезической линіи OX .

Покажемъ, что ось инерціи является такою геодезическою линіею, для которой сумма

$$I_1 = \sum m \cos h^2 \left(\frac{\eta}{r} \right) = \sum m + \sum m \sin h^2 \left(\frac{\eta}{r} \right) \quad (47)$$

будетъ minimum. (Величина импульсивной силы при поступательномъ движеніи вдоль рассматриваемой направляющей со скоростью w будетъ: $R = rw I_1$).

Для этого предположимъ сначала (фиг. (9)), что ось OX повернулась около нѣкоторой точки O на уголъ

δi и приравняемъ измѣненіе I_1 , происшедшее отъ этого поворота, нулю:

$$\delta \sum m \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin^2 i = \delta i \sum m \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(i) \cos(i) = 0.$$

Но

$$\sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(i) = \sin h\left(\frac{\eta}{r}\right),$$

поэтому

$$\sum m \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin h\left(\frac{\eta}{r}\right) \cos(i) = 0.$$

Это есть ур. (46).

Далѣе составимъ измѣненіе I_1 , происходящее отъ замѣны геодезической линіи OX геодезическою линіей $O'X'$, отстоящей отъ OX на кратчайшее разстояніе $OO' = \delta \eta'$.

$$\delta \sum m \sin h^2\left(\frac{\eta}{r}\right) = 2 \delta \eta' \sum m \sin h\left(\frac{\eta}{r}\right) \cosh\left(\frac{\eta}{r}\right) \cosh\left(\frac{\xi'}{r}\right) = 0.$$

Но

$$\sin(i) \cos h\left(\frac{\xi'}{r}\right) = \cos(\beta), \quad \sin h\left(\frac{\eta}{r}\right) = \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(i),$$

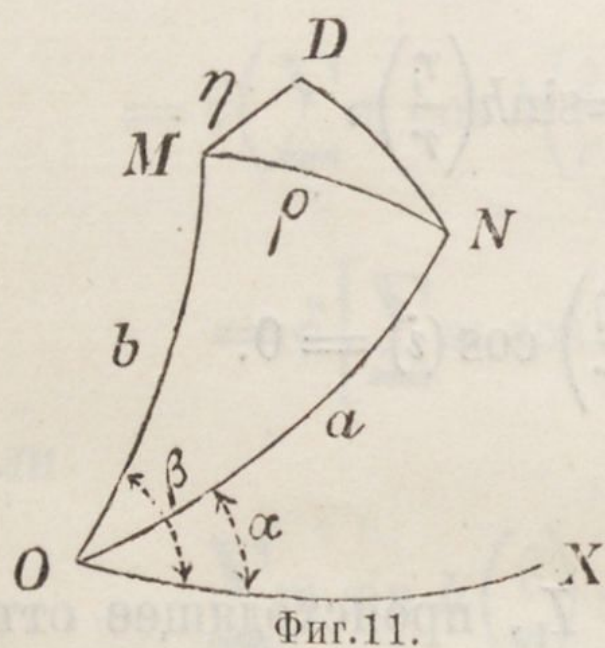
поэтому

$$\sum m \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \cos(\beta) = 0.$$

Это есть условіе (45).

Такимъ образомъ задача объ опредѣленіи центра инерціи сводится къ отысканію на псевдосферической

площадкѣ точки, для которой сумма I имѣетъ minimum, а задача объ опредѣленіи оси инерціи сводится къ отысканію на ней геодезической линіи, для которой сумма I_1 имѣетъ minimum. Рѣшеніе этихъ двухъ задачъ можетъ быть ведено аналогичнымъ образомъ.



Фиг. 11.

Отмѣтивъ на псевдосферической фигурѣ произвольную точку O (фиг. (11)), проведемъ чрезъ нее геодезическую линію OX . Пусть искомый центръ инерціи занимаетъ положеніе N или искомая ось инерціи имѣетъ положеніе ND , гдѣ уголъ OND прямой. Мы опредѣлимъ тотъ или другой элементъ геодезическимъ разстояніемъ a и угломъ α . Каждую матеріальную точку M псевдосферической площадки мы будемъ опредѣлять геодезическимъ разстояніемъ $MO=b$ и угломъ β .

На основаніи извѣстныхъ формулъ псевдосферической тригонометріи можемъ опредѣлить разстоянія $MN=\rho$ и $MD=\eta$, входящія въ наши форм. (44) и (47) такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) &= \cos h\left(\frac{a}{r}\right) \cos h\left(\frac{b}{r}\right) \\ &\quad - \sin h\left(\frac{a}{r}\right) \sin h\left(\frac{b}{r}\right) \cos (\beta - \alpha), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \sin h\left(\frac{\gamma}{r}\right) &= \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(MNO) = \sin h\left(\frac{a}{r}\right) \cos h\left(\frac{b}{r}\right) \\ &\quad - \cos h\left(\frac{a}{r}\right) \sin h\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\beta - \alpha). \end{aligned} \quad (49)$$

Введемъ для сокращенія письма обозначенія:

$$\begin{aligned} x &= \sin h\left(\frac{a}{r}\right) \cos(\alpha), & x' &= \cos h\left(\frac{a}{r}\right) \cos(\alpha), \\ y &= \sin h\left(\frac{a}{r}\right) \sin(\alpha), & y' &= \cos h\left(\frac{a}{r}\right) \sin(\alpha), \\ z &= \cos h\left(\frac{a}{r}\right), & z' &= \sin h\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned} \quad (50)$$

$$x'' = \sin h\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\beta),$$

$$y'' = \sin h\left(\frac{b}{r}\right) \sin(\beta),$$

$$z'' = \cos h\left(\frac{b}{r}\right).$$

Формулы (50) позволяютъ намъ представить выраженія (48) и (49) такъ:

$$\cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) = zz'' - xx'' - yy'', \quad (48')$$

$$\sin h\left(\frac{\gamma}{r}\right) = z'z'' - x'x'' - y'y'', \quad (49')$$

Отсюда опредѣляемъ выраженія, нужные для составленія суммъ (44) и (47):

