

123250

О ПРОЧНОСТИ ВЕЛОСИПЕДНАГО КОЛЕСА.

Н. Е. Жуковского.



МОСКВА.

Университетская типографія, Страстной бульваръ.

1902.

О ПРОЧНОСТИ ВЕЛОСИПЕДНАГО КОЛЕСА.

Н. Е. Жуковского.

ПРОСМОТРЕНО
1952

§ 1. Въ этой замѣткѣ я излагаю рѣшеніе задачи о прочности колеса, подверженнаго въ одной точкѣ обода радіальному давленію и имѣющаго большое число тонкихъ радіальныхъ спицъ, которыя дѣйствуютъ только растяженіемъ или сжатіемъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ велосипедныхъ колесахъ и въ большихъ водяныхъ наливныхъ колесахъ. Здѣсь съ достаточною степенью приближенія можно принять дѣйствіе спицъ распределеннымъ непрерывно по всему ободу и свести рѣшеніе задачи къ интеграціи дифференціальныхъ уравненій.

Если назовемъ чрезъ ϵ модуль упругости спицъ, чрезъ σ —площадь ихъ перпендикулярнаго сѣченія, чрезъ r —ихъ длину, равную приблизительно радіусу колеса, и чрезъ n —ихъ число, то, положивъ

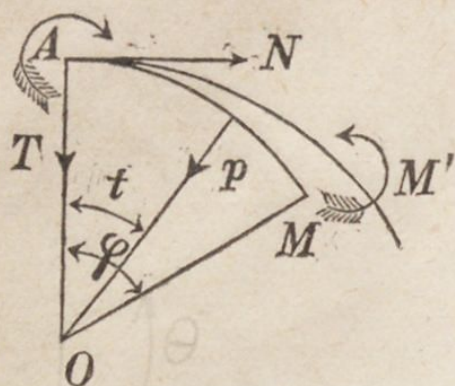
$$\mu = \frac{\epsilon \sigma n}{2\pi r}, \quad (1)$$

будемъ имѣть на каждый элементъ длины $r d\varphi$ центральной линіи обода (мѣсто центровъ тяжести его нормальныхъ сѣченій) элементарную радіальную силу

$$p = \mu \delta r d\varphi,$$

гдѣ δr измѣненіе радіуса центральной линіи обода при упругой деформаціи колеса.

§ 2. Разрѣзавъ ободъ колеса въ его верхней точкѣ A [отъ которой будемъ вправо отсчитывать углы φ], уравновѣсимъ



Фиг. 1.

упругія силы полученнаго сѣченія съ правой стороны (фиг. 1) парю съ моментомъ L , нормальною силою N и тангенціальною силою T . Условія равновѣсія части обода AM' будутъ охарактеризованы извѣстными уравненіями равновѣсія тонкаго кривого бруса (Resal *Mécanique Générale*, T. V, § III):

$$EJ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) = L + Nr - Nr \cos \varphi$$

$$- Tr \sin \varphi - \mu r \int_0^{\varphi} \delta r \sin(\varphi - u) du, \quad (2)$$

$$ESe = -N \cos \varphi - T \sin \varphi - \mu \int_0^{\varphi} \delta r \sin(\varphi - u) du.$$

Здѣсь ρ —радіусъ кривизны деформированной центральной линіи въ точкѣ M' , e —отнесенное къ единицѣ длины растяженіе этой линіи въ точкѣ M' , S —площадь сѣченія обода, J —моментъ инерціи этой площади относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести площади, и E —модуль упругости обода колеса.

