

133379

СВЕДЕНІЕ

А ДОМ
ВЫДАЕТСЯ

ДИНАМИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

О КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦѢПИ КЪ ЗА-
ДАЧАМЪ О РЫЧАГѢ.

ПАМЯТИ ДОРОГОГО УЧИТЕЛЯ,

Василія Яковлевича

Цингера.

Н. Е. Жуковскій.



МОСКВА.

Типографія Императорскаго Московскаго Университета.

1909.

СВЕДЕНІЕ

ДИНАМИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

О КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦѢПИ КЪ ЗАДАЧАМЪ О РЫЧАГАХЪ.

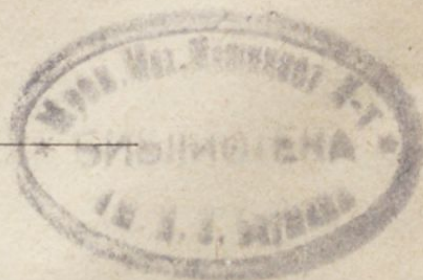
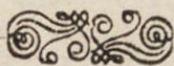
Провер. 1935

ПАМЯТИ ДОРОГОГО УЧИТЕЛЯ,
Василія Яковлевича
Цингера.

Н. Е. Жуковскій.

✓
ПРОВЕРЕНО
1945

ПРОВЕРЕНО
1952



МОСКВА.

Типографія Императорскаго Московскаго Университета.

1909.

СВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ О КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦѢПИ КЪ ЗАДАЧАМЪ О РЫЧАГѢ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Сообщено въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ 16 декабря 1908 г.).

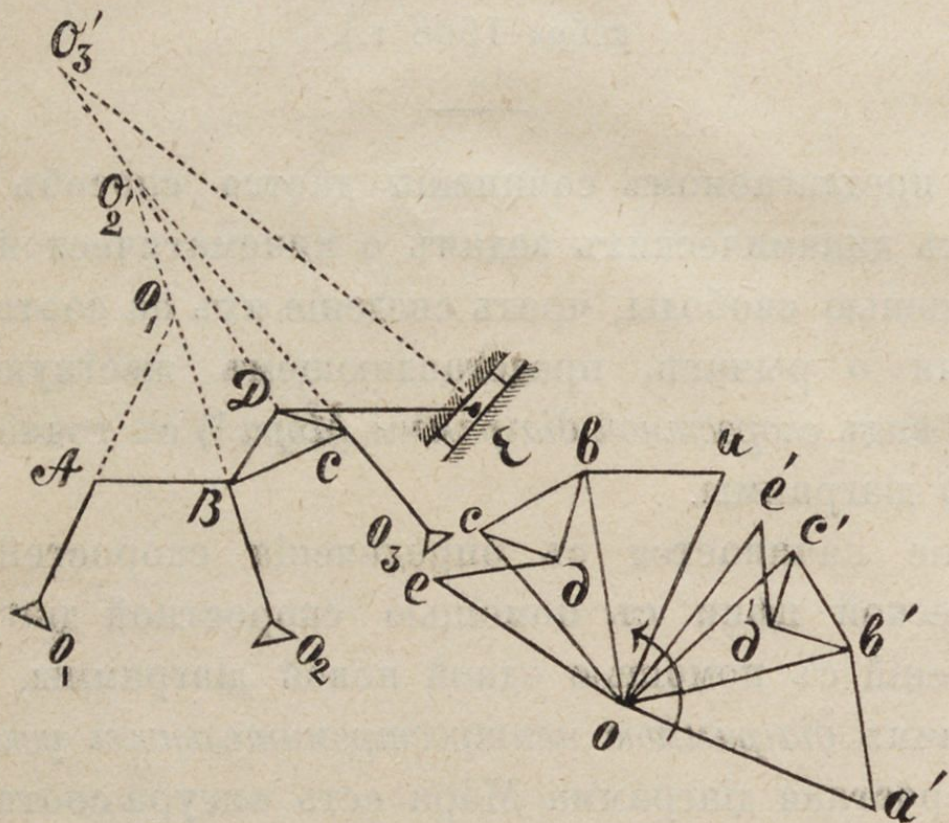
§ 1. Въ предлагаемомъ сочиненіи дается способъ рѣшенія различныхъ динамическихъ задачъ о кинематической цѣпи съ одною степенью свободы, чрезъ сведеніе ихъ на соотвѣтственные задачи о рычагѣ, представляющемъ жесткую ферму, имѣющую видъ скоростной діаграммы Мора ¹⁾ съ точкою опоры въ полюсѣ діаграммы.

Изложеніе начинается съ опредѣленія скоростей точекъ кинематической цѣпи съ помощью скоростной діаграммы и ихъ ускореній съ помощью одной новой діаграммы, которую мы называемъ *диаграммою центростремительныхъ ускореній*.

§ 2. Скоростная діаграмма Мора есть фигура соотвѣтственная данной кинематической цѣпи. Соотвѣтствіе устанавливается слѣдующимъ образомъ. Взявъ (фиг. 1) произвольный полюсъ o , проводимъ черезъ него векторъ oa' , геометрически равный скорости точки цѣпи A , и поворачиваемъ этотъ векторъ на прямой уголъ противъ часовой стрѣлки. Получимъ векторъ oa , конецъ a котораго будемъ звать изображеніемъ точки

¹⁾ Otto Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. Berlin 1906.

цѣпи A на скоростной діаграммѣ. Равнымъ образомъ точку A будемъ называть изображеніемъ точки a въ кинематической цѣпи. Фигура $oabcde$, представляющая изображенія точекъ $O_1O_2O_3O'_1O'_2O'_3ABCDE$ кинематической цѣпи и есть скоростная діаграмма Мора. При этомъ всѣ неподвижные центры вращенія O_1, O_2, O_3 и всѣ мгновенные центры вращенія O'_1, O'_2, O'_3 , считая ихъ присоединенными къ соответствующимъ звеньямъ, изображаются на этой діаграммѣ однимъ полюсомъ o . Скоростная діаграмма $abd\dots$ можетъ быть получена, построивъ сначала вспомогательную діаграмму $a'b'd'\dots$, а потомъ, повернувъ эту послѣднюю около полюса o на прямой уголъ въ сторону, обратную движенію часовой стрѣлки. Это замѣчаніе приводитъ насъ къ теоремѣ.



Фиг. 1.

Теорема I. Прямая bc , соединяющая двѣ какія-нибудь точки скоростной діаграммы, перпендикулярна къ относительной скорости точки цѣпи C относительно B ; при этомъ, если B и C лежатъ въ цѣпи на одномъ и томъ же твердомъ звенѣ, то $bc \parallel BC$ и отношеніе $bc : BC$ равно угловой скорости ω звена BC .

Справедливость теоремы видна изъ того, что $b'c'$ какъ прямая, соединяющая концы скоростей ob' и oc' точекъ цѣпи B и C , представляетъ скорость точки C относительно B , при чемъ

если звено BC твердое, то эта относительная скорость перпендикулярна BC и имѣетъ величину ωBC .

На основаніи доказанной теоремы заключаемъ, что фигура $B CD$, составленная изъ точекъ, лежащихъ на одномъ и томъ же твердомъ звенѣ, подобна соотвѣтственной фигурѣ bcd , при чемъ коэффициентомъ подобія является угловая скорость звена ω .

Само построение діаграммы $abd \dots$ дѣлается на основаніи теоремы I, не прибѣгая къ промежуточной діаграммѣ $a'b'd'$ Проводится изъ полюса o векторъ oa , параллельный 0_1A и равный скорости точки A ; потомъ проводится прямая ab параллельно AB и продолжается до пересѣченія съ прямой ob , параллельной 0_2B ; чрезъ точку b проводится прямая bc параллельно BC до пересѣченія съ прямой oc , параллельной 0_3C ; на bc строится треугольникъ bcd , подобный треугольнику $B CD$; чрезъ d проводится прямая de параллельно DE до пересѣченія съ прямой oe , перпендикулярной къ направляющимъ ползуна E .

Если къ кинематической цѣпи, скоростная діаграмма которой построена, присоединяются новыя точки, привязываемыя двумя стержнями къ двумъ точкамъ цѣпи или лежащія на муфтѣ, скользящей по звену цѣпи, соединяемой шатуномъ съ точкою другого звена цѣпи, то построение изображенія такихъ точекъ на скоростной діаграммѣ можетъ быть выполнено съ помощью проведенія черезъ изображенія двухъ точекъ цѣпи двухъ прямыхъ, перпендикулярныхъ къ относительнымъ скоростямъ новой точки цѣпи относительно этихъ двухъ старыхъ точекъ цѣпи. Это простое замѣчаніе служитъ основаніемъ къ разрѣшенію разнообразныхъ задачъ о скоростяхъ кинематическихъ цѣпей.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

На фигурѣ (2) представленъ направляющій механизмъ Поселье и его скоростная діаграмма. Докажемъ съ помощью этой діаграммы, что точка D движется по прямой, перпендикулярной 0_10_2 . Опустивъ изъ o перпендикуляры of и oh на dc и bc , усматриваемъ вслѣдствіе одинаковыхъ угловъ α подобіе:

$$\Delta ofc \propto \Delta oae,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

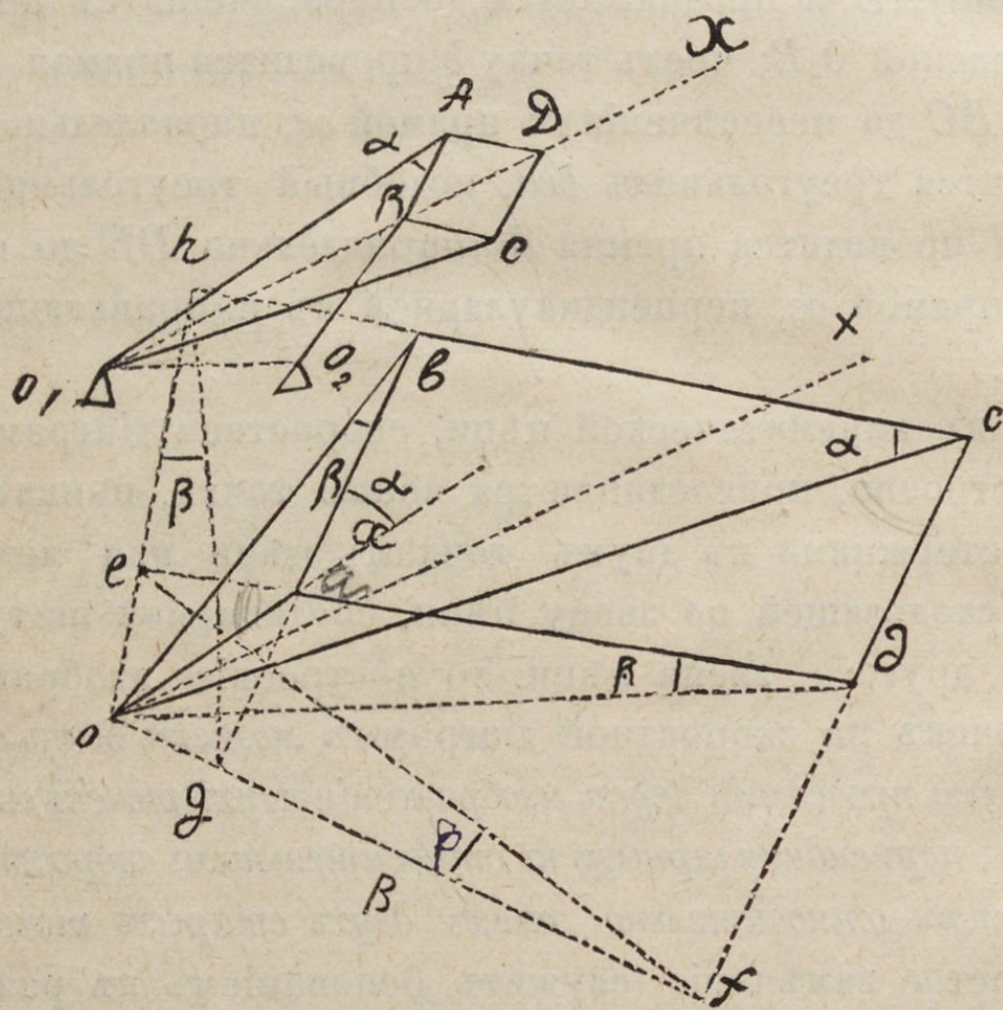
$$\frac{of}{oe} = \frac{oc}{oa}.$$

Такимъ же способомъ докажемъ, что

$$\frac{oh}{og} = \frac{oc}{oa}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{of}{oe} = \frac{oh}{og}.$$



Фиг. 2.

Эта пропорція обнаруживаетъ подобіе

$$\Delta oef \sim \Delta ogh,$$

изъ котораго слѣдуетъ равенство угловъ, обозначенныхъ на фигурѣ буквами β .

Прямая ox , проведенная на скоростной диаграммѣ параллельно прямой 0_1X , указанной пунктиромъ, дѣлитъ уголъ aoc пополамъ. Такъ какъ

$$\alpha - \beta = \angle aob = \angle cod,$$

то эта прямая дѣлитъ также и уголъ bod пополамъ.

Но уголъ box равенъ углу 0_1B0_2 , который, вслѣдствіе $0_2B=0_20_1$, равенъ углу 0_20_1B , поэтому

$$\angle xod = \angle X0_10_2.$$

Этимъ доказано, что скорость точки D при всякомъ положеніи механизма перпендикулярна 0_10_2 , т. е. точка D движется по прямой, перпендикулярной 0_10_2 .

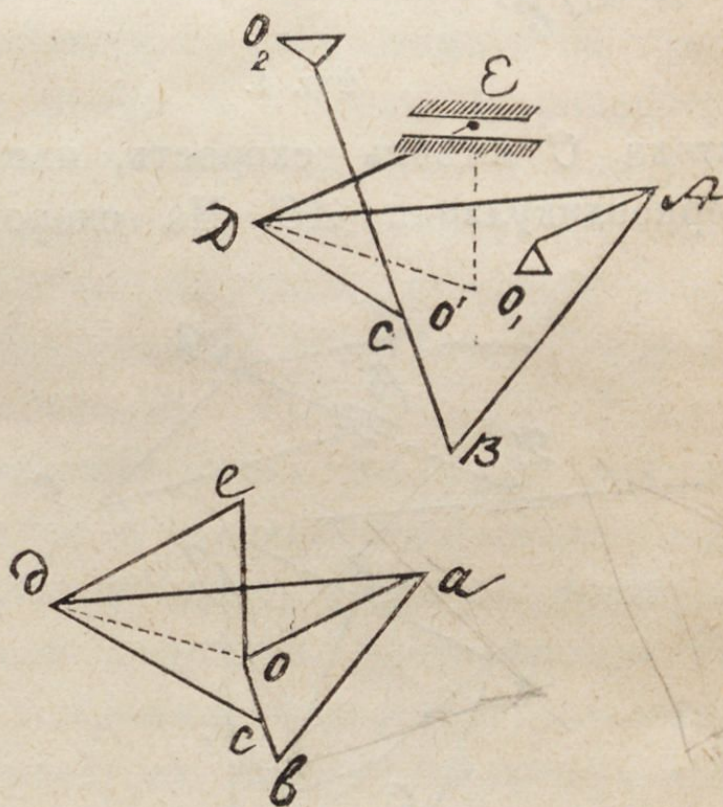
На фигурѣ (3) представленъ механизмъ Маркуса¹⁾ и его скоростная диаграмма.

Для полученія послѣдней надо вычертить сначала треугольникъ oab , стороны котораго параллельны соотвѣтственнымъ сторонамъ кинематической цѣпи. Потомъ надо на основаніи теоремы (I) раздѣлить отрезокъ ob въ отношеніи

$$\frac{oc}{cb} = \frac{0_2C}{CB}$$

и провести чрезъ точку c прямую $cd \parallel CD$, а чрезъ точку a —прямую $ad \parallel AD$.