$$\begin{aligned}
 \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) &= (zz'' - xx'' - yy'')^2 - 1 \\
 &= (zz'' - xx'' - yy'')^2 - (x^2 + y^2 - z^2)(x''^2 + y''^2 - z''^2) \\
 &= x^2(z''^2 - y''^2) + y^2(z''^2 - x''^2) + z^2(x''^2 + y''^2) \\
 &\quad - 2yzy''z'' - 2zxx''x'' + 2xyx''y'', \\
 \cos h^2\left(\frac{\eta}{r}\right) &= (z'z'' - x'x'' - y'y'')^2 + 1 \\
 &= (z'z'' - x'x'' - y'y'')^2 \\
 &\quad - (x'^2 + y'^2 - z'^2)(x''^2 + y''^2 - z''^2) \\
 &= x'^2(z''^2 - y''^2) + y'^2(z''^2 - x''^2) + z'^2(x''^2 - y''^2) \\
 &\quad - 2y'z'y''z'' - 2z'x'z''x'' + 2x'y'x''y''.
 \end{aligned}$$

Совершая подстановки въ форм. (44) и (47), введемъ обозначенія:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum m(z''^2 - y''^2), \\
 B &= \sum m(z''^2 - x''^2), \\
 C &= \sum m(x''^2 + y''^2), \\
 D &= \sum my''z'', \\
 E &= \sum mz''x'', \\
 F &= \sum mx''y''.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Мы увидимъ, что интересующія насъ суммы I и I_1 выразятся одинаковыми формулами (первая чрезъ x, y, z , а вторая чрезъ x', y', z'):

$$\begin{aligned} I &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx + 2Fxy \\ &= F(x, y, z), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - 2Dy'z' - 2Ez'x' + 2Fx'y' \\ &= F'(x', y', z'). \end{aligned}$$

Теперь намъ надо отыскать minimum выражений I и I_1 подъ условіями:

$$z^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0, \quad (53)$$

$$z'^2 - x'^2 - y'^2 + 1 = 0.$$

Это приводитъ насъ къ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} - 2\lambda x &= 0, & \frac{dF'}{dx'} - 2\lambda' x' &= 0, \\ \frac{dF}{dy} - 2\lambda y &= 0, & \frac{dF'}{dy'} - 2\lambda' y' &= 0, \\ \frac{dF}{dz} + 2\lambda z &= 0, & \frac{dF'}{dz'} + 2\lambda' z' &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

показывающимъ, что искомыя величины x, y, z или x', y', z' можно разсматривать какъ координаты точекъ прикосновенія поверхностей семейства эллипсоидовъ

$$F(x, y, z) = \text{const.}$$

съ гиперболоидами вращенія (53). (Вслѣдствіе положительности I и I_1 форма F положительна). Такихъ

точекъ прикосновенія будетъ 6, по двѣ симметричныхъ относительно начала координатъ. Одна пара точекъ прикосновенія будетъ лежать на двуполомъ гиперболоидѣ, данномъ первымъ ур. (58), и двѣ пары на однополомъ гиперболоидѣ, данномъ вторымъ ур. (58). Точки прикосновенія на двуполомъ гиперболоидѣ опредѣляютъ намъ значенія x, y, z для центра инерціи, а точки прикосновенія на однополомъ — значенія x', y', z' для двухъ осей инерціи.

Мы найдемъ на основаніи форм. (50), одинъ вполне опредѣленный центръ инерціи псевдосферической площадки и двѣ вполне опредѣленные оси инерціи ея.

Изъ трехъ дѣйствительныхъ корней получаемого изъ форм. (54) кубическаго уравненія, опредѣляющаго λ , одинъ корень λ будетъ соотвѣтствовать центру инерціи, а два другіе λ' и λ'' — осямъ инерціи.

Умножаемъ первую группу уравненій (54) соотвѣтственно на x', y', z' и складываемъ, а вторую группу на x, y, z и тоже складываемъ; потомъ составляемъ разность найденныхъ суммъ. По сокращеніи получимъ:

$$(\lambda - \lambda')(zz' - xx' - yy') = 0.$$

Такъ какъ λ не равно λ' , то по необходимости

$$zz' - xx' - yy' = 0.$$

Величины (x, y, z) на основаніи форм. (50) опредѣляютъ точку псевдосферы, соотвѣтствующую центру

инерціи, а величины (x', y', z') опредѣляютъ подошву ортогонали, опущенной изъ данной точки O на ось инерціи. Примемъ на нашей фиг. (11), что первая точка есть M , а вторая есть N . Тогда въ формулѣ (49') надо измѣнить x'', y'', z'' на x, y, z (центру инерціи будутъ соотвѣтствовать теперь полярныя координаты b и β), что даетъ намъ:

$$\sin h\left(\frac{\eta}{r}\right) = z'z - x'x - y'y = 0.$$

Отсюда $\eta = 0$, и ось инерціи ND должна проходить чрезъ центръ инерціи M .

Сдѣланное разсужденіе показываетъ намъ, что обѣ оси инерціи псевдосферической площадки пересѣкаются въ центрѣ ея инерціи. Легко увидѣть, что это пересѣченіе происходитъ подъ прямымъ угломъ. Написавъ вторую группу уравненій (54) для x', y', z' , характеризующихъ первую ось инерціи, и для величинъ x'', y'', z'' , характеризующихъ вторую ось инерціи, составяемъ изъ нихъ, подобно предыдущему, соотношение:

$$(\lambda' - \lambda'')(z'z'' - x'x'' - y'y'') = 0,$$

изъ котораго усматриваемъ, что

$$z'z'' - x'x'' - y'y'' = 0.$$

Пусть на фиг. (11), точки N и M суть подошвы перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ O на оси инер-

ціи, при чемъ (x', y', z') опредѣляются по форм. (50), а величины (x'', y'', z'') суть:

$$\begin{aligned} x'' &= \cos h\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\beta), \\ y'' &= \cos h\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\beta), \\ z'' &= \sin h\left(\frac{b}{r}\right). \end{aligned} \quad (50')$$

Предположивъ на фиг. (11), что уголъ OMD будетъ прямой, а уголъ D какой-нибудь, опредѣлимъ этотъ послѣдній уголъ по формулѣ псевдосферической тригонометріи:

$$\cos(D) = -\sinh\left(\frac{a}{r}\right) \sinh\left(\frac{b}{r}\right) + \cosh\left(\frac{a}{r}\right) \cosh\left(\frac{b}{r}\right) \cos(\beta - \alpha),$$

которая въ силу указанныхъ значеній $x', y', z', x'', y'', z''$ можетъ быть написана еще такъ:

$$-\cos(D) = z'z'' - x'x'' - y'y'' = 0.$$

Это показываетъ, что уголъ D есть прямой уголъ.