Выражая радіусъ векторъ деформированной центральной линіи чрезъ $R = r + \delta r$, напомнимъ выраженіе радіуса кривизны ρ въ полярныхъ координатахъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-R \frac{d^2 R}{d\varphi^2} + 2 \left(\frac{dR}{d\varphi} \right) + R^2}{\left(R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пренебрегая здѣсь малыми величинами выше перваго порядка относительно δr , получимъ:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2(\delta r)}{d\varphi^2} + \delta r \right). \quad (3)$$

Что касается до отнесеннаго къ единицѣ длины растяженія обода e , то оно выражается, какъ извѣстно, такъ:

$$e = \frac{\delta r}{r} + \frac{d(\delta \varphi)}{d\varphi}, \quad (4)$$

гдѣ $\delta \varphi$ есть измѣненіе угла φ точки M центральной линіи отъ упругой деформациі колеса.

Чтобы составить дифференціальныя уравненія нашей задачи, преобразуемъ сначала форм. (2) въ нижеслѣдующія:

$$r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) = a - b \cos \varphi - c \sin \varphi - \lambda^2 \int_0^\varphi \delta r \sin(\varphi - u) du, \quad (5)$$

$$r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) - ke = a,$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$a = \frac{L + Nr}{ES} \frac{1}{J},$$

$$b = \frac{Nr}{ES} \frac{1}{J}, \quad (6)$$

$$c = \frac{Tr}{ES} \frac{1}{J},$$

$$\lambda^2 = \frac{\mu r}{ES} \frac{1}{J}, \quad (6)$$

$$k = r \frac{1}{Sr^2}.$$

Подставляемъ въ формулы (5) выраженія (3) и (4):

$$\frac{d^2(\delta r)}{d\varphi^2} + \delta r = a - b \cos \varphi - c \sin \varphi - \lambda^2 \int_0^\varphi \delta r \sin(\varphi - u) du, \quad (7)$$

$$\frac{d^2(\delta r)}{d\varphi^2} + \delta r \left(1 - \frac{k}{r} \right) - k \frac{d(\delta \varphi)}{d\varphi} = a. \quad (8)$$

Теперь остается только избавиться въ уравн. (7) отъ знака интеграла. Для этого беремъ отъ обѣихъ частей ур. (7) вторую производную по φ и складываемъ полученное уравненіе съ первоначальнымъ. Это даетъ намъ:

$$\frac{d^4(\delta r)}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2(\delta r)}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2) \delta r = a. \quad (9)$$

Уравненія (9) и (8) суть искомыя дифференціальныя уравненія разсматриваемой задачи.

§ 3. Подставимъ въ уравненіи (9)

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = \zeta$$

и опредѣлимъ интегралъ дифференціального уравненія:

$$\frac{d^4\zeta}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2)\zeta = 0, \quad (10)$$

который выразится съ помощью корней ω :

$$\omega^4 + 2\omega^2 + (1 + \lambda^2) = 0. \quad (11)$$

Положивъ для сокращенія письма:

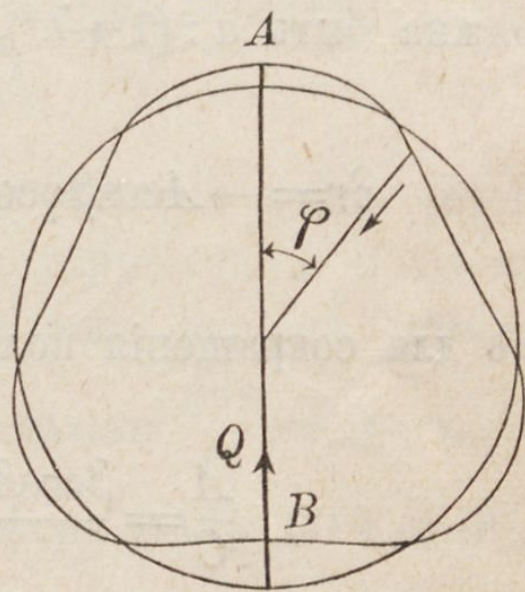
$$\operatorname{tg} \psi = \lambda,$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\cos \psi}} = \sqrt{\frac{1}{2\cos \psi} - \frac{1}{2}}, \\ \beta &= \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\cos \psi}} = \sqrt{\frac{1}{2\cos \psi} + \frac{1}{2}}, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{\cos \psi} = \sqrt{1 + \lambda^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