Послѣ этого чрезъ полученную точку пересѣченія d надо

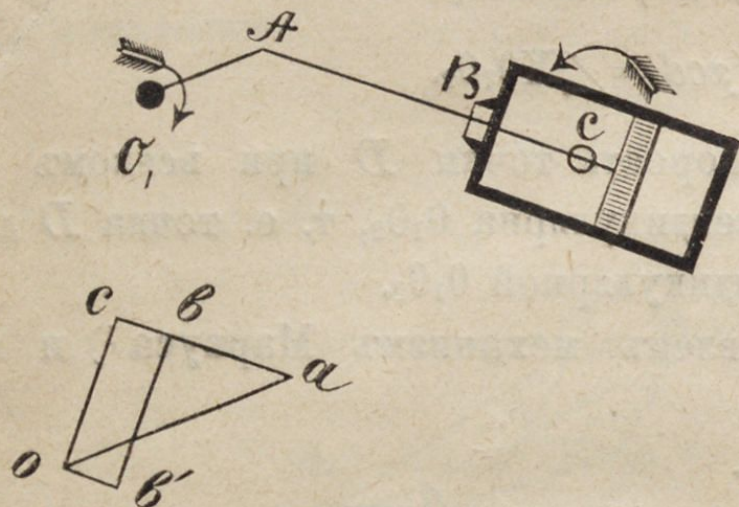


Фиг. 3.

¹⁾ Скоростная диаграмма этого механизма изслѣдована въ статьѣ Л. П. Смирнова „Кинематическое и динамическое изслѣдованіе многосвязныхъ шарнирныхъ механизмовъ“. Бюллетени Политехническаго Общества. 1908. № 6.

провести прямую $de \parallel DE$ до пересѣченія въ точкѣ e съ прямою oe , перпендикулярною къ направляющимъ ползуна E . Опредѣлимъ по скоростной діаграммѣ мгновенный центръ вращенія звена DE . Этотъ центръ будетъ изображеніемъ O' на звенѣ DE точки скоростной діаграммы o и получится, построивъ треугольникъ $DO'E$, подобный треугольнику doe .

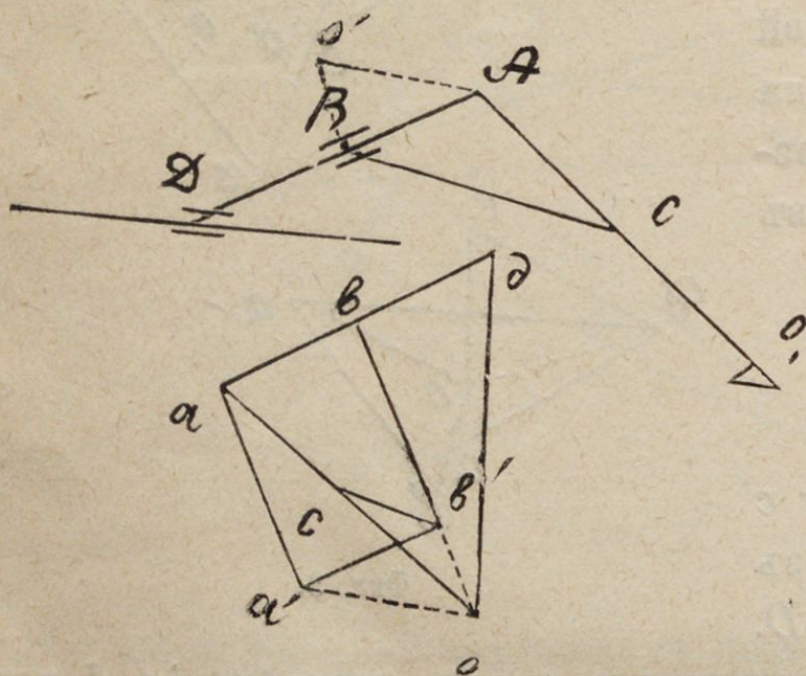
На фигурѣ (4) изображенъ механизмъ съ качающимся цилиндромъ и его скоростная діаграмма. Здѣсь a и c суть изображенія



Фиг. 4.

на скоростной діаграммѣ точки цѣпи A и точки штока C , лежащей противъ шипа, на которомъ качается цилиндръ; самый же шипъ изображается на скоростной діаграммѣ точкою o . Такъ какъ точка

штока C имѣетъ скорость, направленную по AC , то oc перпендикулярно AC . На скоростной діаграммѣ отмѣчена еще точка b , изображающая точку штока, лежащую противъ сальника B [$cb : ba =$



Фиг. 5.

$= CB : BA$]. Что касается до точки b' , представляющей на скоростной діаграммѣ сальникъ, то она строится съ помощью относительныхъ скоростей сальника относительно шипа и отно-

сительно точки штока, лежащей противъ сальника.

На фигурѣ (5) предлагается опредѣлить въ указанномъ механизмѣ съ двумя скользящими муфтами мгновенный центръ

муфты B съ помощью построения скоростной діаграммы. Отлагаемъ на прямой oa , параллельной O_1A , скорость точки A въ условленномъ масштабѣ и дѣлимъ oa въ отношеніи $oc : ca = O_1C : CA$.

Проводимъ $ad \parallel AD$ до пересѣченія въ точкѣ d съ прямою od , перпендикулярною направляющей муфты D . Дѣлимъ ad въ точкѣ b въ отношеніи $ab : bd = AB : BD$.

Точка b будетъ изображеніемъ на скоростной діаграммѣ точки шатуна AD , противъ которой лежитъ шипъ муфты. Точка b' , изображающая шипъ муфты, найдется, проводя перпендикуляры къ относительнымъ скоростямъ точки муфты B относительно точки шатуна B и точки C . Эта точка будетъ лежать на пересѣченіи перпендикуляра bb' къ прямой ad и линіи cb параллельной CB .

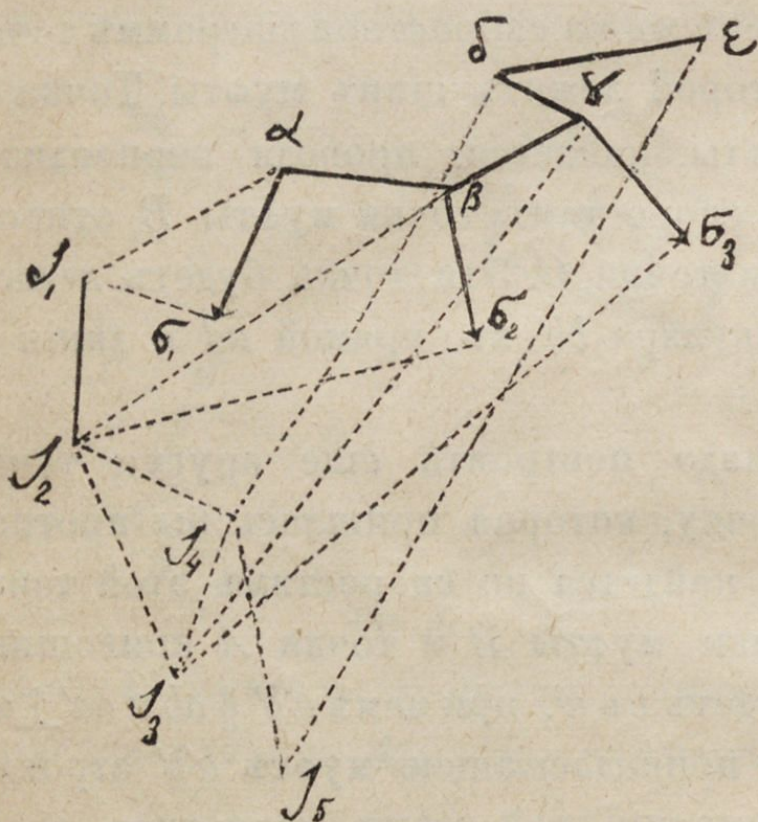
Для рѣшенія задачи надо построить еще другую точку муфты, напримѣръ, ту точку, которая пришлась бы противъ точки A . Ея изображеніе найдется по скоростямъ этой точки муфты относительно точки муфты B и точки A кривошипа AO_1 . Это изображеніе будетъ въ a' , при чемъ $a'b' \parallel ab$ и $aa' \perp ab$. Считая полюсъ o точкою, принадлежащею муфтѣ $a'b'$ строимъ его изображеніе въ кинематической цѣпи, начертивъ треугольникъ BAO' , подобный треугольнику $b'a'o$. Точка O' будетъ искомый центръ вращенія муфты B .

§ 3. Діаграммою центростремительныхъ ускореній мы называемъ фигуру, стороны которой параллельны соответственнымъ сторонамъ цѣпи и равны квадрату длины изображенія этихъ сторонъ на скоростной діаграммѣ, раздѣленному на длину сторонъ въ цѣпи. Для діаграммы центростремительныхъ ускореній цѣпи, представленной на фиг. (1) мы получаемъ длину стороны $\beta\gamma$ построениемъ дроби

$$\beta\gamma = \frac{bc^2}{BC};$$

аналогично и для всѣхъ другихъ сторонъ. При такомъ построении всѣ точки, лежащія на одномъ и томъ же твердомъ звенѣ, образуютъ въ діаграммѣ центростремительныхъ уско-

реній фигуру, подобную соотвѣтственной фигурѣ въ цѣпи съ коэффициентомъ подобія, равнымъ квадрату угловой скорости звена. При этомъ векторъ $\gamma\beta$ будетъ представлять центростремительное ускореніе точки C при ея вращеніи въ относительномъ движеніи относительно точки B ; векторъ же $\beta\sigma_2$ будетъ представлять абсолютное центростремительное ускореніе точки B относи-



Фиг. 6.

тельно неподвижной точки O_2 . Всѣ точки опоры цѣпи $O_1, O_2, \dots$ изображаются на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній отдѣльными точками $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

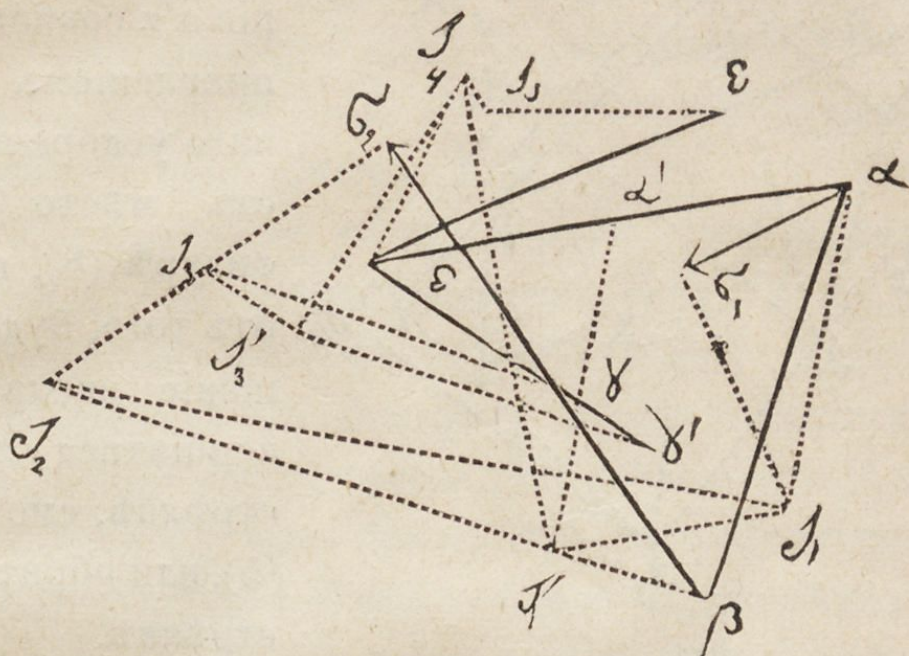
Если въ цѣпь прибавляется новая точка, которая привязывается двумя неизмѣнными тягами къ двумъ точкамъ цѣпи, не лежащимъ на одномъ твердомъ звенѣ, то, проведя на діаграммѣ

центростремительныхъ ускореній параллели этимъ тягамъ и отложивъ на нихъ отъ новой построенной точки относительныя центростремительныя ускоренія, мы, вообще говоря, не получимъ длинъ, равныхъ разстоянію вновь построенной на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній точки отъ изображеній точекъ, къ которымъ она присоединена. На фиг. (7) построена діаграмма центростремительныхъ ускореній механизма Маркуса, изображеннаго на фиг. (3). Построивъ часть діаграммы $\sigma_1\alpha\beta\gamma\sigma_2$ по вышеупомянутому правилу, присоединяемъ къ ней новую точку δ , являющуюся изображеніемъ на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній точки цѣпи D . Для этого проводимъ чрезъ точки γ и α прямыя: $\gamma\delta \parallel CD$, $\alpha\delta \parallel AD$, въ пересѣченіяхъ которыхъ будетъ точка δ . Отложивъ отъ этой точки по прямымъ $\delta\alpha$ и $\delta\gamma$ разстоянія

$$\delta\alpha' = \frac{da^2}{DA}, \quad \delta\gamma' = \frac{dc^2}{DC},$$

получимъ точки α' и γ' не совпадающія съ α и γ .

Эти точки α' и γ' мы будемъ разсматривать какъ изображенія точекъ A и C , отнесенныхъ къ звеньямъ DA и DC .



Фиг. 7.

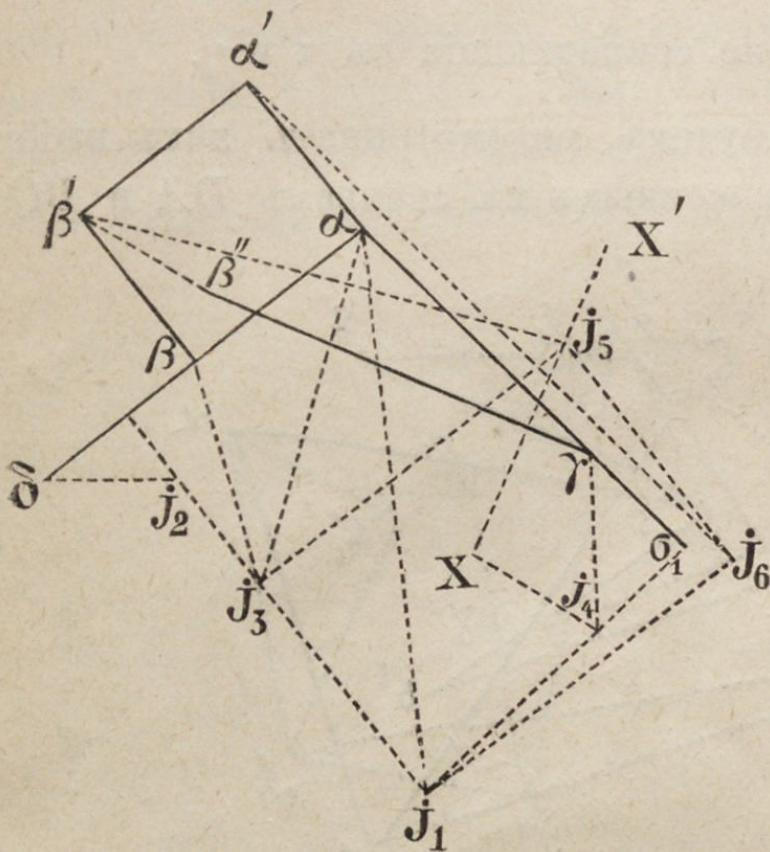
Окончаніе построения діаграммы центростремительныхъ ускореній для механизма Маркуса получится, проведя $\delta\epsilon \parallel DE$ и отложивъ

$$\delta\epsilon = \frac{de^2}{DE}.$$

Введемъ теперь условіе, по которому на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній слѣдуетъ строить изображеніе ползушекъ. Мы видѣли фиг. (5), что часть звена AB и часть скользящей по немъ муфты AB представляются на діаграммѣ скоростей отрѣзками прямыхъ ab и $a'b'$, образующихъ прямоугольникъ $abb'a'$, высота котораго bb' есть скорость скольженія муфты по звену. На діаграммѣ центростремительныхъ ускореній (фиг. 8) по найденному изображенію части звена $\beta\alpha$ мы будемъ строить изображеніе части муфты $\beta'\alpha'$ такъ, чтобы фигура $\beta\alpha\alpha'\beta'$ была прямоугольникомъ, имѣющимъ высоту

$$\beta\beta' = \frac{2ba \cdot bb'}{BA}.$$

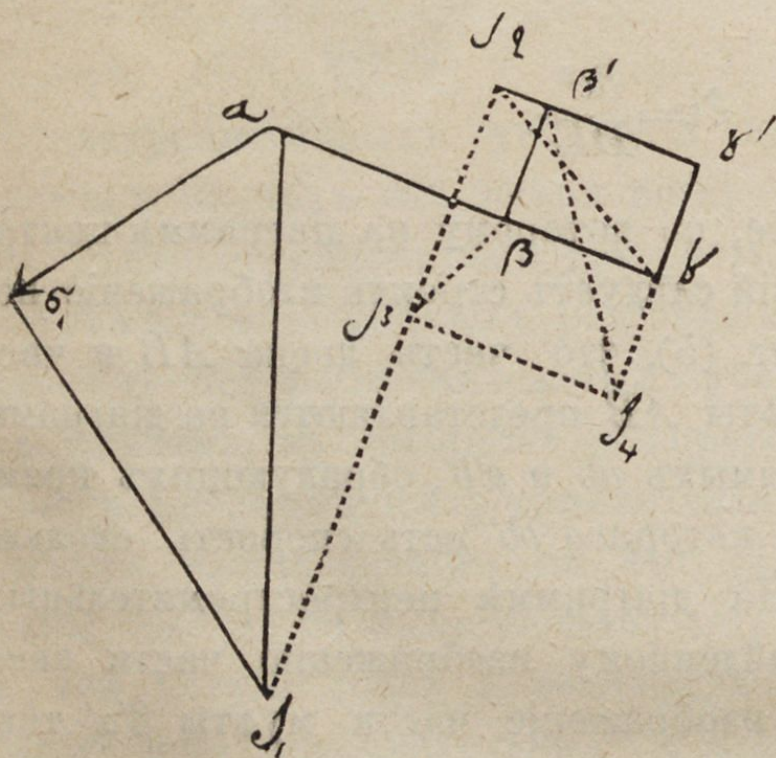
Легко усмотрѣть, что эта высота есть сложное центростремительное ускореніе (поворотное ускореніе) въ движеніи точки



Фиг. 8.