Такимъ образомъ, для всякой псевдосферической площадки существуетъ центръ инерціи, чрезъ который проходятъ двѣ взаимно - ортогональныя оси инерціи.

Если на фиг. (9) принять точку O за центръ инерціи и направить оси OX и OY по осямъ инер-

ції площадки, то функція $F(x, y, z)$ въ форм. (52) будетъ:

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2, \quad (52')$$

такъ какъ только при этомъ условіи уравненія (54) удовлетворяются (первая группа—при условіи $x=y=0$, $z=1$, а вторая группа—при условіяхъ $z'=y'=0$, $x'=1$ или $z'=x'=0$, $y'=1$). Мы имѣемъ при главныхъ осяхъ инерціи соотношенія:

$$D=E=F=0. \quad (51'')$$

§ 5. Посмотримъ, какія перманентныя движенія можетъ имѣть псевдосферическая фигура по инерціи. Если матеріальная точка массы m движется по псевдосферѣ по направленію линіи $p = \text{const.}$ съ постоянною скоростью, выраженною одною изъ форм. (4) при постоянномъ значеніи $\frac{dq}{dt}$, то проекція силы ея инерціи (центробѣжной силы) на касательную плоскость къ псевдосферѣ будетъ направлена по линіямъ $q = \text{const.}$ и выразится съ помощію живой силы T извѣстною формулою:

$$Pr = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial p'} \right) + \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{mv^2}{2} \right). \quad (55)$$

При этомъ для трехъ упомянутыхъ видовъ движенія мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} r^2 \cos h^2 \left(\frac{\eta}{r} \right) \omega^2, \\ T &= \frac{m}{2} r^2 \sin h^2 \left(\frac{\rho}{r} \right) \omega^2, \\ T &= \frac{m}{2} r^2 e^{-2p} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Вторая часть этихъ форм., подѣленные на r , представляютъ намъ потенціальныя функціи центробѣжной силы P . Если рѣчь идетъ о перманентномъ вращательномъ движеніи, то для уравновѣшиванія между собою всѣхъ центробѣжныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ матеріальной площадки, необходимо выбрать центръ вращательнаго движенія такъ, чтобы сумма:

$$\frac{r^2 \omega^2}{2} \sum m \sin h^2 \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{r^2 \omega^2}{2} I_1,$$

распространенная на всѣ точки площадки, имѣла minimum. На основаніи предыдущаго параграфа такою точкою является только центръ инерціи площадки.

Подобнымъ же образомъ отысканіе направляющей поступательнаго движенія, при которомъ всѣ силы инерціи уравновѣшиваются, сводится къ отысканію на поверхности площадки, такой геодезической линіи, для которой сумма:

$$\frac{w^2 r^2}{2} \sum m \cos h^2 \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{r^2 w^2}{2} I_1,$$

есть minimum. Мы видѣли, что существуютъ только двѣ такія линіи, представляющія оси инерціи пластинки.

Что касается до третьяго вида движенія—вращенія около бесконечно удаленнаго полюса, то онъ не можетъ представить перманентное движеніе потому, что здѣсь, какъ легко усмотрѣть изъ форм. (55) и послѣдней форм. (56), всѣ центробѣжныя силы будутъ имѣть величину:

$$mre^{-2p}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$$

и будутъ направлены по линіямъ $q = \text{const.}$ отъ бесконечно удаленнаго полюса вращенія, вслѣдствіе чего онѣ не могутъ уравниваться.

§ 6. Перейдемъ теперь къ общему случаю движенія псевдосферической площадки по инерціи. Мы могли бы для этой цѣли воспользоваться уравненіями движенія площадки въ формѣ Лагранжа, которымъ при надлежащемъ выборѣ параметровъ можно бы дать видъ, аналогичный виду уравненій Эйлера для движенія твердаго тѣла около неподвижной точки. Но болѣе простое и наглядное рѣшеніе вопроса можетъ быть получено изъ принципа сохраненія импульсивной силы или импульсивной пары. Пусть имѣемъ систему матеріальныхъ точекъ $m, m', \dots$, которыя могутъ перемѣщаться, только оставаясь на псевдосферѣ, и связаны еще какими-нибудь условіями, допускающими всякія поступательныя и вращательныя

Если же примемъ точку O за начало полярныхъ координатъ въ системѣ, выраженной второю форм. (3), то, записавъ условіе равенства нулю работъ всѣхъ силъ инерціи при элементарномъ поворотѣ около полюса O , найдемъ:

$$\Sigma m \sin h^2 \left(\frac{\rho}{r} \right) \omega = \frac{L}{r}. \quad (57'')$$

Постоянныя все время движенія импульсивныя силы R , R_1 , направленныя по OX и OY , и импульсивная пара съ параметромъ L и центромъ O , слагаясь между собою, приведутъ насъ, вообще говоря, или къ одной равнодѣйствующей импульсивной силѣ, или къ одной равнодѣйствующей импульсивной парѣ съ опредѣленнымъ центромъ. Эта сила или эта пара остаются неизмѣнными все время движенія системы. Говоря о движеніи неизмѣнной псевдосферической площадки, отмѣтимъ на псевдосферѣ геодезическую линію, по которой направлена соотвѣтствующая начальному движенію площадки импульсивная сила, или точку, являющуюся центромъ импульсивной пары. *Эта сила или пара останутся неизмѣнными все время движенія.*

Выполненіе этого принципа для неизмѣнной псевдосферической площадки является достаточнымъ условіемъ правильности найденнаго движенія. Такъ какъ въ случаѣ равномернаго вращенія около центра инерціи или равномернаго поступательнаго движенія вдоль одной изъ осей инерціи импульсивныя пара и сила со-

храняются, то упомянутыя движенія суть перманентныя. Это было иначе доказано въ § 5. Составимъ теперь живую силу псевдосферической площадки при какихъ-нибудь поступательномъ и вращательномъ движеніяхъ ея, опредѣляемыхъ параметрами w, w_1, ω относительно осей OX и OY (фиг. (11)).