представимъ всѣ четыре корня ω , формулою:

$$\omega = \pm \alpha \pm \beta i.$$

Если ободъ велосипеднаго колеса подверженъ только радиальной силѣ Q давленія грунта, направленной снизу вверхъ (фиг. 2), то деформации δr и $\delta \varphi$ должны быть симметричны относительно вертикальнаго діаметра AB , а производная ζ должна имѣть равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку значенія для φ и для $-\varphi$. Кромѣ того функція ζ должна обращаться въ нуль въ верхней точкѣ обода A и въ нижней точкѣ его B . Удовлетворяя всѣмъ этимъ начальнымъ даннымъ, получимъ нижеслѣдующій интеграль, въ которомъ останется произвольнымъ только одно постоянное:



Фиг. 2.

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = C[\cos \beta \pi \sinh \alpha \pi \sin \beta \varphi \cosh \alpha \varphi - \sin \beta \pi \cosh \alpha \pi \cos \beta \varphi \sinh \alpha \varphi]. \quad (13)$$

Для того, чтобы отсюда опредѣлить δr , а потомъ съ помощію форм. (8) найти $\delta \varphi$, надо будетъ воспользоваться квадратурами:

$$\begin{aligned}\int_0^\varphi \sin \beta \varphi \cosh \alpha \varphi d\varphi &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\beta - \beta \cos \beta \varphi \cosh \alpha \varphi + \alpha \sin \beta \varphi \sinh \alpha \varphi], \\ \int_0^\varphi \cos \beta \varphi \sinh \alpha \varphi d\varphi &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [-\alpha + \alpha \cos \beta \varphi \cosh \alpha \varphi + \beta \sin \beta \varphi \sinh \alpha \varphi], \\ \int_0^\varphi \cos \beta \varphi \cosh \alpha \varphi d\varphi &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \cos \beta \varphi \sinh \alpha \varphi + \beta \sin \beta \varphi \cosh \alpha \varphi], \\ \int_0^\varphi \sin \beta \varphi \sinh \alpha \varphi d\varphi &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin \beta \varphi \cosh \alpha \varphi - \beta \cos \beta \varphi \sinh \alpha \varphi].\end{aligned}\quad (14)$$

Интегрируя съ помощію этихъ формулъ ур. (13) и замѣчая, что на основаніи ур. (9) постоянная часть въ выраженіи для δr должна быть $a : (1 + \lambda^2)$, получаемъ:

$$\delta r = -A \cos \beta \varphi \cosh \alpha \varphi + B \sin \beta \varphi \sinh \alpha \varphi + \frac{a}{1 + \lambda^2}, \quad (15)$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$\begin{aligned}\frac{A}{C} &= \frac{\beta \cos \beta \pi \sinh \alpha \pi + \alpha \sin \beta \pi \cosh \alpha \pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \\ \frac{B}{C} &= \frac{\alpha \cos \beta \pi \sinh \alpha \pi - \beta \sin \beta \pi \cosh \alpha \pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.\end{aligned}\quad (16)$$

При опредѣленіи $\delta \varphi$ изъ ур. (8), произвольнаго постояннаго прибавлять не нужно, если интегралы беремъ между предѣлами

0 и φ , такъ какъ въ точкѣ A , при $\varphi=0$, необходимо имѣть $\delta\varphi=0$. Мы получаемъ:

$$k\delta\varphi = -a\varphi + \frac{d(\delta r)}{d\varphi} + \left(1 - \frac{k}{r}\right) \int_0^\varphi \delta r d\varphi,$$

откуда находимъ, что

$$k\delta\varphi = -a \left(1 + \frac{\frac{k}{r} - 1}{1 + \lambda^2} \right) \varphi + \frac{d(\delta r)}{d\varphi} + \left(\frac{B\alpha - A\beta}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \sin\beta\varphi \cosh\alpha\varphi - \frac{A\alpha + B\beta}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \cos\beta\varphi \sinh\alpha\varphi \right) \left(1 - \frac{k}{r} \right). \quad (17)$$