муфты B относительно звена AD . При этомъ точку α' надо отложить такъ, чтобы направленіе $\alpha'\alpha$ совпадало съ направлениемъ поворотнаго ускоренія, что имѣетъ мѣсто на нашей фигурѣ (8), независимо отъ того, будетъ ли вращеніе звена O_1A совершаться по часовой стрѣлкѣ, смотри на фиг. (5), или обратно часовой стрѣлкѣ.

Точно также въ механизмѣ, построенномъ на фиг. (4), въ діаграммѣ центростремительныхъ ускореній (фиг. (9)) цилиндръ, вдоль оси котораго



Фиг. 9.

скользить штокъ поршня, изображенъ прямою $\beta'\gamma'$, параллельною изображенію части штока $\beta\gamma$, при чемъ фигура $\beta\beta'\gamma'\gamma$ представляетъ прямоугольникъ съ высотой

$$\beta\beta' = \frac{2bc.bb'}{BC}.$$

Всѣ вопросы объ опредѣленіи ускореній точекъ кинематической цѣпи по ускоренію одной изъ точекъ ея рѣшаются съ помощью нижеслѣдующей простой теоремы.

Теорема II. Если чрезъ изображенія β и γ на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній двухъ точекъ кинематической цѣпи B и C (фиг. 6) проведемъ два вектора βj_2 и γj_3 , представляющіе ускореніе точекъ B и C , лежащихъ въ цѣпи на одномъ и томъ же твердомъ звенѣ, то прямая $j_2 j_3$, соединяющая концы этихъ векторовъ, перпендикулярна $\beta\gamma$. Фигура $j_2 j_3 j_4$, соединяющая концы ускореній однозвенныхъ точекъ B , C , D , проведенныхъ чрезъ точки β , γ , δ на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній, подобна фигурѣ $\beta\gamma\delta$.

Доказательство первой части теоремы находится, если сообразимъ, какъ получается ускореніе точки C по ускоренію точки B (фиг. 1). Надо взять фигуру (6) векторъ $\gamma\beta$, представляющій центростремительное ускореніе точки C относительно B , приложить къ нему геометрически ускореніе точки B , потомъ къ полученному вектору еще приложить геометрически тангенціальное ускореніе точки C относительно B ; такъ какъ это ускореніе нормально къ $\beta\gamma$, то конецъ искомаго вектора γj_3 будетъ лежать на перпендикулярѣ $j_2 j_3$ къ прямой $\beta\gamma$. Вторая часть теоремы есть прямое слѣдствіе первой, такъ какъ всякій треугольникъ $j_2 j_3 j_4$, входящій въ составъ фигуры, образованной концами ускореній трехъ точекъ, лежащихъ на одномъ звенѣ, будетъ съ перпендикулярными сторонами къ соотвѣтствующему треугольнику $\beta\gamma\delta$.

Приведенная теорема справедлива и для двухъ точекъ діаграммы центростремительныхъ ускореній, представляющихъ одну и ту же точку, отнесенную къ звену и къ скользящей по нему муфтѣ. На фиг. (8) ускореніе $\beta' j_5$ точки муфты B (фиг. 5) получается, сложивъ геометрически поворотное ускореніе $\beta'\beta$ точки муфты B относительно точки стержня B съ ускореніемъ βj_3 точки стержня B и съ нѣкоторымъ ускореніемъ скользящаго движенія муфты, которое параллельно $\beta\alpha$. Это показываетъ, что концы векторовъ $\beta' j_5$ и βj_3 представляющихъ ускоренія точекъ муфты B и точки B стержня, будутъ лежать на прямой $j_3 j_5$, перпендикулярной $\beta\beta'$.

На фиг. (6) для опредѣленія ускореній всѣхъ точекъ кинематической цѣпи по ускоренію αj_1 точки A надо: провести

j_1j_2 перпендикулярно $\alpha\beta$ до пересѣченія съ прямой σ_2j_2 , перпендикулярной $\beta\sigma_2$; построить треугольникъ $j_2j_3j_4$, стороны котораго перпендикулярны сторонамъ треугольника $\beta\gamma\delta$, и, наконецъ, провести прямую j_4j_5 , перпендикулярную $\delta\epsilon$, до пересѣченія въ точкѣ j_5 съ прямою ϵj_5 , параллельною направляющей ползуна ϵ . Векторы αj_1 , βj_2 , γj_3 , δj_4 , ϵj_5 будутъ ускоренія точекъ A , B , C , D , E данной кинематической цѣпи.

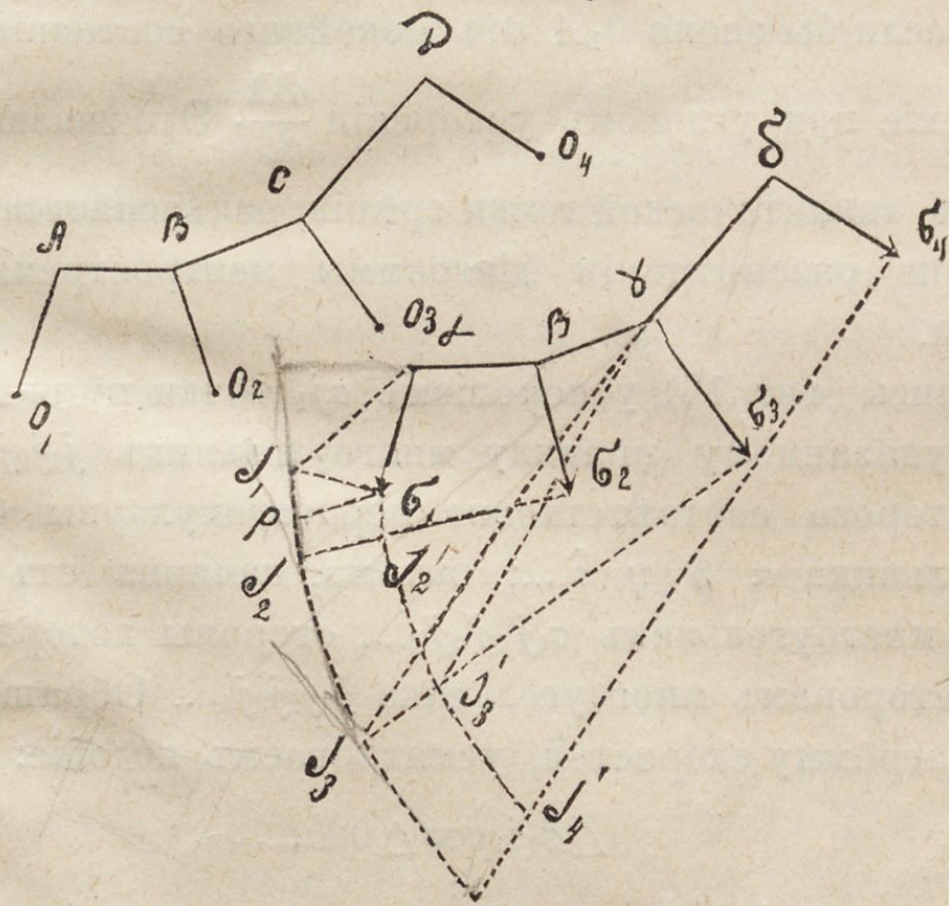
На *фиг. 7* для опредѣленія ускореній всѣхъ точекъ кинематической цѣпи по ускоренію αj_1 , точки A надо: провести j_1j_2 перпендикулярно $\alpha\beta$ до пересѣченія съ перпендикуляромъ σ_2j_2 къ $\beta\sigma_2$; чрезъ точку γ провести γj_3 параллельно βj_2 ; чрезъ γ' провести векторъ $\gamma'j'_3$, равный и параллельный вектору γj_3 , а чрезъ α' провести векторъ $\alpha'j'_1$, равный и параллельный вектору αj_1 ; чрезъ точки j'_3 и j'_1 надо провести прямыя j'_3j_4 и j'_1j_4 , соотвѣтственно перпендикулярныя прямымъ $\delta\gamma$ и $\delta\alpha$; чрезъ точку j_4 пересѣченія этихъ перпендикуляровъ провести прямую j_4j_5 , перпендикулярную $\delta\epsilon$ до пересѣченія съ прямою ϵj_5 , параллельною направляющей ползуна E . Векторы: αj_1 , βj_2 , γj_3 , δj_4 , ϵj_5 будутъ ускоренія точекъ A , B , C , D , E .

На *фиг. 8* для опредѣленія ускореній всѣхъ точекъ кинематической цѣпи по данному ускоренію αj_1 надо: чрезъ j_1 провести прямую j_1j_2 , перпендикулярную $\delta\alpha$, и чрезъ δ прямую δj_2 , параллельную направляющей муфты D ; прямую j_1j_2 раздѣлить въ точкѣ j_3 въ отношеніи $j_2j_3: j_1j_3 = \delta\beta : \beta\alpha$; чрезъ точку γ провести γj_4 , параллельную αj_1 чрезъ j_4 провести j_4x параллельно $\beta''\beta'$ и отложить на ней $j_4x = \beta'\beta''$; чрезъ x провести xx' перпендикулярно $\gamma\beta''$ и чрезъ j_3 провести j_3j_5 перпендикулярно $\beta\beta'$ до пересѣченія съ xx' въ точкѣ j_5 , наконецъ чрезъ j_5 проводимъ прямую j_5j_6 перпендикулярно $\beta'\alpha'$ до пересѣченія съ прямою j_1j_6 , перпендикулярной $\alpha'\alpha$, въ точкѣ j_6 . Векторы αj_1 , δj_2 , βj_3 , γj_4 , $\beta'j_5$, $\alpha'j_6$ будутъ ускоренія точекъ A , D , B , C механизма, изображеннаго на *фиг. (5)*, и точекъ B и A , отнесенныхъ къ муфтѣ этого механизма.

✓ На *фиг. (9)* для механизма съ качающимся цилиндромъ для опредѣленія ускореній всѣхъ точекъ по данному ускоренію точки A надо обратить вниманіе на то, что ускореніе точки

С цилиндра, представленной на диаграммѣ центростремительныхъ ускореній точкою γ' , есть нуль. Конецъ ускоренія точки C штока, изображенной точкою γ , долженъ лежать, съ одной стороны, на перпендикулярѣ $\gamma'j_2$ къ $\gamma'\gamma$ и, съ другой, — на перпендикулярѣ j_1j_2 къ прямой $\alpha\gamma$. Получивъ ускореніе γj_2 точки C штока, дѣлимъ отрѣзокъ j_1j_2 въ точкѣ j_3 въ отношеніи $j_1j_3 : j_3j_2 = \alpha\beta : \beta\gamma$; точка j_3 будетъ концомъ ускоренія βj_3 точки B штока. Конецъ j_4 ускоренія $\beta'j_4$ точки B салника найдется въ пересѣченіи прямой j_3j_4 , перпендикулярной $\beta\beta'$, и прямой $\gamma'j_4$, перпендикулярной $\beta'\gamma'$. Такимъ образомъ векторы αj_1 , γj_2 , βj_3 , $\beta'j_4$ представляютъ намъ ускоренія точки A , отнесенной къ штоку точки C , отнесенной къ штоку точки B и отнесенной къ цилиндру точки B .

§ 4. На основаніи теоремы II разрѣшаются разнообразныя вопросы, относящіеся къ ускореніямъ кинематическихъ



Фиг. 10.

цѣпей. Если цѣпь переходитъ въ данный моментъ въ движеніе отъ состоянія покоя, то ускоренія всѣхъ ея точекъ будутъ тангенціальныя и опредѣляются по скоростной диаграммѣ, при чемъ эту скоростную диаграмму мы строимъ въ

предположеніи, что нѣкоторое звено цѣпи $A0_1$, которое будемъ называть *главнымъ звеномъ* вращается съ угловою скоростью, равной единицѣ. Тогда (фиг. 1). ускореніе точки A будетъ перпендикулярно $A0_2$ и будетъ равно $\frac{d\Omega}{dt} A0_1 = \frac{d\Omega}{dt} a0$, ускореніе же точки B будетъ перпендикулярно $B0_2$ и будетъ равно $\frac{d\Omega}{dt} ob$, гдѣ $\frac{d\Omega}{dt}$ есть угловое ускореніе звена O_1A . Если угловыя скорости звеньевъ цѣпи въ начальный моментъ не равны нулю, то ускореніе каждой ея точки складывается геометрически изъ двухъ ускореній: изъ того ускоренія, которое имѣла бы рассматриваемая точка, если бы главное звено O_1A продолжало вращаться съ тою угловою скоростью, которую оно имѣетъ въ рассматриваемый моментъ времени и изъ того ускоренія, которое рассматриваемая точка получила бы, если бы звено O_1A отъ покойнаго состоянія перешло въ движеніе при угловомъ ускореніи $\frac{d\Omega}{dt}$. Это заключеніе, очевидное съ аналитической точки зрѣнія, разъясняется геометрически при разсмотрѣніи діаграммы центростремительныхъ ускореній.

Задавшись (фиг. 10) ускореніемъ αj_1 точки цѣпи A строимъ по вышеуказанному правилу многоугольникъ $j_1j_2j_3j_4\dots$, стороны которого соотвѣтственно перпендикулярны сторонамъ многоугольника $\alpha \beta \gamma \delta\dots$; потомъ, начиная отъ точки σ_1 , строимъ многоугольникъ $\sigma_1j'_2j'_3j'_4\dots$, стороны котораго параллельны сторонамъ многоугольника $j_1j_2j_3j_4\dots$. Обращая вниманіе на діаграмму скоростей, усматриваемъ подобіе:

$$\triangle \sigma_1 j_1 p \propto \triangle Oab,$$

при чемъ $\sigma_1 p \neq j'_2 j_2$, и подобіе является слѣдствіемъ перпендикулярности сторонъ. Изъ подобія имѣемъ пропорцію:

$$\frac{\sigma_1 j_1}{j'_2 j_2} = \frac{Oa}{Ob},$$

которая оправдываетъ сказанное, такъ какъ ускореніе $\gamma j'_3$, на примѣръ, складывается геометрически изъ ускоренія $\gamma j'_3$, ко-

торое имѣло бы мѣсто, если бы векторъ 0_1A вращался равномерно съ угловою скоростью Ω и изъ ускоренія $j_3j'_3$, пропорціональнаго os .