Разлагая скорости точки m отъ поступательныхъ движеній (фиг. (11)) на составляющія, направленныя по ρ , и составляющія, перпендикулярныя этой линіи, можемъ написать:

$$\frac{v^2}{r^2} = \left(w \cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \sin(\beta) + w_1 \cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \sin(\alpha) \right)^2 + \left(w \cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \cos(\beta) - w_1 \cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \cos(\alpha) + \omega \sinh\left(\frac{\rho}{r}\right) \right)^2.$$

Но по формуламъ псевдосферической тригонометріи имѣемъ:

$$\cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \sin(\beta) = \cos(\varphi), \quad \cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \sin(\alpha) = \sin(\varphi),$$

$$\cos \alpha = \cos h\left(\frac{\eta'}{r}\right) \cos(\varphi), \quad \cos \beta = \cos h\left(\frac{\xi'}{r}\right) \sin(\varphi),$$

$$\cos h\left(\frac{\eta}{r}\right) \cos h\left(\frac{\xi'}{r}\right) = \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right),$$

$$\cos h\left(\frac{\xi}{r}\right) \cos h\left(\frac{\eta'}{r}\right) = \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

поэтому

$$\frac{v^2}{r^2} = [w \cos(\varphi) + w_1 \sin(\varphi)]^2 + \left[w \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
 & - w_1 \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) + \omega \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \Big]^2 \\
 & = w^2 \left[\cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) - \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos^2(\varphi) \right] \\
 & + w_1^2 \left[\cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) - \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin^2(\varphi) \right] \\
 & + \omega^2 \left[\sin^2 h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos^2(\varphi) + \sin^2 h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin^2(\varphi) \right] \\
 & - 2w_1 \omega \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) \\
 & + 2\omega w \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \\
 & - 2ww_1 \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \cos(\varphi).
 \end{aligned}$$

Умножая эту формулу на $\frac{m}{2}$ и беря сумму, распространенную на всѣ матеріальныя точки площадки, найдемъ, пользуясь обозначеніями (51):

$$\begin{aligned}
 T = \frac{r^2}{2} (Bw^2 + Aw_1^2 + C\omega^2 - 2Ew_1\omega + 2Dw\omega + \\
 - 2Fww_1). \quad (58)
 \end{aligned}$$

Допуская, что (фиг. (12)) въ рассматриваемый моментъ времени оси инерціи площадки совпадаютъ съ

нашими неподвижными осями OX и OY , получимъ по (51') упрощенное выраженіе живой силы:

$$T = \frac{r^2}{2}(Bw^2 + Aw_1^2 + C\omega^2). \quad (58')$$

Частныя производныя по w , w_1 , ω отъ форм. (58) и (58'), подѣленные на r , дадутъ намъ составляющія R , R_1 импульсивной силы и параметръ L импульсивной пары. Выражая живую силу съ помощію R , R_1 и L , найдемъ:

$$T = \frac{r^2}{2}(bR^2 + aR_1^2 + cL^2). \quad (59)$$

Такъ же найдемъ для какихъ-нибудь осей $O'Y'$ и $O'X'$, имѣющихъ произвольное начало O' , опредѣляемое по главнымъ осямъ координатами (ξ, η) :

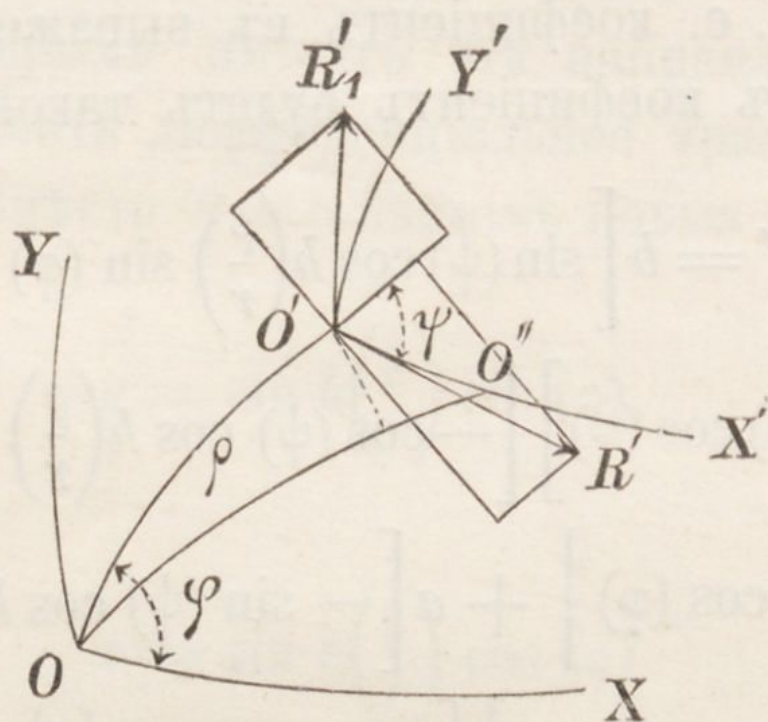
$$T = \frac{r'^2}{2}(b'R'^2 + a'R_1'^2 + c'L'^2 + 2d'R_1'L' + 2e'L'R' + 2f'R'R_1'). \quad (60)$$

Теперь постараемся выбрать при данныхъ (ξ, η) уголъ ψ , характеризующій направленіе $O'X'$ такъ, чтобы въ форм. (60) получилось:

$$f' = 0. \quad (61)$$

Чтобы получить форм. (60) изъ форм. (59) надо выразить компоненты R , R_1 , L импульсивныхъ силъ, взятыхъ для координатъ XOY , по компонентамъ тѣхъ же силъ R' , R_1' , L' , взятымъ для координатъ $X'O'Y'$, и подставить ихъ величины въ форм. (59).

Это можно сдѣлать на основаніи сказаннаго въ § 3.



Фиг. 13.