Здѣсь, на основаніи форм. (16), имѣемъ:

$$\frac{B\alpha - A\beta}{C} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cos\beta\pi \sinh\alpha\pi - 2\alpha\beta \sin\beta\pi \cosh\alpha\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad (18)$$

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C} = \frac{2\alpha\beta \cos\beta\pi \sinh\alpha\pi + (\alpha^2 - \beta^2) \sin\beta\pi \cosh\alpha\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Постоянное a , выражающееся на основаніи форм. (6) съ помощію неизвѣстныхъ напередъ силъ упругости L и N , можетъ быть опредѣлено на основаніи того условія, что въ точкѣ B (при $\varphi=\pi$) надо имѣть не только $\frac{d\delta r}{d\varphi} = 0$, но и $\delta\varphi=0$. Это даетъ намъ на основаніи форм. (17), (18) и (6):

$$a = \frac{2\alpha\beta C \left(1 - \frac{J}{Sr^2} \right)}{\pi \left(1 + \frac{\mu r}{ES} \right)} (\cosh^2\alpha\pi - \cos^2\beta\pi). \quad (19)$$

Что касается до произвольнаго постояннаго C , то для его опредѣленія слѣдуетъ выразить, что сумма проекцій силъ упру-

гости всѣхъ спицъ на вертикальный діаметръ колеса (взятый въ направленіи AB) равна силѣ давленія Q грунта на нижнюю точку B обода колеса:

$$\frac{Q}{2} = \mu \int_0^{\pi} \delta r \cos \varphi d\varphi = -\mu \int_0^{\pi} \frac{d(\delta r)}{d\varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

Подставляемъ сюда значеніе ζ изъ уравненія (13) и пользуемся формулами тригонометріи:

$$\sin \beta \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\cos(\beta - 1)\varphi - \cos(\beta + 1)\varphi),$$

$$\cos \beta \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\sin(\beta + 1)\varphi - \sin(\beta - 1)\varphi).$$

Получаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\mu C} = & \cos \beta \pi \sinh \alpha \pi \left\{ \int_0^{\pi} \cos(\beta - 1)\varphi \cosh \alpha \varphi d\varphi \right. \\ & - \int_0^{\pi} \cos(\beta + 1)\varphi \cosh \alpha \varphi d\varphi \left. \right\} - \sin \beta \pi \cosh \alpha \pi \left\{ \int_0^{\pi} \sin(\beta + 1)\varphi \sinh \alpha \varphi d\varphi \right. \\ & \left. - \int_0^{\pi} \sin(\beta - 1)\varphi \sinh \alpha \varphi d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Всѣ входящіе сюда интегралы могутъ быть взяты по форм. (14), замѣняя въ послѣднихъ β на $\beta + 1$ или на $\beta - 1$. Совершивъ такую операцію, получимъ:

$$\frac{Q}{\mu} = \frac{4\alpha\beta C}{(\alpha^2 + (\beta - 1)^2)(\alpha^2 + (\beta + 1)^2)} (\cosh^2 \alpha \pi - \cos^2 \beta \pi). \quad (20)$$

Соединеніе форм. (19) и (20) позволяет намъ выразить a съ помощію Q :

$$a = \frac{Q}{2\mu} \frac{(\alpha^2 + (\beta - 1)^2)(\alpha^2 + (\beta + 1)^2)}{\pi \left(1 + \frac{\mu r}{ES}\right)} \left(1 - \frac{J}{Sr^2}\right). \quad (21)$$

Эта величина даетъ намъ, на основаніи форм. (6), постоянный для всѣхъ сѣченій обода моментъ $L + Nr$ (моментъ силъ упругости относительно центра обода).

§ 4. Чтобы съ большею простотою выставить на видъ результаты нашего анализа, мы ограничимся въ дальнѣйшемъ изложеніи приближеніемъ, получающимся вслѣдствіе того, что при значительномъ радіусѣ r сравнительно съ радіусомъ инерціи площади сѣченія обода $\sqrt{\frac{J}{S}}$ и при легкомъ ободѣ величина λ^2 (отвлеченное число) выходитъ довольно большая.