Будемъ называть ускоренія $\alpha\sigma_1, \beta j'_2, \gamma j'_3, \dots$ точекъ $A, B, C, D, \dots$ ускореніями, соотвѣтствующими перманентному движенію звена 0_1A или коротко *ускореніями перманентнаго движенія*¹⁾.

Для построенія перманентныхъ ускореній при главномъ звенѣ 0_1A , удобно строить діаграмму центростремительныхъ ускореній также, какъ мы раньше указали относительно скоростной діаграммы, т. е. въ предположеніи, что главное, звено имѣетъ угловую скорость равную единицѣ, какъ это сдѣлано на фиг. (11).

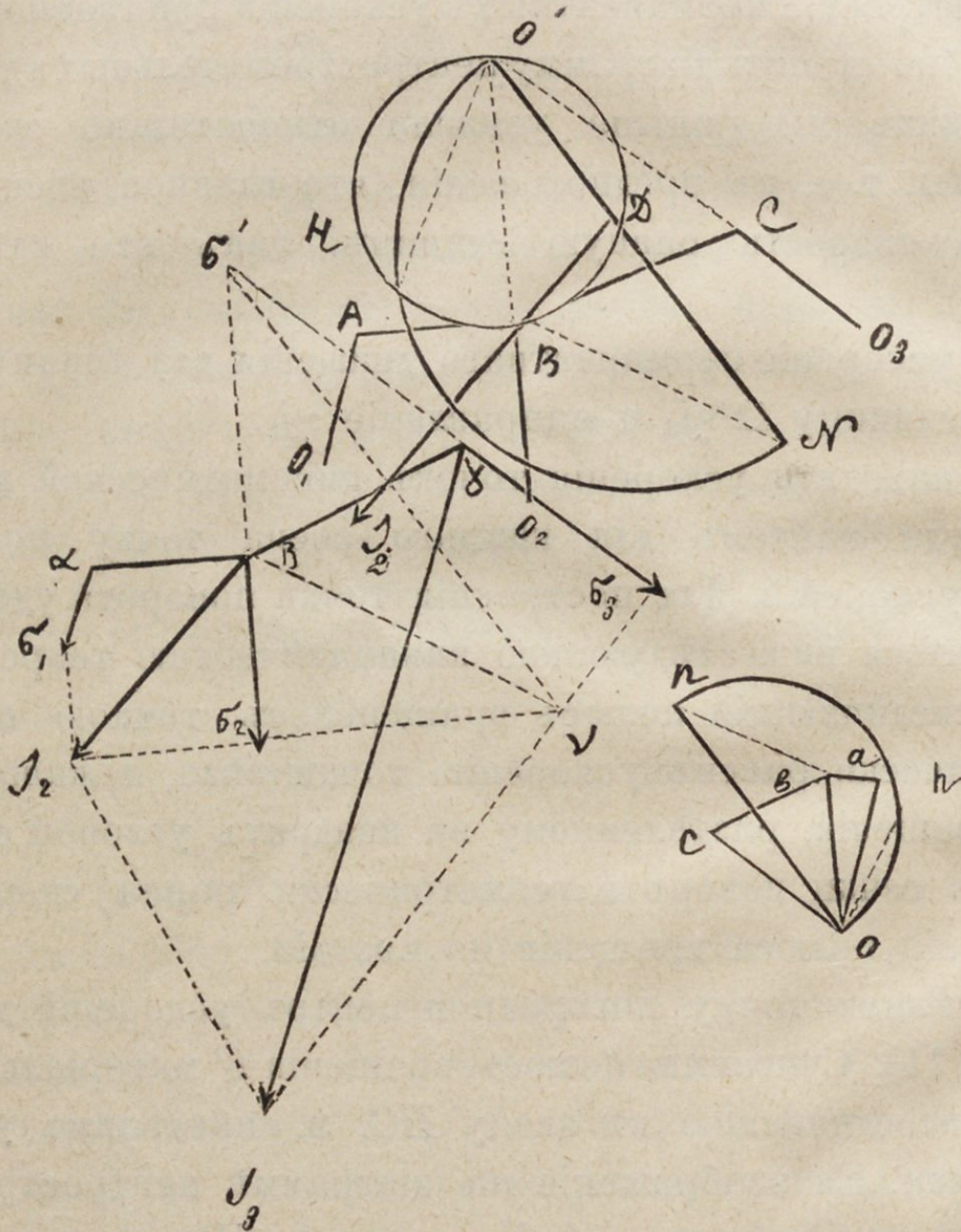
Тогда ускореніе перманентнаго движенія для точки C будетъ имѣть величину $\Omega^2\gamma j_3$ и направленіе γj_3 .

Умѣя находить ускоренія точекъ кинематической цѣпи, мы безъ труда найдемъ для каждаго звена точку поворота и центръ ускореній. Для построенія точки поворота удобно воспользоваться нижеслѣдующею кинематическою теоремою: Векторъ, соединяющій полюсъ вращенія съ точкою поворота, геометрически равенъ ускоренію точки тѣла, лежащей въ полюсѣ вращенія, раздѣленному на квадратъ угловой скорости; скорость точки поворота геометрически равна скорости передвиженія полюса вращенія по полюдіи.

Опредѣлимъ точку поворота и центръ ускореній для звена BC (фиг. 11). Считаемъ полюсъ вращенія $0'$ матеріальною точкою, присоединенною къ звену BC , и опредѣлимъ ускореніе этой точки. Ея изображеніе на діаграммѣ центростремительныхъ ускореній будетъ σ' . По теоремѣ (II) прямая j_2v и j_3v , соединяющія концы ускореній βj_2 и γj_3 точекъ B и C съ концомъ ускоренія $\sigma'v$ точки $0'$, должны быть перпендикулярны къ $\sigma'\beta$ и $\sigma'\gamma$. Отсюда слѣдуетъ, что точка v найдется въ пересѣченіи перпендикуляровъ возставленныхъ изъ σ_2 и σ_3 къ

¹⁾ Въ своемъ сочиненіи „Аналоги ускореній и ихъ примѣненіе къ расчету плоскихъ стержневыхъ системъ“, напечатанномъ въ Извѣстіяхъ Политехническаго Института за 1908 г., Л. В. Ассуръ рассматриваетъ такія же ускоренія и называетъ ихъ „аналогами ускореній“.

прямымъ $\beta\sigma_2$ и $\gamma\sigma_3$. Такимъ образомъ векторъ $\sigma'\nu\Omega^2$ будетъ ускореніемъ точки O' . Если построимъ на кинематической цѣпи треугольникъ $BO'N$, подобный треугольнику $\beta\sigma'\nu$, то найдемъ точку N , которая будетъ точкою поворота звена BC . Это слѣдуетъ изъ указанной кинематической теоремы. Мы имѣемъ $\Omega^2\sigma'\nu = O'N\omega^2$, гдѣ ω угловая скорость звена



Фиг. 11.

BC . Если раздѣлимъ векторъ $\Omega^2\sigma'\nu$ на ω^2 , то получимъ векторъ $O'N$, имѣющій на своемъ концѣ точку поворота N .

Рядомъ съ построеніемъ точки поворота на кинематической цѣпи намъ будетъ важно впослѣдствіи получить ея изображеніе на скоростной діаграммѣ. Это изображеніе n найдется, построивъ Δobn подобный $\Delta O'BN$. Векторъ on , на основаніи упомянутой кинематической теоремы, будучи повернутъ

на прямой уголъ вправо около точки o , даетъ намъ скорость перемѣщенія мгновеннаго центра O' по полюдіи.

Построивъ на діаметрѣ $O'N$ окружность $O'HN$, мы получимъ поворотный кругъ звена BC , на которомъ долженъ лежать центръ ускоренія этого звена. Мѣсто H этого центра ускоренія найдется какъ точка пересѣченія поворотнаго круга съ кругомъ, описаннымъ около треугольника $BO'D$, гдѣ $BD \parallel \beta j_2$. Справедливость этого построенія вытекаетъ изъ равенства:

$$\angle HO'N = \angle HBj_2.$$

Изображеніе поворотнаго круга на скоростной діаграммѣ найдется, построивъ окружность nho на діаметрѣ no , а изображеніе центра ускоренія будетъ точка h при условіи, что $\angle hon = \angle HO'N$. Зная центръ ускоренія H звена BC и ускореніе $\Omega^2 \sigma'v$ его точки O' , мы безъ труда построимъ ускореніе любой точки этого звена.

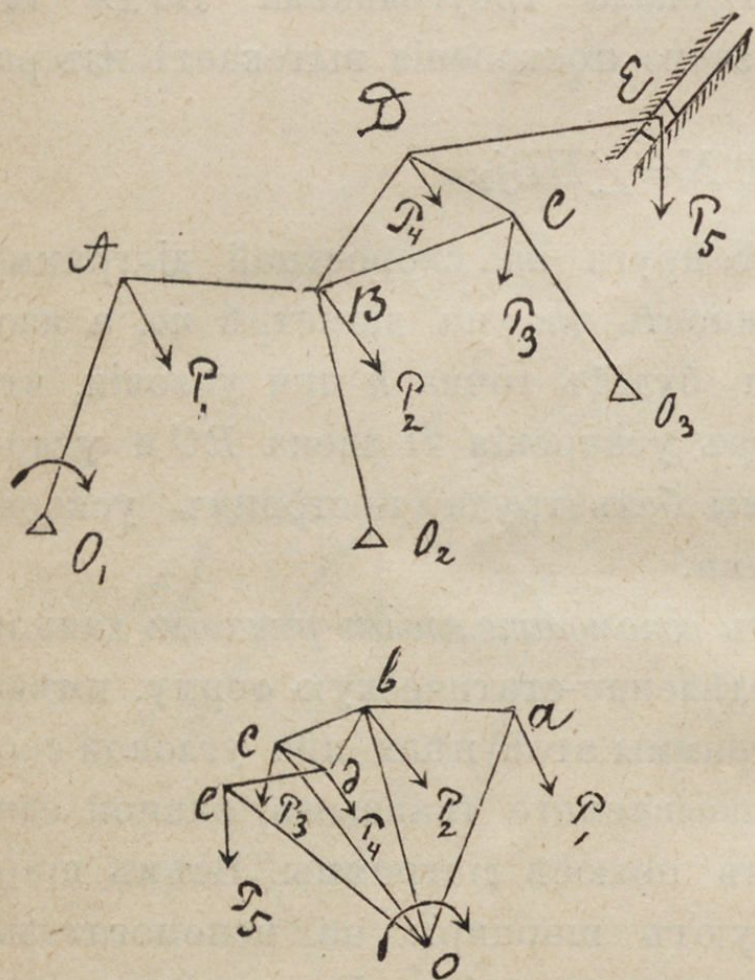
§ 5. Мы будемъ называть *вспомогательнымъ рычагомъ* данной кинематической цѣпи опредѣленно-статическую ферму, имѣющую видъ скоростной діаграммы этой цѣпи при угловой скорости нѣкотораго звена, называемаго главнымъ, равной единицѣ, съ точкою опоры въ полюсѣ діаграммы. Всѣмъ шарнирамъ цѣпи соотвѣтствуютъ шарниры на вспомогательномъ рычагѣ. Скользящія муфты цѣпи (фиг. 5) представляются на вспомогательномъ рычагѣ звеномъ $a'b'$ стержневого прямоугольника $aba'b'$ одна изъ вершинъ котораго b' привязана звеномъ $b's$ къ точкѣ s звена oa . На фиг. (12), представлена кинематическая цѣпь и ея вспомогательный рычагъ, при чемъ за главное звено взять стержень 0_1A , такъ что $oa = 0_1A$. Легко усмотрѣть, что при вращеніи вспомогательнаго рычага со скоростью Ω , соотвѣтствующей по величинѣ и направленію угловой скорости главнаго звена, всѣ точки вспомогательнаго рычага будутъ имѣть скорости, геометрически равныя скоростямъ точекъ цѣпи. Дѣйствительно, векторы $oa, ob, oc, \dots$ перпендикулярны скоростямъ точекъ $A_1B_1C, \dots$ и, будучи умножены на Ω станутъ равны этимъ скоростямъ.

Отсюда слѣдуетъ, что сообщая кинематической цѣпи безконечно малое перемѣщеніе, охарактеризованное безконечно малымъ перемѣщеніемъ δs точки A , и сообщая одновременно вспомогательному рычагу поворотъ $\delta\theta = \frac{\delta s}{O_1A}$, мы будемъ имѣть для всѣхъ точекъ цѣпи и для всѣхъ соотвѣтственныхъ

точекъ рычага геометрически равныя безконечно-малыя перемѣщенія.

Докажемъ теперь теорему.

Теорема III. Условіе равновѣсія кинематической цѣпи подъ эффектомъ приложенныхъ къ ней силъ можетъ быть замѣнено условіемъ равновѣсія вспомогательнаго рычага, находящагося подъ эффектомъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ соотвѣтственнымъ точкамъ. При этомъ упругія силы въ



Фиг. 12.

звеньяхъ цѣпи равны упругимъ силамъ въ соотвѣтственныхъ стержняхъ вспомогательнаго рычага.

Первая часть теоремы является очевидной изъ разсмотрѣнія условія равновѣсія въ формѣ Лагранжа:

$$\sum P \cos(P \delta s) \delta s = 0,$$

въ которомъ всѣ безконечно малыя перемѣщенія δs для кинематической цѣпи и вспомогательнаго рычага геометрически равны. Что касается до второй части, то мы убѣждаемся въ ея справедливости, дѣлая послѣдовательное разложеніе силъ $P_1, P_2, \dots$ на кинематической цѣпи и на вспомогательномъ

рычагѣ. При этомъ видимъ, что, если стержень рычага вращается въ ту же сторону, въ которую вращается звено цѣпи, то растяженіе или сжатіе стержня рычага соотвѣтствуютъ растяженію или сжатію звена цѣпи, но, если стержень вспомогательнаго рычага ab вращается въ сторону, обратную вращенію звена цѣпи AB , то сила растяженія стержня ab даетъ силу сжатія звена AB и наоборотъ. Что касается до силъ растяженія или сжатія стержня eo , то онѣ дадутъ намъ давленіе ползуна E на направляющія.

Переходимъ къ динамическому примѣненію теоремы вспомогательнаго рычага. Будемъ всѣмъ изображеніямъ на вспомогательномъ рычагѣ матеріальныхъ точекъ кинематической цѣпи приписывать такія же массы, какія имѣютъ эти точки въ кинематической цѣпи. Тогда при движеніи кинематической цѣпи и при вращеніи вспомогательнаго рычага со скоростью Ω , количества движенія точки цѣпи и соотвѣтственной точки вспомогательнаго рычага $m\Omega r$ будутъ геометрически равны, при чемъ r есть разстояніе массы m точки рычага отъ его точки опоры.

Докажемъ теорему:

Теорема IV. Живая сила кинематической цѣпи равна моменту инерціи вспомогательнаго рычага относительно его точки опоры, умноженному на половину квадрата угловой скорости главнаго звена. Сила, дѣйствующая на какую-нибудь точку покоящейся кинематической цѣпи сообщаетъ главному звену такое же угловое ускореніе, какое геометрически равная сила, приложенная къ соотвѣтственной точкѣ вспомогательнаго рычага сообщаетъ этому рычагу. Приведенная масса кинематической цѣпи въ данной ея точкѣ равняется моменту инерціи вспомогательнаго рычага, раздѣленному на квадратъ разстоянія соотвѣтственной точки отъ точки опоры вспомогательнаго рычага.