На фиг. (13) усматриваемъ, что

$$R = R' \left(\cos h \left(\frac{\rho}{r} \right) \sin (\psi) \sin (\varphi) + \cos (\psi) \cos (\varphi) \right) \\ + R_1' \left(- \cos h \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos (\psi) \sin (\varphi) + \sin (\psi) \cos (\varphi) \right) \\ + L' \sin h \left(\frac{\rho}{r} \right) \sin (\varphi),$$

$$R_1 = R' \left(- \cos h \left(\frac{\rho}{r} \right) \sin (\psi) \cos (\varphi) + \cos (\psi) \sin (\varphi) \right) \\ + R_1' \left(\cos h \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos (\psi) \cos (\varphi) + \sin (\psi) \sin (\varphi) \right) \\ - L' \sin h \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos (\varphi),$$

$$L = R' \sin \psi \sin h \left(\frac{\rho}{r} \right) - R_1' \cos (\psi) \sin h \left(\frac{\rho}{r} \right) \\ + L' \cos h \left(\frac{\rho}{r} \right). \quad (62)$$

Для нашей цѣли нужно по этимъ форм. составить только f' , т. е. коефициентъ въ выраженіи (60) при $R'R_1'$. Этотъ коефициентъ будетъ такой:

$$\begin{aligned} f' = & b \left[\sin(\psi) \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \right. \\ & \left. + \cos(\psi) \cos(\varphi) \right] \left[-\cos(\psi) \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \right. \\ & \left. + \sin(\psi) \cos(\varphi) \right] + a \left[-\sin(\psi) \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) \right. \\ & \left. + \cos(\psi) \sin(\varphi) \right] \left[\cos(\psi) \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) \right. \\ & \left. + \sin(\psi) \sin(\varphi) \right] - c \sin(\psi) \cos(\psi) \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) = 0. \quad (63) \end{aligned}$$

Это уравненіе служить для опредѣленія ψ , по данному положенію точки O' . Ему можно дать слѣдующій болѣе простой видъ:

$$\begin{aligned} (a - b) \operatorname{tg}^2 \psi \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \operatorname{tg}(\psi) \left[c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \right. \\ \left. + b \left(\cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) \right) \right] \\ + a \left[\cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \right] \\ - (a - b) \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) \sin(\varphi) = 0, \quad (64) \end{aligned}$$

Мы получаемъ отсюда два направленія, соотвѣтствующія осямъ $O'X'$ и $O'Y'$. Вообразивъ на по-

верхности псевдосферы два семейства линий, касательныя которых имѣютъ эти направленія, постараемся составить дифференціальное уравненіе этихъ семействъ. Вмѣсто φ и ρ введемъ новыя переменныя:

$$y = \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin (\varphi), \quad (65)$$

$$x = \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos (\varphi)$$

Мы получимъ:

$$dy = \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin (\varphi) \frac{d\rho}{r} + \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos (\varphi) d\varphi,$$

$$dx = \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos \varphi \frac{d\rho}{r} - \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin \varphi d\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + r \operatorname{tg} h\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{d\varphi}{d\rho}}{1 - r \frac{d\varphi}{d\rho} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} h\left(\frac{\rho}{r}\right)}. \quad (66)$$

Но изъ чертежа (13) видно, что

$$\frac{r \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) d\varphi}{d\rho} = - \operatorname{tg} \psi. \quad (66')$$

Подставляемъ сюда величину $r \frac{d\varphi}{d\rho}$, опредѣленную изъ форм. (66):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \left[\operatorname{tg} \varphi - \frac{dy}{dx} \right]}{1 + \frac{dy}{dx} \operatorname{tg} \varphi}. \quad (67)$$

Это выражение вставляемъ въ форм. (64):

$$\begin{aligned} & (a - b) \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\operatorname{tg}(\varphi) - \frac{dy}{dx} \right]^2 \\ & + \left[c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) + b \left(\cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) \right) \right. \\ & \quad \left. + a \left(\cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \right) \right] \\ & \cdot \left[\operatorname{tg}(\varphi) - \frac{dy}{dx} \right] \left[1 + \frac{dy}{dx} \operatorname{tg}(\varphi) \right] \\ & - (a - b) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left[1 + \frac{dy}{dx} \operatorname{tg}(\varphi) \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

и отбираемъ въ полученномъ уравненіи коэффиціенты при различныхъ степеняхъ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Коэффиціентъ при $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ будетъ такой:

$$\begin{aligned} & \cos^2 \varphi \left[(a - b) \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi) - b \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^3(\varphi) \right. \\ & \quad \left. + b \operatorname{tg}(\varphi) - a \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi) + a \operatorname{tg}^3 \varphi - (a - b) \operatorname{tg}^3(\varphi) \right] \\ & - c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi) = - (b + c) \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi); \end{aligned}$$

коэффициентъ при $\frac{dy}{dx}$ такой:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \varphi \left[-2(a-b) \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^2(\varphi) \right. \\
 & \quad - b \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) (1 - \operatorname{tg}^2(\varphi)) \operatorname{tg}^2 \varphi + b(1 - \operatorname{tg}^2(\varphi)) \\
 & \quad - a \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) (1 - \operatorname{tg}^2(\varphi)) + a \operatorname{tg}^2(\varphi) (1 - \operatorname{tg}^2(\varphi)) \\
 & \quad \left. - 2(a-b) \operatorname{tg}^2(\varphi) \right] - c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) (1 - \operatorname{tg}^2(\varphi)) \\
 & = \cos^2(\varphi) \left[- (a-b) \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^2(\varphi) \right. \\
 & \quad + b \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^4(\varphi) + b - a \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) - a \operatorname{tg}^4 \varphi \\
 & \quad \left. - (a-b) \operatorname{tg}^2(\varphi) \right] - c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \\
 & = -a \left[1 + \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) + \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \\
 & + b \left[(1 + \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right)) \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 \right] - c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) (1 - \operatorname{tg}^2(\varphi)) \\
 & = \frac{(b-a)}{\cos^2(\varphi)} - (a+c) \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) + (b+c) \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^2(\varphi);
 \end{aligned}$$