Мы имѣемъ по форм. (6):

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon}{E} \frac{\sigma}{S} \frac{n}{2\pi} \frac{Sr^2}{J}. \quad (22)$$

Для велосипеднаго колеса съ радіальными спицами, находящагося у меня, можно положить:

$$n = 34$$

$$\varepsilon = E$$

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{\pi}{240}$$

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{J}{S}}} = 63.$$

Это даетъ:

$$\lambda^2 = 281,$$

$$\alpha = 2,8,$$

$$\beta = 3.$$

Замѣчая, что при указанномъ α величина $e^{-\alpha\pi}$ выходитъ чрезвычайно малой, мы будемъ отбрасывать члены упомянутого порядка малости. Это позволить намъ сейчасъ же упростить форм. (13). Такъ какъ по форм. (20) съ указаннымъ приближеніемъ

$$C = 4C'e^{-2\alpha\pi},$$

$$C' = \frac{Q}{2\mu} \frac{(\alpha^2 + (\beta + 1)^2)(\alpha^2 + (\beta - 1)^2)}{2\alpha\beta}, \quad (23)$$

то съ тѣмъ же приближеніемъ имѣемъ:

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = C'e^{-\alpha(\pi - \varphi)}(\sin\beta\pi\cos\beta\varphi - \sin\beta\pi\cos\beta\varphi) =$$

$$-C'e^{-\alpha(\pi - \varphi)}\sin(\pi - \varphi).$$

Будемъ отсчитывать полярный уголъ отъ нижней точки B , положивъ $\theta = \pi - \varphi$. Наше уравненіе при этомъ переменномъ приметъ видъ:

$$\frac{d(\delta r)}{d\theta} = C'e^{-\alpha\theta}\sin\beta\theta. \quad (24)$$

Отсюда легко опредѣлить выраженія для δr :

$$\delta r = \frac{a}{1 + \lambda^2} - \frac{C'}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha\theta}(\alpha\sin\beta\theta + \beta\cos\beta\theta),$$

что на основаніи форм. (12) можетъ быть еще упрощено:

$$\delta r = \frac{a}{1 + \lambda^2} - \frac{C'}{\sqrt{1 + \lambda^2}} e^{-\alpha\theta} \cos\left(\beta\theta - \frac{\psi}{2}\right). \quad (25)$$

Эта же самая формула получается и изъ уравненія (15). Для опредѣленія смѣщенія радіусовъ $\delta\theta$, которыя мы будемъ считать положительными при направленіи отъ B къ A , пре-

образуемъ форм. (17), принимая во вниманіе уравненія (18) и (12):

$$k\delta\theta = a \left(1 + \frac{\frac{k}{r} - 1}{1 + \lambda^2} \right) (\pi - \theta) + \frac{d(\delta r)}{d\theta} +$$

$$+ \frac{C' \left(\frac{k}{r} - 1 \right)}{1 + \lambda^2} e^{-\alpha\theta} \sin(\beta\theta - \psi). \quad (26)$$

Чтобы имѣть возможность опредѣлять всѣ упругія напряженія, развивающіяся въ ободѣ колеса, намъ еще нужно составить по форм. (24) и (25) выраженіе двучлена:

$$\frac{d^2(\delta r)}{d\theta^2} + \delta r = \frac{a}{1 + \lambda^2} +$$

$$+ C' e^{-\alpha\theta} \left(\cos\left(\beta\theta + \frac{\psi}{2}\right) \sqrt[4]{1 + \lambda^2} - \frac{\cos\left(\beta\theta - \frac{\psi}{2}\right)}{\sqrt[4]{1 + \lambda^2}} \right). \quad (27)$$

Теперь всѣ данныя для сужденія объ упругой деформаци и прочности колеса нами добыты.