Доказательство первой части теоремы видно изъ равенства:

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{\Omega^2}{2} \sum mr^2,$$

гдѣ Ω угловая скорость главнаго звена, первая сумма относится ко всѣмъ матеріальнымъ точкамъ цѣпи, а вторая—ко всѣмъ соотвѣтственнымъ точкамъ вспомогательнаго рычага.

Для доказательства второй части теоремы предположимъ фиг. (12), что на кинематическую цѣпь и на вспомогательный рычагъ дѣйствуетъ только одна сила P_2 , при чемъ цѣпь и рычагъ въ начальный моментъ находятся въ покоѣ.

По теоремѣ живыхъ силъ имѣемъ для цѣпи:

$$P_2 \cos(P_2 ds_2) ds_2 = d \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Эту формулу на основаніи вышесказаннаго можно преобразовать такъ:

$$P_2 r_2 \Omega \sin(P_2 r_2) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Omega^2}{2} \sum mr^2 \right\}.$$

При составленіи производной по времени во второй части слѣдовало бы обратить вниманіе на измѣненія величинъ r вслѣдствіе измѣненія вида вспомогательнаго рычага, происходящаго отъ передвиженія точекъ цѣпи, но производная $\frac{d}{dt} \sum mr^2$ будетъ умножаться на малую величину второго порядка Ω^2 и можетъ быть отброшена. Мы получимъ

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{P_2 r_2 \sin(P_2 r_2)}{\sum mr^2},$$

что соотвѣтствуетъ угловому ускоренію вспомогательнаго рычага подѣ эффектомъ дѣйствующей на него силы P_2 . Последнюю формулу мы можемъ написать и въ такомъ видѣ:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{P_2 \sin(P_2 r_2)}{\left(\frac{\sum mr^2}{r_2^2} \right)},$$

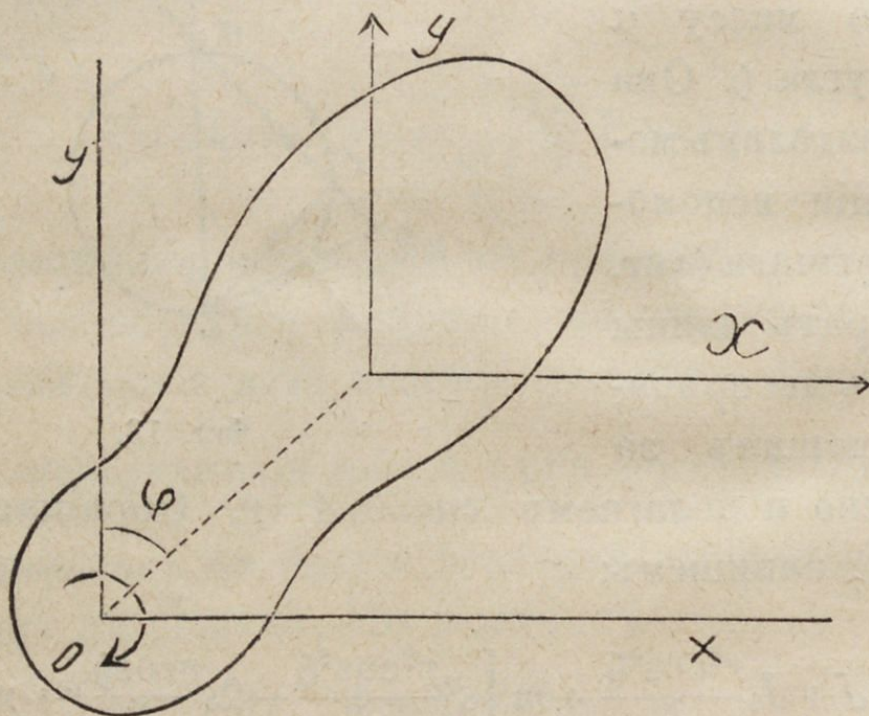
изъ котораго слѣдуетъ третья часть данной теоремы.

Для примѣра опредѣлимъ приведенную массу къ головкѣ кривошипа A въ механизмѣ съ качающимся цилиндромъ,

лѣвой стороны отъ этого положенія, тогда $\theta > \frac{\pi}{2}$ и въ выраженіи для δ членъ, прибавляющійся къ корню, будетъ положителенъ.

§ 6. Займемся теперь вопросомъ объ опредѣленіи времени малыхъ колебаній кинематической цѣпи около ея положенія равновѣсія. Рѣшеніе этой задачи имѣетъ существенное значеніе для изслѣдованія устойчивости кинематическихъ цѣпей, а также играетъ важную роль въ теоріи регуляторовъ.

Изслѣдуемъ сначала малыя колебанія физическаго маятника около положенія его равновѣсія (фиг. 14) подъ эффектомъ системы силъ.



Фиг. 14.

Дифференціальное уравненіе движенія будетъ имѣть видъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\sum(y'X' - x'Y')}{\sum mr^2},$$

гдѣ значекъ (') отмѣчаетъ величины координатъ и компонентъ силъ при весьма маломъ углѣ отклоненія φ маятника отъ положенія равновѣсія. Эти величины по ихъ значеніямъ въ положеніи равновѣсія, т. е. при $\varphi=0$, выражаются такъ:

$$x' = x + \varphi \cdot y,$$

$$y' = y - \varphi \cdot x,$$

$$X' = X + \frac{dX}{dx} y \varphi - \frac{dX}{dy} x \varphi,$$

$$Y' = Y + \frac{dY}{dx} y \varphi - \frac{dY}{dy} x \varphi,$$

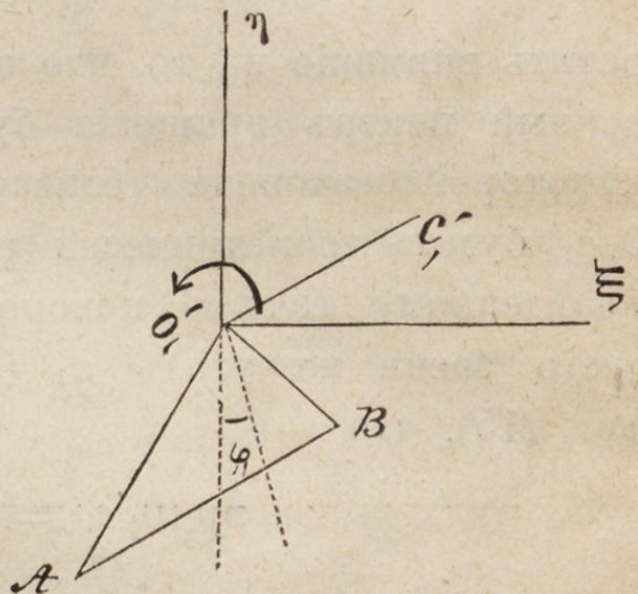
Подставляя эти величины въ уравненіе движенія и замѣчая, что $\Sigma(yX - xY) = 0$, находимъ:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \varphi \left\{ -\Sigma(xX + yY) + \Sigma \left(\frac{dX}{dx} y^2 + \frac{dY}{dy} x^2 - 2 \frac{dX}{dy} xy \right) \right\} \frac{1}{\Sigma m r^2},$$

при этомъ положено $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$. Если бы силы, дѣйствующія на матеріальныя точки маятника, сохраняли при различныхъ φ свою величину и направленіе, то члены, зависящіе отъ производныхъ компонентовъ силъ, были бы равны нулю и мы получили бы

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\varphi \frac{\Sigma(xX + yY)}{\Sigma m r^2}.$$

Обращаемся къ кинематической цѣпи и ея вспомогательному рычагу. Относимъ вспомогательный рычагъ къ осямъ xoy , имѣющимъ начало въ точкѣ опоры рычага, а каждое звено цѣпи къ особымъ осямъ, параллельнымъ вышеупомянутымъ осямъ, но имѣющимъ начало въ центрѣ вращенія соответственнаго звена. Напримѣръ (фиг. 15) звено AB мы относимъ къ осямъ $\xi\eta$, имѣющимъ начало въ центрѣ вращенія этого звена O_1' . Согласно теоремѣ живыхъ силъ для кинематической цѣпи напомнимъ:



Фиг. 15.

$$\Sigma \left\{ X' \left(\frac{d\xi}{dt} \right)' + Y' \left(\frac{d\eta}{dt} \right)' \right\} = \omega \left[\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 + \frac{\omega}{2} \frac{d}{dt} (\Sigma m r^2) \right].$$

Здѣсь X, Y суть проекціи силъ на оси Ox и Oy , которые тѣже, что проекціи силъ на оси ξ и η каждаго звена. Значекъ (') поставленъ, чтобы показать, что стоящія подъ первой суммою, величины берутся для смѣщенныхъ положеній звеньевъ. Такъ какъ мы рассматриваемъ малыя и медленныя колебанія кинематической цѣпи, то второй членъ во второй части формулы можно отбросить какъ малую величину порядка ω^3 . Составимъ выраженія, входящія въ первую часть равенства. По предыдущему имѣемъ:

$$X' = X - \frac{dX}{d\xi} \varphi_1 \eta + \frac{dX}{d\eta} \varphi_1 \xi = X + \left[\frac{dX}{d\xi} \eta - \frac{dX}{d\eta} \xi \right] \frac{\omega_1}{\omega} \varphi$$

$$Y' = Y + \left[\frac{dY}{d\xi} \eta - \frac{dY}{d\eta} \xi \right] \frac{\omega_1}{\omega} \varphi,$$

гдѣ чрезъ ω мы называемъ угловую скорость главнаго звена цѣпи O_1A (фиг. 12), а чрезъ ω_1 — угловую скорость звена AB , которой приписываемъ знакъ (—), такъ какъ звено AB вращается противъ стрѣлки часовъ, когда звено O_1A вращается по стрѣлкѣ часовъ. При составленіи $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)'$ и $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)'$ надо обратить вниманіе на то, что въ смѣщенномъ звенѣ AB мгновенный центръ вращенія будетъ уже не въ точкѣ O_1' а въ, нѣкоторой бесконечно близкой точкѣ c_1' ; при этомъ векторъ $O_1'c_1'$ будетъ геометрически равенъ бесконечно малому пути, пройденному точкою поворота N звена AB при вращеніи этого звена на уголъ φ_1 (см. § 4). Легко усмотрѣть на фиг. (15), что

$$np_{\xi}(O_1'c_1') = -\beta\varphi_1 = \beta \frac{\omega_1}{\omega} \varphi,$$

$$np_{\eta}(O_1'c_1') = \alpha\varphi_1 = -\alpha \frac{\omega_1}{\omega} \varphi,$$

гдѣ α и β суть координаты точки поворота N на осяхъ $\xi O_1', \eta$. Отсюда найдемъ:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)' = \frac{d\xi}{dt} - [\varphi_1 \xi - \alpha \varphi_1] \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + [\alpha - \xi] \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \frac{d\varphi}{dt} \varphi,$$

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)' = \frac{d\eta}{dt} + [-\eta\varphi_1 + \beta\varphi_1] \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + [\beta - \eta] \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \frac{d\varphi}{dt} \varphi.$$

Найденныя нами величины слѣдуетъ подставить въ равенство живыхъ силъ, воспользоавшись при этомъ уравненіемъ равновѣсія:

$$\sum \left(X \frac{d\xi}{dt} + Y \frac{d\eta}{dt} \right) = 0.$$

и равенствами:

$$\frac{d\xi}{dt} = - \frac{d\varphi_1}{dt} \eta = - \frac{\omega_1}{\omega} \omega \eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} \xi = - \frac{\omega_1}{\omega} \omega \xi.$$

Получимъ послѣ отбрасыванія малыхъ величинъ третьяго порядка и небольшихъ преобразованій:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varphi}{\sum m r^2} \left\{ \sum (X(\alpha - \xi) + Y(\beta - \eta)) \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2 + \right. \\ \left. + \sum \left(\frac{dX}{d\xi} \eta^2 + \frac{dY}{d\eta} \xi^2 - 2 \frac{dX}{d\xi} \eta \xi \right) \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Правило построенія вспомогательнаго рычага показываетъ, что между координатами ξ_i, η_i точекъ кинематической цѣпи и координатами x, y ихъ изображеній на вспомогательномъ рычагѣ существуетъ простая связь:

$$x_i = \frac{\omega_i}{\omega} \xi_i, \quad y_i = \frac{\omega_i}{\omega} \eta_i$$

$$a_i = \frac{\omega_i}{\omega} \alpha_i, \quad b_i = \frac{\omega_i}{\omega} \beta_i$$

при этомъ скорости ω_i приписывается знакъ (+), если вращеніе звена совершается въ ту же сторону, въ какую совершается вращеніе главнаго звена, и знакъ (—) въ обратномъ случаѣ. Въ вышеприведенныхъ формулахъ написаны также соотношенія между координатами α_i, β_i точки поворота и ко-

ординатами a_i, b_i изображенія точки поворота на вспомогательномъ рычагѣ. Будемъ вмѣсто силъ съ компонентами X_i, Y_i , дѣйствующихъ на точки кинематической цѣпи разсматривать силы съ компонентами $(X_i), (Y_i)$, приложенныя къ соотвѣтственнымъ точкамъ вспомогательнаго рычага, причемъ

$$(X_i) = \frac{\omega_i}{\omega} X_i, \quad (Y_i) = \frac{\omega_i}{\omega} Y_i.$$

Эти силы будемъ звать изображеніями на вспомогательномъ рычагѣ данныхъ силъ кинематической цѣпи. Пользуясь указанными обозначеніями можемъ написанное равенство представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\varphi}{\sum mr^2} \left[\sum \{ (X)(a-x) + (Y)(b-y) \} + \right. \\ \left. + \sum \left\{ \frac{d(X)}{dy} y^2 + \frac{d(Y)}{dx} x^2 - 2 \frac{d(X)}{dy} xy \right\} \right].$$

Сравнивая эту формулу съ вышеприведенной формулою колебанія сложнаго маятника, составимъ для обѣихъ формулъ соотвѣтственныя длины маятниковъ L_0, L :

$$L_0 = \frac{g \sum mr^2}{\sum (xX + yY) - \sum \left(\frac{dX}{dx} y^2 + \frac{dY}{dy} x^2 - 2 \frac{dX}{dy} xy \right)},$$

$$L = \frac{g \sum mr^2}{\sum \{ (X)(x-a) + (Y)(y-b) \} - \sum \left(\frac{d(X)}{dx} y^2 + \frac{d(Y)}{dy} x^2 - 2 \frac{d(X)}{dy} xy \right)}$$

гдѣ g ускореніе отъ дѣйствія тяжести.

Выраженіе L сравнительно съ L_0 приводитъ насъ къ теоремѣ.

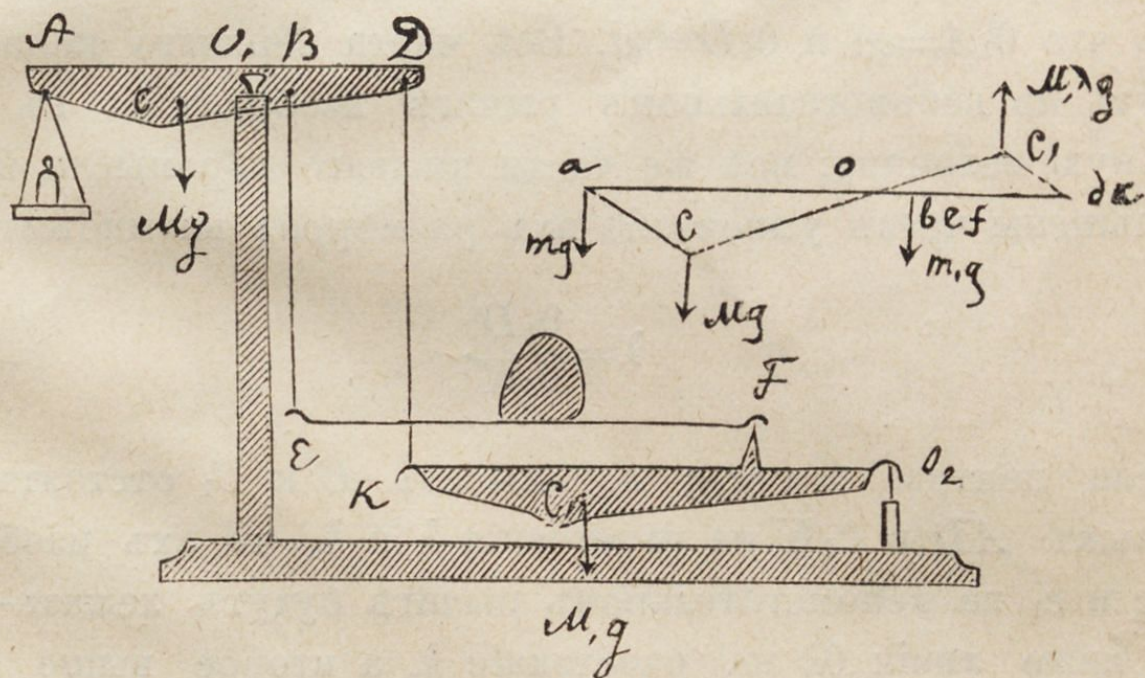
Теорема V. Длина математическаго маятника, соотвѣтствующаго данной кинематической цѣпи, определяется какъ относящаяся къ физическому маятнику, представляющему вспомогательный рычагъ подѣ дѣйствіемъ двухъ группъ силъ:

1) силъ, представляющихъ изображенія на вспомогательномъ рычагѣ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ кинематической цѣпи;

2) силъ, равныхъ и противоположныхъ по направленію равнодѣйствующимъ изображеній всѣхъ силъ для каждаго звена, приложенныхъ въ изображеніяхъ точекъ поворота звеньевъ.