наконецъ, опредѣляя коэффициентъ, независимый отъ $\frac{dy}{dx}$, получаемъ:

$$\cos^2(\varphi) \left[(a-b) \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^3(\varphi) + b \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}^3(\varphi) \right]$$

$$\begin{aligned} & - b \operatorname{tg}(\varphi) + a \cos h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi) - a \operatorname{tg}^3(\varphi) - (a - b) \operatorname{tg}(\varphi) \Big] \\ & + c \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi) = (a + c) \sin h^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \operatorname{tg}(\varphi). \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе найденныя величины коэф-
фиціентовъ и умноживъ полученное равенство на
 $\cos^2(\varphi)$, мы сейчасъ же найдемъ возможность по
форм. (65) замѣнить ρ и φ чрезъ x и y . Такимъ
образомъ найдемъ для опредѣленія уравненія иско-
мыхъ семействъ взаимноортогональныхъ линій диф-
ференціальное уравненіе:

$$\begin{aligned} & (b + c)yx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (a - b + (a + c)x^2 - (b + c)y^2)\frac{dy}{dx} \\ & - (a + c)xy = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Для интеграціи этого уравненія надо сдѣлать под-
становку:

$$x = \sqrt{u}, \quad y = \sqrt{v},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{u}{v}} \frac{dv}{du},$$

которая даетъ:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 (b + c) \frac{u}{v} \sqrt{uv}$$

$$+ \frac{dv}{du} \sqrt{\frac{u}{v}} (a - b + (a + c)u - (b - c)v) - (a + c) \sqrt{uv} = 0$$

и по раздѣленіи на $\sqrt{\frac{u}{v}}$ приводится къ виду:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 (b+c)u + \frac{dv}{dy}((a-b) + (a+c)u - (b+c)v) - (a+c)v = 0.$$

Рѣшая относительно v и положивъ для сокращенія письма $\frac{dv}{du} = p$, найдемъ дифференціальное уравненіе въ формѣ Клеро:

$$v = pu + \frac{p(a-b)}{(a+c) + p(b+c)}. \quad (70)$$

Общій интеграль этого уравненія будетъ такой:

$$v = \mu u + \frac{\mu(a-b)}{(a+c) + \mu(b+c)},$$

гдѣ μ постоянное. Его можно написать еще такъ:

$$\frac{\frac{u}{a-b}}{(a+c) + \mu(b+c)} + \frac{\frac{v}{\mu(a-b)}}{(a+c) + \mu(b+c)} = 1.$$

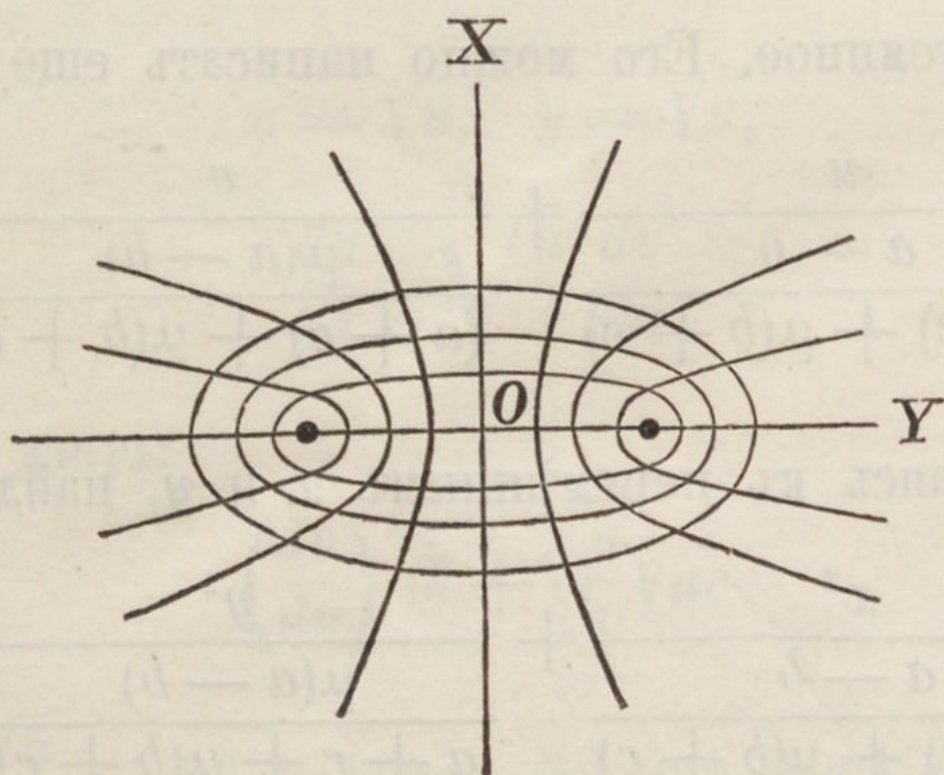
Возвращаясь къ переменнымъ x и y , найдемъ:

$$\frac{\frac{x^2}{a-b}}{(a+c) + \mu(b+c)} + \frac{\frac{y^2}{\mu(a-b)}}{(a+c) + \mu(b+c)} = 1. \quad (71)$$

Если разсматривать x, y какъ декартовы координаты на плоскости, то ур. (71) представить намъ два семейства эллипсовъ и гиперболей. Принимая $a > b$, будемъ получать эллипсы при $\mu < -\frac{a+c}{b+c}$, и гиперболы съ дѣйствительною осью OY при $\mu > 0$. Полуось эллипсовъ и гиперболей на оси OY выражается формулою:

$$y_0 = \sqrt{\frac{a-b}{b+c + \frac{1}{\mu}(a+c)}}.$$

При $\mu = \pm \infty$ эта полуось есть $\sqrt{\frac{a-b}{b+c}}$; съ уменьшеніемъ же абсолютной величины μ она увеличивается для эллипсовъ и уменьшается для гиперболей, какъ это представлено на фиг. (14). Указанныя се-



Фиг. 14.

мейства линій, уравненія которыхъ мы получили, рассматривая x и y какъ декартовы координаты, не взаимно-ортогональны; приписывая же x и y значенія, данныя ур. (65), и рассматривая кривыя на псевдосферѣ, мы получимъ два семейства взаимно-ортогональныхъ линій, расположенныхъ такъ же, какъ это показано на фиг. (14).