§ 5. Формула (24) показываетъ, что, начиная отъ точки B , длины спиць идутъ, возрастая съ возрастаніемъ θ до $\theta = \frac{\pi}{\beta}$; при этомъ углѣ получается наиболѣе растянутая спица; потомъ длины спиць уменьшаются до значенія $\theta = \frac{2\pi}{\beta}$, гдѣ получается минимумъ длины; потомъ опять начинается возрастаніе до $\theta = \frac{3\pi}{\beta}$ и т. д. Изъ формулы (25), видно, что это періодическое измѣненіе идетъ съ быстрымъ затуханіемъ и величина δr стремится къ предѣлу:

$$\delta r_A = \frac{a}{1 + \lambda^2}.$$

Въ нижней точкѣ колеса B спица будетъ сжата потому, что деформация

$$\delta r_B = \frac{a}{1+\lambda^2} - \frac{C'}{\sqrt[4]{1+\lambda^2}} \cos \frac{\psi}{2} =$$

$$C' \sin \psi \cos \psi \left[\frac{1 - \frac{J}{Sr^2}}{\pi \left(1 + \frac{\mu r}{ES} \right)} - \sqrt{\frac{1}{2 \cos \psi} + \frac{1}{2}} \right]$$

отрицательна. При этомъ легко усмотрѣть, что и сумма $\delta r_A + \delta r_B$ отрицательна; такъ что весь вертикальный діаметръ колеса будетъ укороченъ.

Наибольшее удлиненіе спиць найдется, полагая въ форм. (25) $\theta = \frac{\pi}{\beta}$ и будетъ:

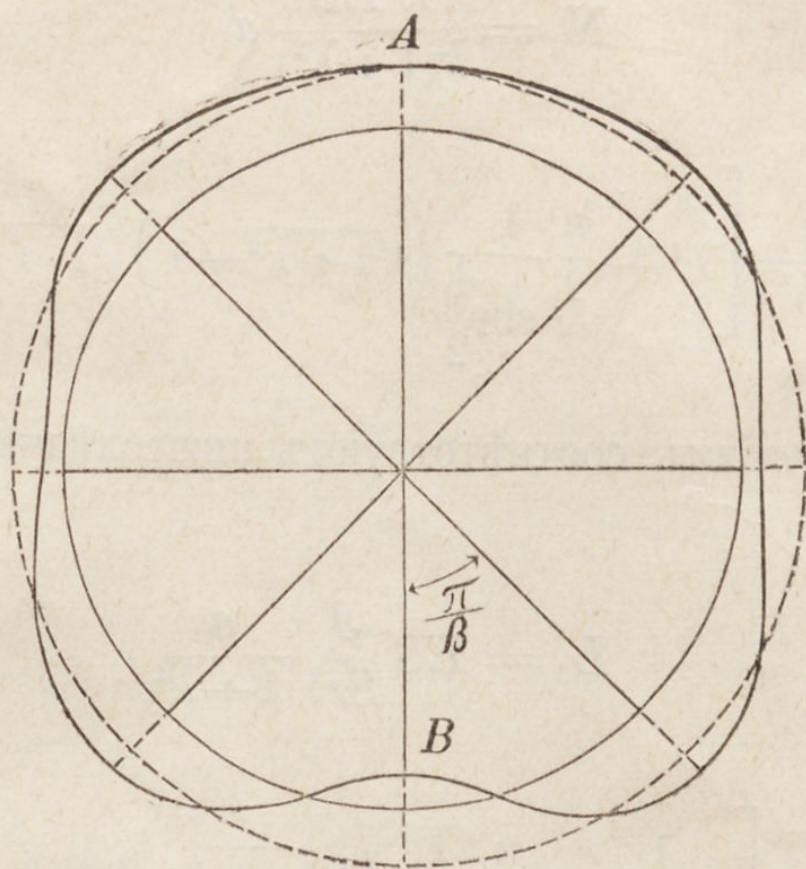
$$\delta r_{max} = \frac{a}{1+\lambda^2} + \frac{C'}{\sqrt[4]{1+\lambda^2}} \cos \frac{\psi}{2}. \quad (27)$$