§ 7. Приложимъ теорему V къ тремъ примѣрамъ. При этомъ будемъ на вспомогательномъ рычагѣ обозначать соотвѣтственные точки малыми буквами, какъ это дѣлали на скоростной діаграммѣ, полагая $\omega=1$ для главнаго звена, т. е. принимая изображеніе главнаго звена на вспомогательномъ рычагѣ, равнымъ длинѣ звена на цѣпи.

На фиг. 16. изображена схема десятичныхъ вѣсовъ и соотвѣтственнаго вспомогательнаго рычага. Опорные центры



Фиг. 16.

θ_1 и θ_2 изображаются на вспомогательномъ рычагѣ точкою o; точки вѣсовъ B, E, F и всѣ точки платформы и взвѣшиваемого тѣла осуществляются на вспомогательномъ рычагѣ одною точкою (bef); точки D и K сливаются на вспомогательномъ рычагѣ въ точку (dk). Это послѣднее обстоятельство получается по той причинѣ, что тяга DK вертикальна;

сліяніе же точки f съ точкою (be) происходитъ вслѣдствіе извѣстнаго условія въ конструкціи вѣсовъ:

$$\frac{0_1 D}{0_1 B} = \frac{0_2 K}{0_2 F},$$

вслѣдствіе котораго платформа движется поступательно.

Центры тяжести C и C_1 верхняго и нижняго коромысла вѣсовъ представятся на вспомогательномъ рычагѣ точками c , c_1 . Такъ какъ всѣмъ матеріальнымъ точкамъ кинематической цѣпи соотвѣтствуютъ на вспомогательномъ рычагѣ точки равныхъ массъ и онѣ подобно расположены въ каждомъ звенѣ и его изображеніи, то c и c_1 будутъ центры тяжести изображеній верхняго и нижняго коромысла. Массы изображеній нижняго и верхняго коромысла будутъ равны массамъ M и M_1 этихъ коромыселъ. Мы принимаемъ за главное звено цѣпи $A0_1$, такъ что $0_1 A = oa$ и $0_1 D = od$. Всѣ части верхняго коромысла будутъ на вспомогательномъ рычагѣ изображены въ натуральную величину; всѣ же части нижняго коромысла будутъ уменьшены чрезъ умноженіе ихъ размѣровъ на множитель

$$\lambda = \frac{0_1 D}{0_2 K}.$$

Если центры тяжести коромыселъ C и C_1 отстоятъ отъ прямыхъ AD и $0_2 K$ на разстоянія h и h_1 , то ихъ изображенія c и c_1 на вспомогательномъ рычагѣ будутъ лежать—первое ниже линіи Ok на разстояніе h , а второе выше ея на разстояніе λh_1 .

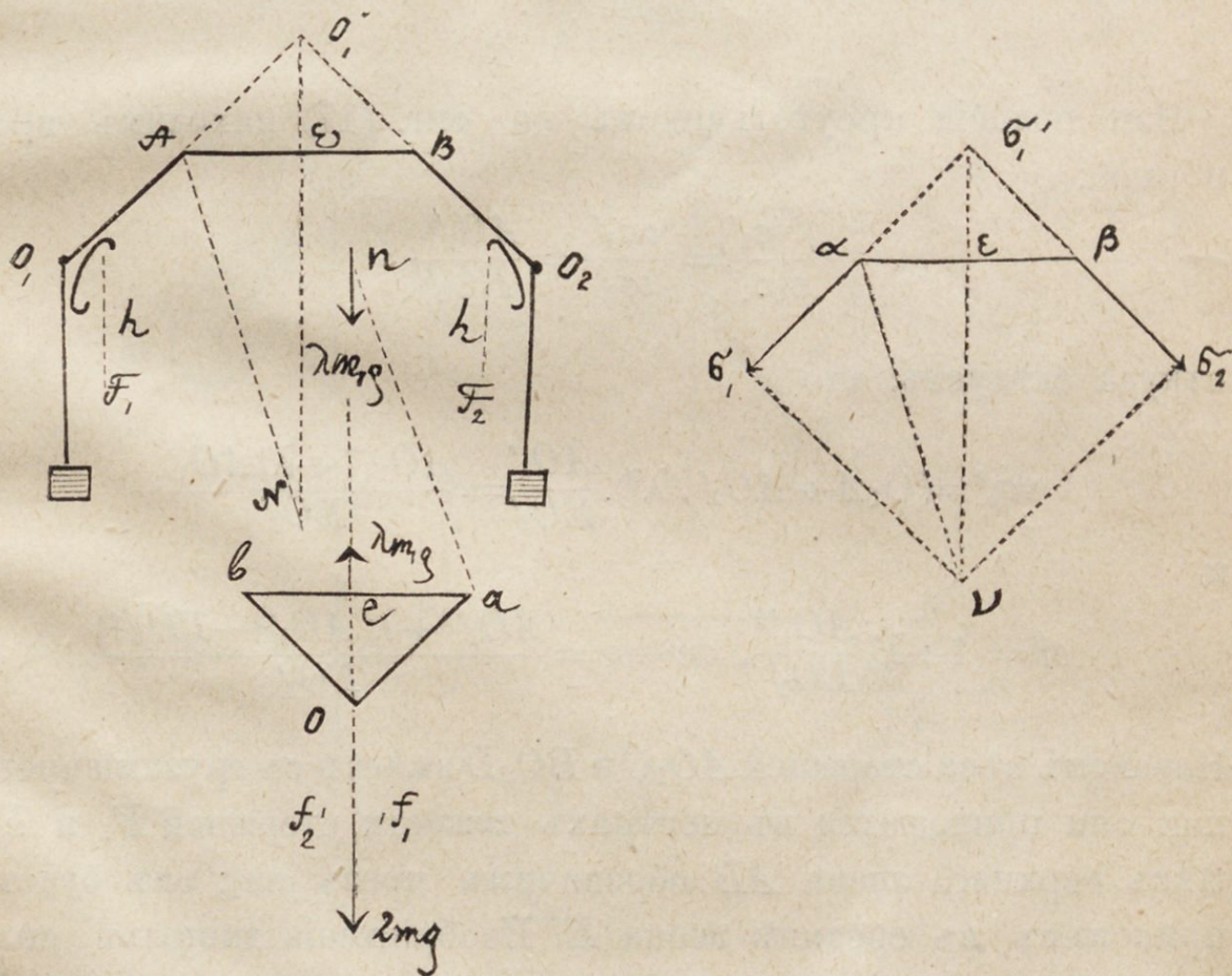
Если моменты инерціи верхняго коромысла относительно центра 0_1 и нижняго—относительно центра 0_2 суть J и J_1 , то моменты инерціи изображеній этихъ коромыселъ относительно o на вспомогательномъ рычагѣ будутъ J и $\lambda^2 J_1$. Силамъ Mg и $M_1 g$, дѣйствующимъ на коромысла, будутъ соотвѣтствовать во вспомогательномъ рычагѣ слѣдующія изображенія: сила Mg , направленная внизъ, и сила $M_1 g \lambda$, направленная вверхъ. Назовемъ массу гирь и чашки вѣсовъ

чрезъ m , а массу взвѣшиваемаго груза, платформы и вертикальныхъ тягъ чрезъ m_1 и замѣтимъ, что вслѣдствіе того, что угловая скорость всѣхъ упомянутыхъ тѣлъ равна нулю изображенія силъ, дѣйствующихъ на эти тѣла на вспомогательномъ рычагѣ, суть нули. По теоремѣ V найдемъ длину математическаго маятника, колеблющагося одновременно съ десятичными вѣсами, въ слѣдующемъ видѣ:

$$L = \frac{J + \lambda^2 J_1 + m A O_1^2 + m_1 B O_1^2}{M h + M_1 \lambda^2 h_1}.$$

Любопытно замѣтить, что эта длина не зависитъ отъ высоты взвѣшиваемаго тѣла.

На фиг. 17 представлена находящаяся подъ дѣйствіемъ тяжести кинематическая цѣпь $O_1 A B O_2$, съ опорными центрами



Фиг. 17.

O_1 и O_2 . Звенья $O_1 A$ и $O_1 B$ равны между собою и жестко соединены съ равными стержнями обремененными грузами. Въ положеніи равновѣсія весь аппаратъ симметрично распо-

ложенъ относительно средней вертикальной линіи. Строимъ вспомогательный рычагъ, принимая звено O_1A за главное. При этомъ $oa=ob=O_1A$, $ab=\lambda AB$, гдѣ

$$\lambda = \frac{AO_1}{AO_1'}.$$

Для построения точекъ поворота строимъ еще діаграмму центростремительныхъ ускореній, въ которой $\alpha\sigma_1=\beta\sigma_2=AO_1$ и $\alpha\beta=AB\lambda^2$. Если возстановимъ изъ точекъ σ_1 и σ_2 нормали къ $\alpha\sigma_1$ и $\beta\sigma_2$ до ихъ пересѣченія въ точкѣ ν , то изображеніе ν точки поворота звена AB на вспомогательномъ рычагѣ найдется, проведя векторъ on , параллельный $\sigma_1'\nu$ и имѣющій величину:

$$on = \frac{\nu\sigma_1'}{\lambda}.$$

Изъ подобія треугольниковъ на фиг. (17) находимъ пропорцію:

$$\frac{\nu\sigma_1'}{\sigma_1\sigma_1'} = \frac{\alpha\sigma_1'}{\varepsilon\sigma_1'} = \frac{AO_1'}{EO_1'},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\nu\sigma_1' = (O_1A + AO_1' \cdot \lambda^2) \cdot \frac{AO_1'}{EO_1'} = \frac{AO_1(1+\lambda)AO_1'}{EO_1'},$$

и

$$on = (1+\lambda) \frac{AO_1'^2}{EO_1'}, \quad on - oe = \frac{AO_1'^2 + \lambda(AO_1'^2 - EO_1'^2)}{EO_1'}.$$

Назовемъ вѣса стержней AO_1C и BO_2D вмѣстѣ съ грузами чрезъ mg ; они приложатся въ центрахъ тяжести стержней F_1 и F_2 . Вѣсъ верхняго звена AB обозначимъ чрезъ gt_1 ; онъ будетъ приложенъ въ срединѣ звена E . Изображенія данныхъ силъ на вспомогательномъ рычагѣ будутъ: направленныя внизъ двѣ силы mg , приложенныя въ изображеніяхъ f_1 и f_2 точекъ F_1 и F_2 , направленная вверхъ сила $\lambda t_1 g$, приложенная въ точкѣ e середины ab , еще направленная внизъ сила $\lambda t_1 g$, приложенная въ изображеніи n точки поворота. Если J будутъ моменты инерціи

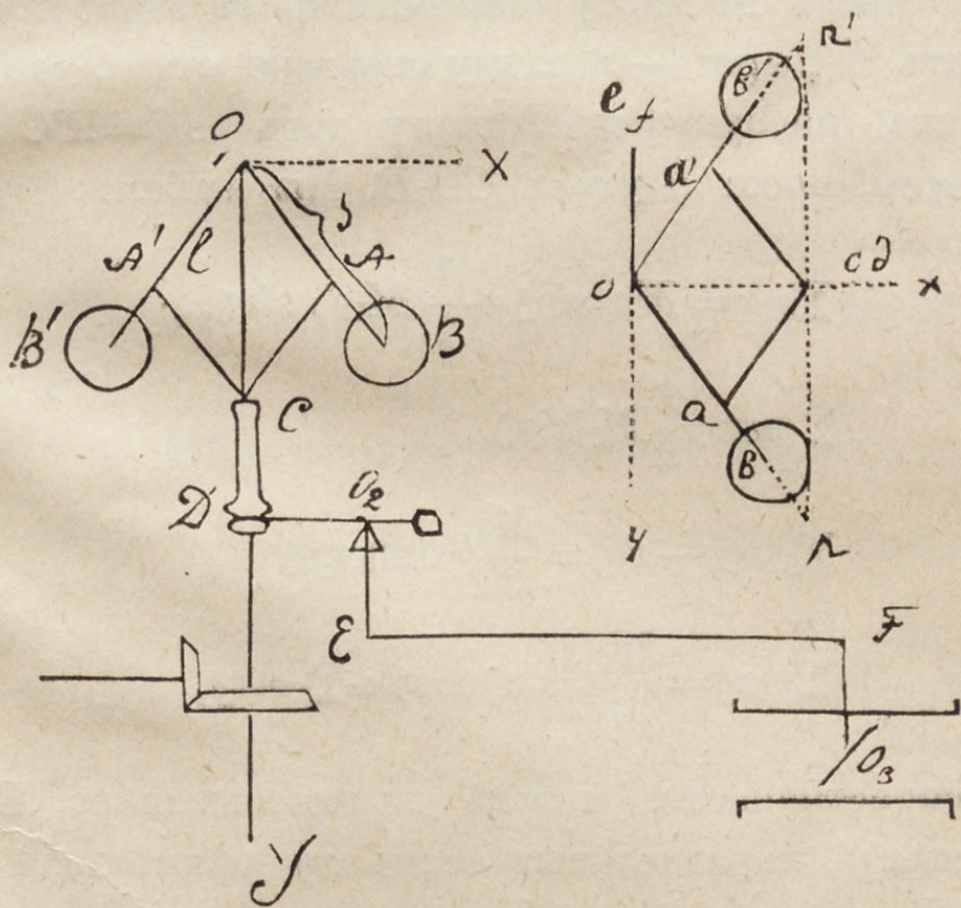
рычаговъ и грузовъ AO_1 и BO_2 относительно точекъ опоры O_1 и O_2 , а J_1 моментъ инерціи звена, AB относительно точки O_1' , то длина математическаго маятника, имѣющаго одновременныя колебанія съ рассматриваемой кинематической цѣпью, будетъ:

$$L = \frac{2J + \frac{\lambda^2 J_1}{(AO_1'^2 + \lambda AE^2) \frac{m_1}{EO_1}}}{2mh}.$$

Для того, чтобы рассматриваемая цѣпь имѣла устойчивое положеніе равновѣсія необходимо выполненіе условія:

$$2mh > \frac{AO_1'^2 + \lambda AE^2}{EO_1} m_1.$$

На фиг. 18 представлена схема регулятора Уатта, муфта котораго соединена съ балансиромъ DO_2E , центръ тяжести



Фиг. 18.