Легко усмотрѣть, что ур. (72) можетъ еще быть представлено въ видѣ:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 0, \quad (72)$$

гдѣ $z = \cos h\left(\frac{\rho}{r}\right)$. Дѣйствительно, подставивъ въ ур. (72)

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2,$$

найдемъ:

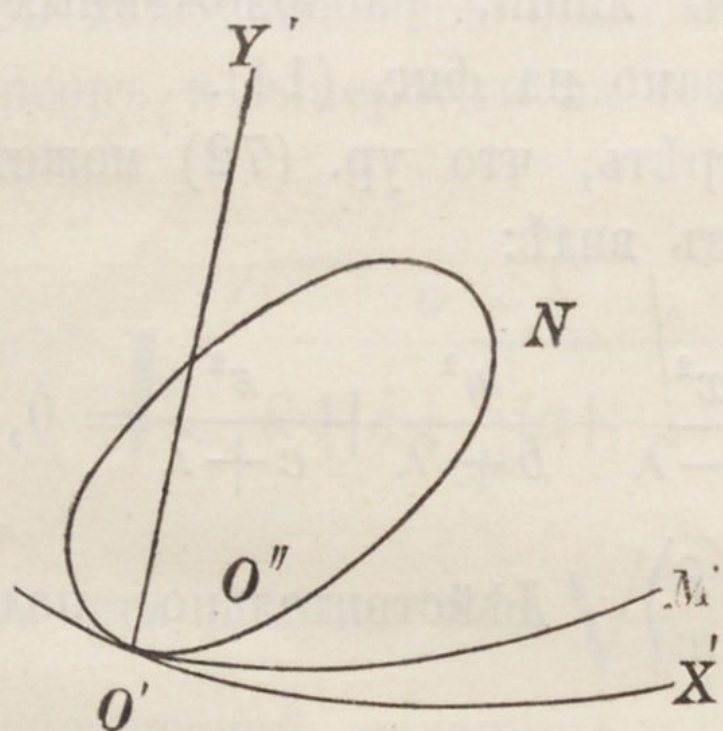
$$\frac{\frac{x^2}{\lambda-a}}{\frac{a+c}{a+\lambda}} + \frac{\frac{y^2}{\lambda-b}}{\frac{b+c}{b+\lambda}} = 1. \quad (71')$$

Здѣсь всегда можно опредѣлить параметръ μ , удовлетворяя одновременно двумъ уравненіямъ:

$$\frac{a-\lambda}{a+\lambda} = \frac{a-b}{(a+c)+\mu(b+c)}, \quad \frac{\lambda-b}{b+\lambda} = \frac{\mu(a-b)}{(a+c)+\mu(b+c)}. \quad (73)$$

Въ формѣ (72) наше уравненіе является аналогичнымъ ур. (1) для семейства соотвѣтственныхъ ортогональныхъ линій на сферѣ.

Когда семейство линий (71), удовлетворяющихъ условию (61), вычерчено на псевдосферической площадке, тогда рѣшеніе вопроса о ея движеніи по инерціи при существованіи одной импульсивной силы сейчасъ же получается.



Фиг. 15.

Проводимъ (фиг. (15)) на неподвижной псевдосферѣ геодезическую линію $O'X'$, направленную по равнодѣйствующей импульсивныхъ силъ. Помѣщаемъ псевдосферическую площадку въ ея начальное положеніе и отмѣчаемъ, изъ вычерченнаго на ней семейства линій, данныхъ ур. (71), линію $O'N$, прикасающуюся къ $O'X'$. Выразивъ живую силу относительно осей $X'O'Y'$ по форм (60), будемъ имѣть въ разсматриваемый моментъ времени

$$R_1' = 0, L' = 0, f' = 0.$$

Параметры, характеризующіе движеніе площадки, будутъ:

$$\begin{aligned} w &= r(b'R' + f'R_1' + e'L') = rb'R', \\ w_1 &= r(f'R' + a'R_1' + d'L') = 0, \\ \omega &= r(e'R' + d'R_1' + c'L') = re'R'. \end{aligned} \quad (74)$$

Эти формулы показываютъ намъ, что все движеніе площадки сводится къ поступательному движенію по $O'X'$ и къ вращенію около точки прикосновенія O' . По прошествіи времени dt линія $O'N$ будетъ прикасаться къ $O'X'$ новою точкою O'' . Взявши новую ось $O'Y'$, ортогонально $O'X'$, мы повторимъ сдѣланное разсужденіе и т. д. Такимъ образомъ придемъ къ заключенію, что все движеніе площадки будетъ представляться каченіемъ подвижной (сгибающейся по закону псевдосферы) пологіи $O'N$ по геодезической линіи $O'X'$ и поступательнымъ движеніемъ площадки по направленію $O'X'$. Послѣднее поступательное движеніе будетъ имѣть постоянный параметръ w , такъ какъ по теоремѣ живыхъ силъ имѣемъ изъ форм. (60).

$$b'R'^2 = \text{const.}$$

и вслѣдствіе постоянства R' сдѣлаемъ заключеніе о постоянствѣ b' для всѣхъ точекъ линіи $O'N$; постоянство же R' и b' даетъ по первой форм. (74) постоянство w .

§ 7. Разсмотримъ теперь случай, при которомъ всѣ импульсивныя силы приводятся къ одной парѣ.