По этой формулѣ мы должны рассчитывать степень прочности спиць при растяженіи. При

$$\theta = \frac{\pi + \psi}{2\beta}$$

удлиненіе радіуса совпадаетъ съ его предѣльнымъ значеніемъ δr_A и это повторяется чрезъ промежутки $\frac{\pi}{\beta}$. Видъ деформированнаго колеса на основаніи всего сказаннаго выше будетъ такой, какой изображенъ на фиг. (3) при β близкомъ къ 4. Внутренняя окружность проведена здѣсь радіусомъ r , а наружная (пунктирная) радіусомъ $r + \delta r_A$.

Можно сказать, что дѣйствіе нагрузки на ось велосипеднаго колеса вообще разгибаетъ его ободъ и увеличиваетъ радіусъ, хотя отъ нагрузки ось колеса и опускается книзу на $-\delta r_B$.



Фиг. 3.

Что касается до смѣщенія спиць, то, согласно форм. (26), оно не будетъ имѣть мѣста на вертикальномъ діаметрѣ. Начиная отъ нижняго вертикальнаго радіуса, оно будетъ идти, измѣняясь періодически, а потомъ начнетъ измѣняться пропорціонально $\pi - \theta$.

Разгибающая пара L и сжимающая сила N даны въ формулѣ (21) совмѣстно въ видѣ выраженія $L + Nr$ (см. форм. (6)).

Чтобы опредѣлить для каждаго сѣченія обода порознь L и N , составляемъ на основаніи форм. (8) выраженія:

$$ke = \frac{d^2(\delta r)}{d\theta^2} + \delta r - a,$$

которое по форм. (27) представится въ такомъ видѣ:

$$ke = -\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} a + \quad (28)$$

$$+ C'e^{-\alpha\theta} \left(\cos\left(\beta\theta + \frac{\psi}{2}\right) \sqrt[4]{1 + \lambda^2} - \frac{\cos\left(\beta\theta - \frac{\psi}{2}\right)}{\sqrt[4]{1 + \lambda^2}} \right).$$

Для верхней и нижней точки обода получаемъ добавочныя силы сжатія:

$$N_A = \frac{\lambda^2 ES}{k(1+\lambda^2)} a, \quad (29)$$

$$N_B = \frac{ESa}{k(1+\lambda^2)} \left[\lambda^2 - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \left(\sqrt{1+\lambda^2} - 1 \right) \sqrt{1+\lambda^2} \frac{1+\frac{\mu r}{ES}}{1-\frac{J}{Sr^2}} \right].$$

Этимъ давленіямъ соотвѣтствуютъ нижеслѣдующіе разгибающіе моменты:

$$L_A = ES \frac{J}{Sr^2} \frac{a}{1+\lambda^2}, \quad (30)$$

$$L_B = ES \frac{J}{Sr^2} a \left[\frac{1}{1+\lambda^2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \left(\sqrt{1+\lambda^2} - 1 \right) \sqrt{1+\lambda^2} \frac{1+\frac{\mu r}{ES}}{1-\frac{J}{Sr^2}} \right].$$

На основаніи сказаннаго, отъ значеній L_A и N_A будутъ мало отличаться величины L и N въ большей части обода колеса, вправо и влѣво отъ верхней точки A .



Сочиненія Н. Е. Жуковскаго.