котораго совпадаетъ съ его точкою опоры O_2 . Этотъ балансиръ посредствомъ тяги EF , горизонтальной при рассматриваемой угловой скорости, приводитъ въ движеніе съ помощію вертикальной ручки FO_3 паровпускной клапанъ, который вмѣстѣ съ ручкою имѣетъ точку опоры въ O_3 . Вправо отъ схемы

регулятора начертанъ его вспомогательный рычагъ, при чемъ звено O_1A принято за главное звено. Установимъ сначала связь между положеніемъ регулятора и угловою скоростью Ω его вращенія около оси O_1D . Для этого ко всѣмъ изображеніямъ точекъ цѣпи на вспомогательномъ рычагѣ приложимъ силы, геометрически равныя силамъ, дѣйствующимъ въ кинематической цѣпи, и напишемъ, что сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ равна нулю:

$$2g\sum mx + 2g\sum_1 mx + M_3gp - 2\Omega^2\sum mxy - 2\Omega^2\sum_1 m(p-x)y = 0,$$

гдѣ $\sum$ есть сумма, распространенная на всѣ матеріальныя точки стержня ab вмѣстѣ съ шаромъ, $\sum_1$ есть сумма, распространенная на всѣ матеріальныя точки стержня ac , M_3 есть масса муфты, $p = oc = AA'$ и g есть ускореніе тяжести.

Назовемъ чрезъ M массу шаровъ и чрезъ s разстояніе ихъ центровъ отъ O_1 , чрезъ s' длину стержней отъ O_1 до шара и чрезъ M_1 ихъ массу, чрезъ l длину тягъ $AC = A'C$ и чрезъ M_2 ихъ массы, чрезъ θ уголъ CO_1B . Мы имѣемъ:

$$\sum mx = Ms \cdot \sin\theta + \frac{1}{2} M_1 s' \cdot \sin\theta,$$

$$\sum_1 mx = \frac{3}{2} M_2 l \sin\theta,$$

$$\sum_1 m(p-x)y = \frac{M_2}{3} l^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\sum mxy = \frac{M_1}{3} s'^2 \sin\theta \cos\theta + \sum_2 mxy,$$

гдѣ $\sum_2$ распространяется только на массы шара. Если построить оси $x'y'$, параллельныя осямъ xy и имѣющія начало въ центрѣ b изображенія шара, то

$$\sum_2 mxy = \sum_2 m(\bar{x} + x')(\bar{y} + y') = M\bar{x}\bar{y},$$

гдѣ $\bar{x}$, $\bar{y}$ координаты точки b . Такимъ образомъ

$$\sum mxy = \frac{M_1}{3} s'^2 \sin\theta \cos\theta + Ms^2 \sin\theta \cos\theta.$$

На основаніи всего сказаннаго угловая скорость Ω будетъ удовлетворять уравненію:

$$2Ms + M_1s + [3M_2 + 2M_3]l - \frac{\Omega^2}{g} [2Ms^2 + \frac{2}{3}M_1s'^2 + \frac{2}{3}M_2l^2] \cos\theta = 0.$$

Переходимъ теперь къ составленію знаменателя въ выраженіи длины маятника L . Прилагаемъ ко всѣмъ точкамъ вспомогательнаго рычага изображеніе силъ, а къ изображеніямъ точекъ поворота звеньевъ силы, противоположныя равнодѣйствующимъ изображеній. Такъ какъ тяга EF изображается на скоростной діаграммѣ одною точкою (ef), то изображенія силъ, дѣйствующихъ на эту тягу, суть нуля; равнымъ образомъ, не надо обращать вниманія на равнодѣйствующія изображеній силъ, дѣйствующихъ на изображенія точекъ поворота звеньевъ O_1B , DO_2E , FO_3 , такъ какъ всѣ точки поворота этихъ звеньевъ, какъ неподвижныя точки опоры, изображаются въ o . Точки поворота звеньевъ CA и CA' будутъ находится въ O_1 . Изображая точку O_1 , присоединенную къ звену CA , получаемъ на вспомогательномъ рычагѣ точку n ; а изображая точку O_1 , присоединенную къ звену CA' , получаемъ точку n' .

Къ этимъ изображеніямъ мы должны приложить къ n силу: $g \left(\frac{M_3}{2} + M_2 \right)$, направленную по вертикали внизъ, къ n' такую же силу, направленную по вертикали вверхъ. Кромѣ того отъ равнодѣйствующихъ изображеній центробѣжныхъ силъ на точки n и n' будутъ дѣйствовать вправо силы $\frac{M_2}{4}\Omega^2r$. Составляемъ теперь искомую величину знаменателя k въ выраженіи L :

$$k = 2g \sum my - 2g \sum_1 my + g[2M_2 + M_3]q + 2\Omega^2 \sum mx^2 + \\ + 2\Omega^2 \sum_1 m(p-x)^2 - 2\Omega^2 \sum_1 m(p-x)p - 2\Omega^2 \sum my^2 - 2\Omega^2 \sum_1 my^2 + \frac{M_2}{4}\Omega^2 p^2.$$

Здѣсь $\sum$ распространяется на массы стержня *ob* вмѣстѣ съ

шаромъ, Σ_1 —на массы стержня ac , а $q = \frac{nn'}{2} = 0_1C$. Два последние члена выражения k получились отъ выражений вида $\left(\frac{d(X)}{dx}y^2\right)$, которые разсматривались въ § 6. Опредѣляемъ значенія входящихъ въ выраженіе k суммъ:

$$\Sigma my = Mscos\theta + \frac{1}{2}M_1s'cos\theta,$$

$$\Sigma_1my = \frac{1}{2}M_2lcos\theta,$$

$$\Sigma_1m(-y^2 + (p-x)^2) - p\Sigma_1m(p-x) = \frac{1}{3}M_2l^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - M_2l^2\sin^2\theta,$$

$$\Sigma m(x^2 - y^2) = \frac{M_1}{3}s'^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + Ms^2.$$

Подставляемъ значенія этихъ суммъ въ выраженія для k :

$$k = gcos\theta[2Ms + M_1s' + (3M_2 + 2M_3)l] + \Omega^2[2Ms^2 + \\ + \frac{2M_1}{3}s'^2 + \frac{2M_2}{3}l^2](\sin^2\theta - \cos^2\theta).$$

Это выраженіе можетъ быть на основаніи вышеприведеннаго условія равновѣсія регулятора преобразовано такимъ образомъ:

$$k = \Omega^2[2Ms^2 + \frac{2}{3}M_1s'^2 + \frac{2}{3}M_2l^2]\sin^2\theta.$$

Переходимъ къ опредѣленію знаменателя въ выраженіи L .

Назовемъ чрезъ J моментъ инерціи стержня O_1B вмѣстѣ съ шаромъ относительно оси O_1 , чрезъ J_1 —моментъ инерціи стержня CA относительно оси C , чрезъ J_2 —моментъ инерціи балансира DO_2E относительно оси O_2 , чрезъ J_3 —моментъ инерціи клапана и его ручки около оси O_3 и чрезъ m —массу шатуна EF .

Такъ какъ за главное звено принято звено O_1A_1 , то изображенія его вмѣстѣ съ шаромъ на вспомогательномъ рычагѣ одинаково съ самимъ звеномъ. Если назовемъ чрезъ i моментъ инерціи относительно o на вспомогательномъ рычагѣ изображенія ob , то найдемъ $i=J$. Что касается до момента инерціи $2i_1$ относительно o изображеній ac и $a's$, то онъ найдется по извѣстной теоремѣ о моментахъ инерціи относительно двухъ осей, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ центръ тяжести:

$$\begin{aligned} 2i_1 &= 2J_1 - \left(\frac{p}{4}\right)^2 M_1 + \left(\frac{3p}{4}\right)^2 M_1 = 2J_1 + \frac{1}{2}p^2 M_1 = \\ &= 2(J_1 + l^2 M_1 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Балансиръ DO_2E имѣетъ на вспомогательномъ рычагѣ изображеніе dos подобное DO_2E съ коэффициентомъ подобія

$$\lambda = \frac{2l \sin \theta}{DO_2},$$

поэтому, если назовемъ чрезъ i_2 моментъ инерціи изображенія балансира относительно точки опоры вспомогательнаго рычага, то найдемъ:

$$i_2 = J_2 \lambda^2.$$

Весъ шатуна EF изображается на вспомогательномъ рычагѣ массою m , сосредоточенною въ точкѣ (e, f) . Этой точкѣ относительно o соотвѣтствуетъ моментъ инерціи

$$i' = 4ml^2 \sin^2 \theta.$$

Ручка поворотнаго клапана O_3F изображена на вспомогательномъ рычагѣ звеномъ of , при чемъ коэффициентомъ подобія является величина

$$\lambda' = \frac{2l \sin \theta}{O_2D} \cdot \frac{O_2E}{O_3F},$$

такъ что моментъ инерціи i_3 изображенія ручки вмѣстѣ съ изображеніемъ клапана относительно точки опоры рычага будетъ:

$$i_3 = J_3 \lambda'^2.$$

Общій моментъ инерціи всего вспомогательнаго рычага представится въ видѣ:

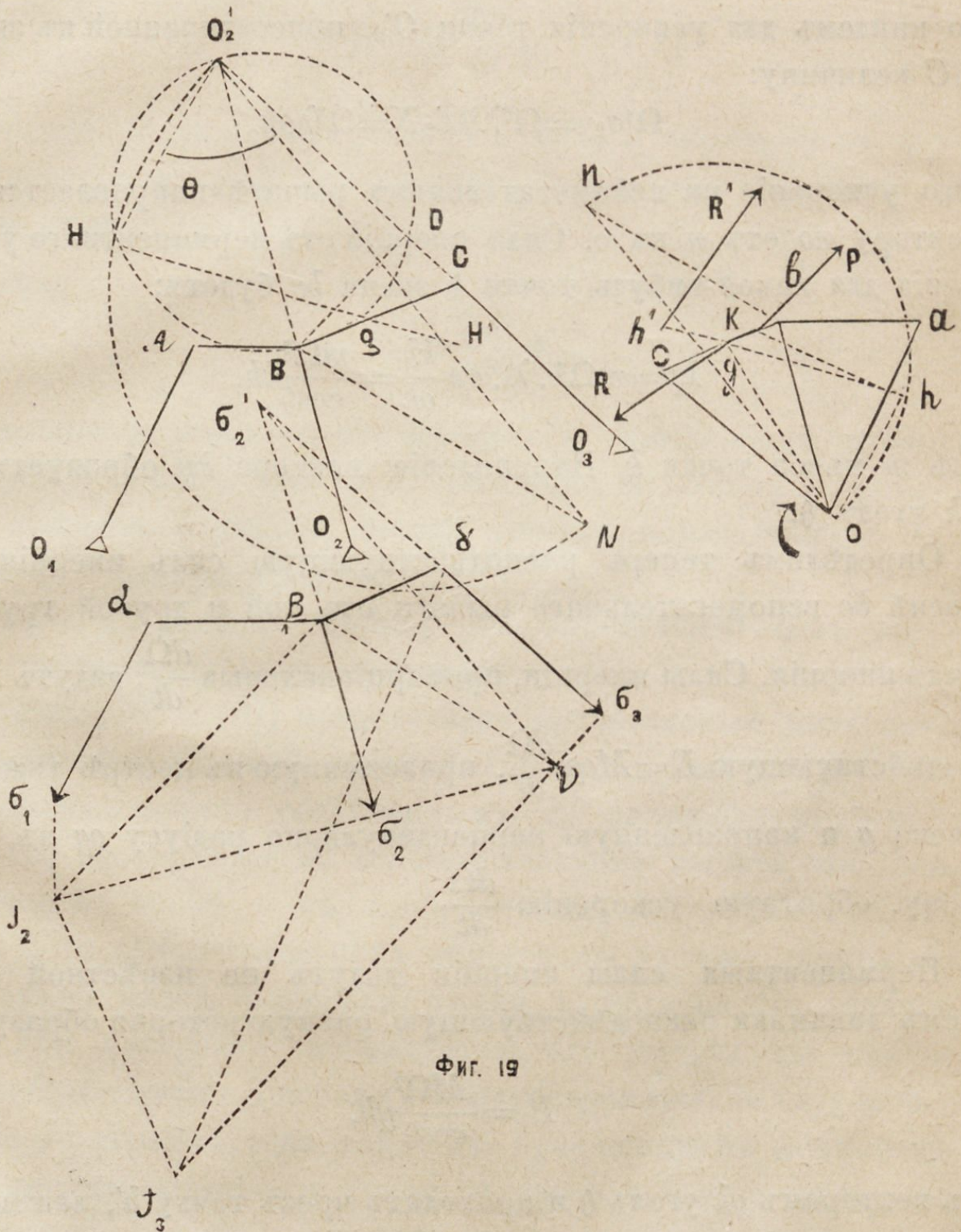
$$2i + 2i_1 + i_2 + i' + i_3 = 2[J + J_1 + l^2 \sin^2 \theta M_1] + J_2 \lambda^2 + 4ml^2 \sin^2 \theta + J_3 \lambda'^2.$$

На основаніи всего сказаннаго приходимъ къ заключенію, что регуляторъ колеблется около разсматриваемаго положенія равновѣсія какъ маятникъ, имѣющій длину:

$$L = \frac{2[J + J_1 + l^2 \sin^2 \theta M_1] + J_2 \lambda^2 + 4ml^2 \sin^2 \theta + J_3 \lambda'^2}{\Omega^2 \sin^2 \theta [2Ms^2 + \frac{2}{3} M_1 s'^2 + \frac{2}{3} M_2 l^2]}.$$

§ 8. Приложимъ теперь теорію вспомогательнаго рычага къ опредѣленію упругихъ силъ въ движущейся кинематической цѣпи, принимая во вниманіе эффектъ силъ инерціи. Ускореніе каждой матеріальной точки кинематической цѣпи на основаніи § 4 складывается изъ перманентнаго ускоренія пропорціональнаго квадрату Ω^2 угловой скорости главнаго звена, которое опредѣляется по діаграммѣ центростремительныхъ ускореній, и изъ ускоренія, пропорціональнаго $\frac{d\Omega}{dt}$, которое опредѣляется по скоростной діаграммѣ. Перенеся силы инерціи отъ этихъ двухъ группъ силъ на вспомогательный рычагъ, мы увидимъ, что силы инерціи, пропорціональныя $\frac{d\Omega}{dt}$, будутъ геометрически равны силамъ инерціи, которыя бы развились въ массахъ самаго вспомогательнаго рычага, если бы мы привели его изъ покоя во вращеніе съ ускореніемъ $\frac{d\Omega}{dt}$, равнымъ угловому ускоренію главнаго звена. Вторая группа силъ инерціи, зависящая отъ перманентныхъ ускореній, найдется согласно со сказаннымъ въ § 4. Предполагаемъ фиг. (19), что скоростная діаграмма и діаграмма центростремительныхъ ускореній построены въ предположеніи, что главное звено O_1A вращается съ угловою скоростью равною единицѣ, такъ что скоростная діаграмма представляетъ вспомогательный рычагъ.

Для звена BC центромъ ускоренія будетъ точка H пересѣченія поворотнаго круга NHO'_2 и круга BDO'_2 , описаннаго около треугольника BO'_2D , въ которомъ $BD \parallel \beta j_2$. По-



Фиг. 19

Фиг. 19.

строимъ на вспомогательномъ рычагѣ изображеніе n точки поворота, изображеніе поворотнаго круга nho и изображе-

ніе h центра ускоренія, при чемъ $\angle HO'_2N = \angle hon = \theta$. Если положимъ

$$\lambda = \frac{bc}{BC},$$

то найдемъ для ускоренія точки O'_2 , присоединенной къ звену BC величину:

$$\Omega^2 \sigma_2 \nu = \Omega^2 \lambda^2 O'_2 N = \Omega^2 \lambda on.$$

Это ускореніе на вспомогательномъ рычагѣ направляется по вектору no отъ n къ o . Сила инерціи отъ перманентнаго ускоренія для какой-нибудь точки k звена bc будетъ:

$$kp = m \Omega^2 \cdot \lambda \cdot on \frac{kh}{oh} = \frac{m \Omega^2}{\cos \theta} kh,$$

гдѣ m масса точки k . Направленіе вектора kp образуетъ съ kh уголъ θ .