Для рѣшенія задачи въ этомъ случаѣ надо отыскать семейство линій, во всѣхъ точкахъ которыхъ

$$d' = 0. \quad (75)$$

По форм. (64) и (60) получимъ:

$$\begin{aligned} d' = & b \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \left(-\cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\psi) \sin(\varphi) \right. \\ & \left. + \sin(\psi) \cos(\varphi) \right) - a \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\varphi) \left(\cos h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\psi) \cos(\varphi) \right. \\ & \left. + \sin(\psi) \sin(\varphi) \right) - c \cos(\psi) \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos\left(\frac{\rho}{r}\right) = 0. \quad (76) \end{aligned}$$

Это уравненіе, служащее для опредѣленія ψ , приводится къ соотношенію:

$$\begin{aligned} & ((a + c) \cos^2(\varphi) + (b + c) \sin^2(\varphi)) \cosh\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \\ & + (a - b) \operatorname{tg} h(\psi) \sin h\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \cos(\varphi) = 0. \quad (77) \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\operatorname{tg} h(\psi)$ изъ форм. (66') и умножая на $2d\left(\frac{\rho}{r}\right)$ получаемъ дифференціальное ур.:

$$\begin{aligned} & 2((a + c) \cos^2(\varphi) + (b + c) \sin^2(\varphi)) \sinh\left(\frac{\rho}{r}\right) \cosh\left(\frac{\rho}{r}\right) d\left(\frac{\rho}{r}\right) \\ & - 2(a - b) \sinh^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = 0, \end{aligned}$$

интегрируя которое, находимъ:

$$(a + c) \sinh^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos^2\varphi + (b + c) \sinh^2\left(\frac{\rho}{r}\right) \sin^2\varphi = \text{const.} \quad (78)$$

Съ помощію переменныхъ x и y , это уравненіе представляется такъ:

$$(a + c)x^2 + (b + c)y^2 = \text{const.} \quad (78')$$

Если бы x и y были декартовы координаты на плоскости, то уравнение (78') представляло бы намъ семейство подобныхъ эллипсовъ, имѣющихъ центромъ центръ инерціи пластинки. Аналогичныя кривыя будутъ представлять на псевдосферѣ ур. (78). Воображаемъ, что эти кривыя соединены съ рассматриваемою матеріальною пластинкою и отмѣтимъ ту изъ нихъ $O'N$ (фиг. (15)), которая въ рассматриваемый моментъ времени проходитъ чрезъ центръ O' импульсивной пары. Направивъ оси $X'O'Y'$ такъ, какъ представлено на фигурѣ (14), будемъ имѣть:

$$R'=0, \quad R_1'=0, \quad d_1'=0.$$

Вслѣдствіе этого форм. (74) замѣнятся на слѣдующія:

$$\begin{aligned} w &= re' L', \\ w_1 &= 0, \\ \omega &= rc' L'. \end{aligned} \tag{74'}$$

Все движеніе пластинки въ безконечно малый промежутокъ времени dt , прилежающій къ рассматриваемому моменту времени, будетъ слагаться изъ вращенія около точки O' и изъ поступательнаго движенія, направляющая котораго $O'X'$ прикасается къ кривой $O'N$ въ точкѣ O' . Отъ этихъ движеній псевдосферическая площадка перемѣстится такъ, что по прошествіи времени dt нѣкоторая точка O'' кривой $O'N$ вступитъ въ неподвижный центръ O' , такъ что для

слѣдующаго промежутка времени dt мы можемъ повторить наши разсужденія и т. д. Все время движенія кривая $O'N$, неизмѣнно соединенная съ площадкой, будетъ скользить чрезъ точку O' . Вращеніе около центра O' будетъ при этомъ совершаться съ постояннымъ параметромъ ω . Дѣйствительно, теорема живыхъ силъ для разсматриваемаго случая представится въ видѣ (форм. 60):

$$c' L'^2 = \text{const.}$$

отсюда мы дѣлаемъ заключеніе о постоянствѣ c' , для всѣхъ точекъ кривой $O'N$, и на основаніи третьей (форм. 74) убѣждаемся, что ω не измѣняется все время движенія.

§ 7. Случай, въ которомъ всѣ импульсивныя силы приводятся къ парѣ съ безконечно удаленнымъ центромъ долженъ быть подвергнутъ особому изслѣдованію. Проведя ортогональ $O'M$ (фиг. (15)) къ семейству геодезическихъ линій, идущихъ къ безконечно удаленному центру, замѣняемъ импульсивныя силы силою R' и парю съ параметромъ L' , причемъ для всѣхъ точекъ ортогонали, принимаемыхъ за центръ пары, R' и L' постоянны и равны между собою. Отыскиваемъ теперь на поверхности площадки такое семейство линій, во всѣхъ точкахъ которыхъ

$$f' + d' = 0, \quad (79)$$

и предполагаемъ, что въ начальный моментъ времени одна изъ кривыхъ $O'N$ этого семейства прикасается

къ упомянутой ортогонали $O'M$. Принявъ точку прикосновенія O' за начало координатъ $X'O'Y'$, указанныхъ на фиг. (14), будемъ имѣть вслѣдствіе $R'=L'$ и $R_1'=0$ по форм. (74):

$$\begin{aligned} w &= r(b' + e')R', \\ w_1 &= 0, \\ \omega &= r(e' + c')R'. \end{aligned} \quad (74'')$$

Отсюда по предыдущему придемъ къ заключенію что все время линія ON будетъ катиться по ортогонали OM и скользить поступательными движеніями, направленными по касательнымъ къ этой ортогонали. При этомъ сумма параметровъ $w + \omega$ будетъ величиною постоянною, потому что по теоремѣ живыхъ силъ:

$$b' + c' + 2e' = \text{const.} \quad (80)$$

Мы не приводимъ здѣсь выводъ ур. семейства линій, удовлетворяющихъ уравненію (79), такъ какъ это уравненіе выходитъ довольно сложнымъ. Замѣтимъ здѣсь, что оно могло бы быть получено и безъ интегрированія, прямо пользуясь форм. (79) и (80), изъ которыхъ слѣдуетъ исключить $\text{tg } \psi$.

§ 8. Мы теперь видимъ, какое различіе получается въ движеніи по инерціи плоской и псевдосферической матеріальной площадки. Если считать, какъ это дѣлалъ Лобачевскій, что плоскость есть псевдосфера съ очень малою отрицательною кривизною и прямая линія есть геодезическая линія псевдосферы, тогда

законъ инерціи остается вѣрнымъ только для матеріальной точки. Матеріальная же фигура конечныхъ размѣровъ будетъ, вообще говоря, двигаться по инерціи такъ, что центръ ея тяжести пойдетъ не по геодезической линіи, а по нѣкоторой волнистой кривой. Только при двухъ вполнѣ опредѣленныхъ направленіяхъ импульсивной силы были бы возможны движенія центра тяжести по кратчайшему пути съ постоянною скоростью.