1. Кинематика жидкаго тѣла.
2. Случай движенія жидкой площади по инерціи.
3. Sur la percussion des corps.
4. Къ вопросу о наибольшемъ ударѣ.
5. Sur un cas particulier de mouvement d'un point matérielle.
6. Связь между вопросами о движеніи матеріальной точки и о равновѣсіи гибкой нити.
7. Къ вопросу о движеніи матеріальной точки подъ притяженіемъ одного и двухъ центровъ.
8. Описаніе инструмента Кемпе для рѣшенія уравненій высшихъ степеней.
9. О реакціи втекающей и вытекающей жидкости.
10. О прочности движенія.
11. О вліяніи колебаній штатива на время качанія маятника.
12. О характеристическихъ функціяхъ Якоби и Гамильтона.
13. Приложение теоріи центровъ ускореній высшихъ порядковъ къ направляющему механизму Чебышева.
14. Упрощенное изложеніе Гауссова способа опредѣленія планетныхъ орбитъ.
15. Объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ въ жидкости.
16. О графическомъ рѣшеніи основнаго уравненія при вычисленіи планетныхъ орбитъ.
17. Геометрическое разъясненіе нѣкоторыхъ вопросовъ теоріи уравненій съ частными производными.
18. О началѣ наименьшаго дѣйствія.
Sur le principe de la moindre action.
19. Sur une démonstration nouvelle du théorème de Lambert.
20. Sur la construction des courbes syndynamiques et synchroniques.
21. Рѣшеніе одной задачи изъ теоріи кометъ.
22. Выводъ основныхъ формулъ теоріи упругости.
23. Объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ.
24. Объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ (статья вторая).
25. О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородною капельною жидкостью. (Удостоено Московскимъ Университетомъ въ 1886 г. преміи профессора Брашмана).
26. О реакціи втекающей и вытекающей жидкости (статья вторая).
27. О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ тѣлъ.
28. О движеніи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями.
29. Элементарная теорія гироскоповъ.

30. Теоретическое изслѣдованіе о движеніи подпочвенныхъ водъ.
 31. О вліяніи давленія на насыщенные водою пески.
 32. О формѣ судовъ.
 33. Объ артиллерійскихъ снарядахъ Шапеля.
 34. Ueber den mittelwerth des kinetischen Potentials.
 35. Къ теоріи летанія.
 36. Видоизмѣненія метода Кирхгоффа для опредѣленія движенія жидкости въ двухъ измѣреніяхъ при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока.
 37. О парадоксѣ Дюбюа.
 38. Приборъ для опредѣленія коэффиціента вязкости маслъ.
 39. Sur un appareil nouveau pour la determination des moments de l'inertie des corps.
 40. Условія конечности интеграловъ уравненія $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$.
 41. О пареніи птицъ.
 42. Опредѣленіе движенія жидкости при какомъ-нибудь условіи, данномъ на линіи тока.
 43. Рѣшеніе одной задачи гидростатики.
 44. Локсодромическій маятникъ Гесса.
 45. О гироскопическомъ шарѣ Д. К. Бобылева.
 46. Къ вопросу о давленіи діэлектрическаго газа въ электрическомъ полѣ.
 47. О скольженіи ремня на шкивахъ.
 48. Къ вопросу о разрѣзаніи вихревыхъ шнуровъ.
 49. О движеніи маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса.
 50. Геометрическая интерпретація разсмотрѣннаго С. В. Ковалевскою случая движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки.
 51. О крылатыхъ пропеллерахъ.
 52. О воздухоплаваніи. (Рѣчь, произнесенная на X-мъ съѣздѣ Естествоиспытателей и Врачей).
 53. О гибели воздухоплователя Отто Лилиенталя.
 54. О наивыгоднѣйшемъ углѣ наклона аэроплановъ.
 55. Über den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsröhren.
 56. Аналогія двухъ задачъ механики.
 57. Распредѣленіе давленій на нарѣзкахъ винта и гайки.
 58. Къ вопросу и величинѣ діаметра водонапорной колонны.
 59. О треніи жидкости при большой разности скоростей ея струй.
 60. О движеніи матеріальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы.
 61. Обобщеніе задачи Біяркнеса о гидродинамическихъ силахъ.
 62. Условіе равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося на неподвижную плоскость нѣкоторою площадкою.
 63. Модель маятника Гесса.
 64. Объ упругой оси турбины Лаваля.
 65. О прочности велосипеднаго колеса.
-