Опредѣлимъ теперь равнодѣйствующую силъ инерціи на звенѣ bc вспомогательнаго рычага отъ той и другой группы силъ инерціи. Силы инерціи, пропорціональныя $\frac{d\Omega}{dt}$, дадутъ равнодѣйствующую $R = M og \frac{d\Omega}{dt}$, приложенную въ центрѣ тяжести звена g и направленную перпендикулярно радіусу og въ сторону, обратную ускоренію $\frac{d\Omega}{dt}$.

Перманентныя силы инерціи дадутъ по извѣстной теоремѣ динамики равнодѣйствующую, равную которая образуетъ

$$R_1 = \frac{M \Omega^2}{\cos \theta} gh,$$

съ векторомъ gh уголъ θ и проходитъ чрезъ точку h' , лежащую на прямой hg и удовлетворяющую условію: гдѣ J моментъ

$$hg \cdot h'g = \frac{J}{M},$$

инерціи звена bc относительно центра тяжести g .

На основаніи всего сказаннаго получаемъ теорему.

Теорема VI. Силы инерціи, перенесенныя на вспомогательный рычагъ, слагаясь, даютъ для каждаго звена рычага двѣ силы:

1) силу

$$R = M \frac{d\Omega}{dt} og,$$

проходящую чрезъ центръ тяжести звена и направленную перпендикулярно къ радіусу, соединяющему центръ тяжести съ точкою опоры;

2) силу

$$R_1 = \frac{M\Omega^2}{\cos\theta} gh,$$

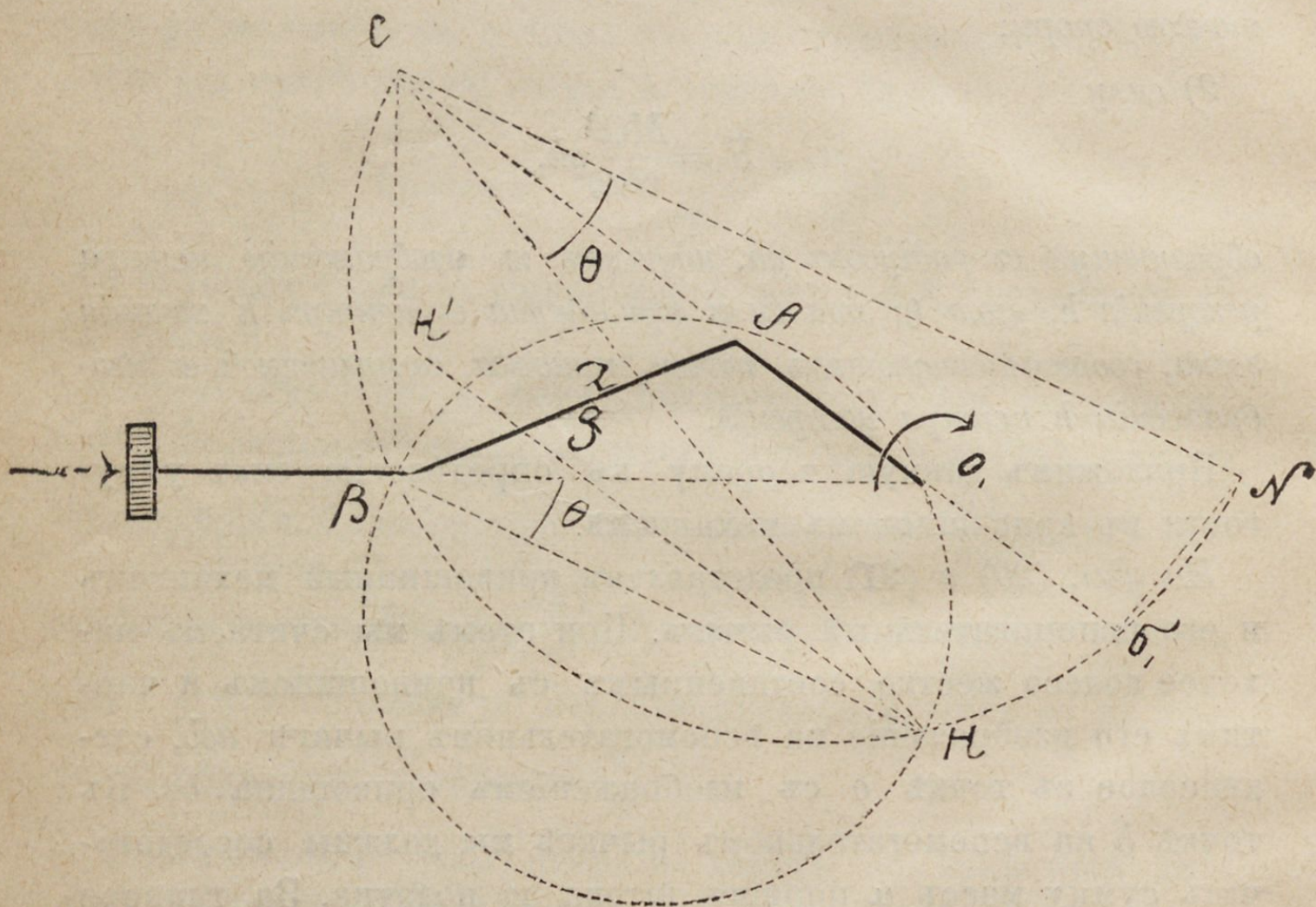
образующую съ радіусомъ gh , идущимъ къ изображенію центра ускоренія h , уголъ θ ; эта сила приложена въ центръ h' качанія звена, соответствующемъ точкѣ привѣса, помѣщенной въ изображеніи h центра ускоренія.

Приложимъ данную теорему къ опредѣленію силъ упругости въ кривошипномъ механизмѣ.

На фиг. (20) и (21) представленъ кривошипный механизмъ и его вспомогательный рычагъ. При этомъ мы считаемъ маховое колесо жестко соединеннымъ съ кривошипомъ и чертимъ его изображеніе на вспомогательномъ рычагѣ aob , соединенное въ точкѣ o съ изображеніемъ кривошипа oa . Въ точкѣ b на вспомогательномъ рычагѣ мы должны сосредоточить сумму массъ μ поршня, штока и ползуна. За главное звено при построеніи вспомогательнаго рычага мы принимаемъ $O_1A = oa = r$. Діаграмму центростремительныхъ ускореній мы не строимъ, такъ какъ въ кривошипномъ механизмѣ очень просто опредѣлить точку поворота и центръ ускоренія для шатуна. Для этого служитъ такое соображеніе. Если за главное звено мы бы приняли BA и начали бы съ этого вектора строить діаграмму центростремительныхъ ускореній, направляя $\alpha\beta$ по AB , то пришлось бы отложить по AO_1

$$A\sigma_1 = \frac{s^2}{r}$$

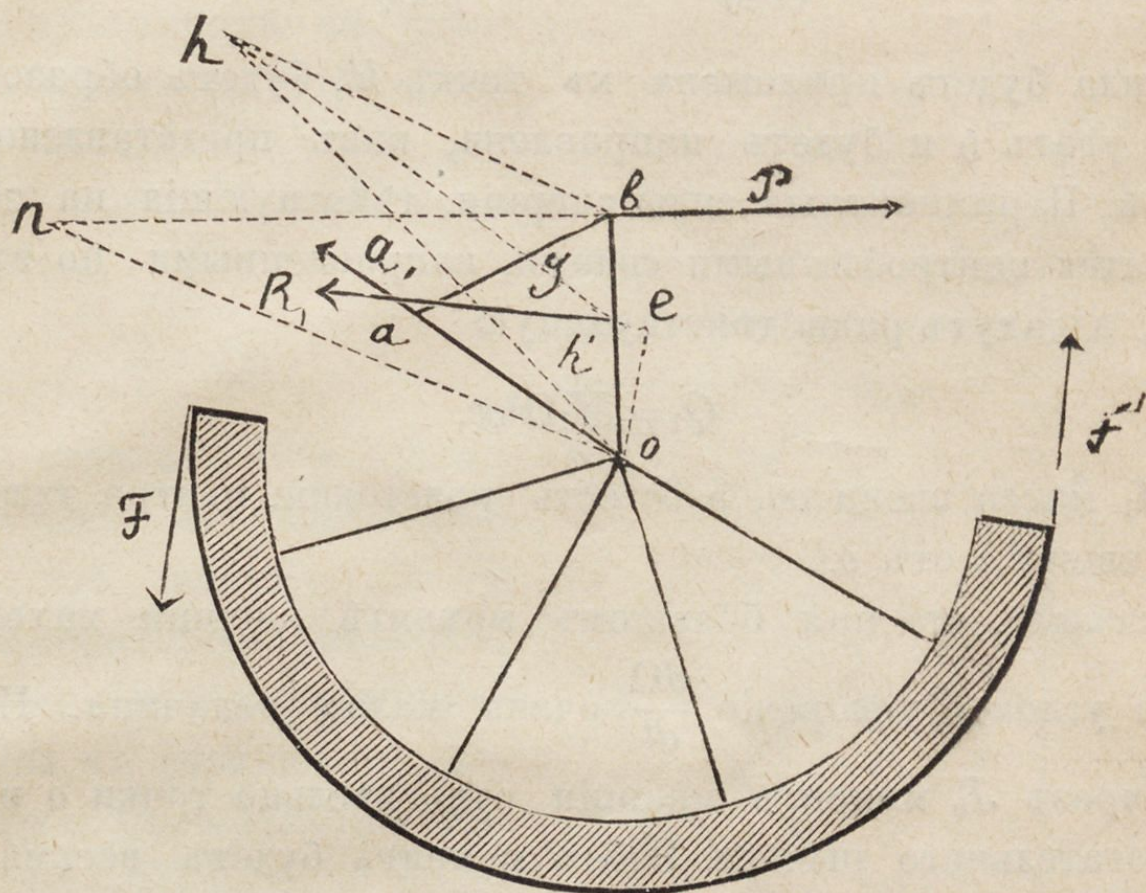
гдѣ $CA=s$. Точка σ_2 попала бы въ B , при чемъ безконечно малый векторъ $\sigma_2 B$ былъ бы перпендикуляренъ BO_1 . Возставляя перпендикуляры изъ точекъ σ_1 и σ_2 къ векторамъ $A\sigma_1$ и $B\sigma_2$ мы найдемъ въ ихъ пересѣченіи точку поворота N звена AB , которая независитъ отъ выбора главнаго звена [Это заключеніе можно сдѣлать, не рассматривая безконечно малый векторъ $B\sigma_2$, прямо по теоремѣ II]. Поворотный кругъ будетъ CBN .



Фиг. 20.

При главномъ звенѣ $O_1 A$ перманентное ускореніе точки A направлено по AO_1 , ускореніе же прямолинейнаго движенія точки B направлено по BO_1 . Искомый центръ ускоренія шатуна долженъ лежать на окружности $O_1 AB$, описанной около треугольника $O_1 AB$. Точка H пересѣченія этой окружности съ поворотнымъ кругомъ будетъ центромъ ускоренія. Изображеніе h центра ускоренія на вспомогательномъ рычагѣ найдется, проводя векторъ bh параллельный вектору BH , но

имѣющій направленіе прямо противоположное вектору BH , такъ какъ звено AB вращается въ обратномъ направленіи съ главнымъ звеномъ AO_1 . Уголъ bh съ горизонтальной линіей



Фиг. 21.

будетъ равенъ углу $HCSN=\theta$. Векторъ bh опредѣлится по формулѣ

$$bh = BH \cdot \lambda,$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{ab}{AB} = \frac{AO_1}{AC}.$$

Пусть g будетъ центръ тяжести звена ab , включая въ звено въ точкѣ b присоединенную массу μ . Строимъ точку h' , являющуюся центромъ качанія звена ab при точкѣ привѣса h , такъ что

$$hg \cdot h'g = \frac{J}{M + \mu},$$

гдѣ J моментъ инерціи звена ab вмѣстѣ съ массою μ . На основаніи теоремы VI равнодѣйствующая перманентныхъ силъ

инерціи, приложенныхъ къ звену ab вмѣстѣ съ массою μ , будетъ имѣть величину:

$$R_1 = \frac{(M + \mu)\Omega^2}{\cos\theta} gh = \frac{(M + \mu)\Omega^2}{\cos\theta} \lambda GH.$$

Эта сила будетъ приложена къ точкѣ h' , будетъ образована съ gh уголъ θ и будетъ направлена, какъ представлено на фигурѣ. Перманентныя силы инерціи, дѣйствующія на звено oa , явятся центробѣжными силами, направленными по этому звену, и дадутъ равнодѣйствующую

$$Q_1 = M_1 \Omega^2 oc,$$

гдѣ M_1 масса звена oa , а oc есть разстояніе центра тяжести этого звена c отъ o .

Покажемъ, что при большомъ моментѣ инерціи махового колеса угловое ускореніе $\frac{d\Omega}{dt}$ очень малая величина. Назовемъ чрезъ J_0 моментъ инерціи относительно точки o всего вспомогательнаго рычага. Этотъ моментъ будетъ весьма великъ, такъ какъ во вспомогательный рычагъ включается изображеніе махового колеса съ его массами. Условіе равновѣсія вспомогательнаго рычага напишется такъ:

$$J_0 \frac{d\Omega}{dt} = P ob - 2F\rho - R_1 oe,$$

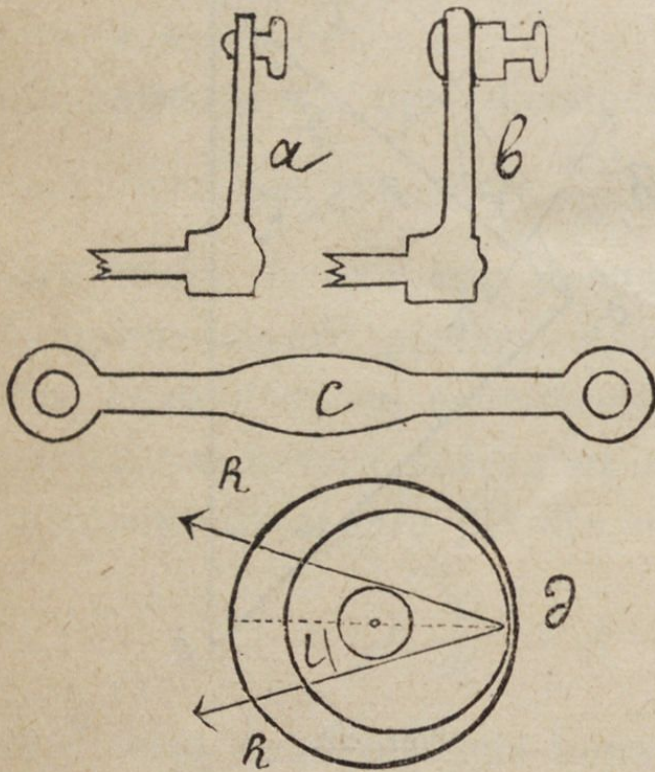
гдѣ P есть сила давленія пара на поршень, (F, F') есть пара оказывающая сопротивленіе вращенію махового колеса, при чемъ изображеніе его радіуса есть ρ , и oe есть перпендикуляръ, опущенный изъ o на направленіе силы R_1 .

Вторая часть написаннаго равенства для всякаго положенія кривошипнаго механизма есть опредѣленная конечная величина, множитель J_0 въ первой части очень великъ, поэтому угловое ускореніе $\frac{d\Omega}{dt}$ очень мало. Въ виду этой малости при расчетѣ силъ упругости въ кривошипномъ механизмѣ можно обращать вниманіе только на силы инерціи, происходящія отъ перманентныхъ ускореній.

образующую съ kh' уголъ θ . Составивъ сумму моментовъ силъ sf (сила обратная fs) и R'_1 относительно центра z , получимъ искомый ломающій моментъ въ сѣченіи z ; опредѣливъ же сумму проекцій этихъ силъ на направленіе za , получимъ натяженіе звена ab вспомогательнаго рычага въ сѣченіи z . Это дастъ намъ сжатіе въ соотвѣтственной точкѣ шатуна AB . ¹⁾

§ 9. Въ заключеніе нашего сочиненія мы примѣнимъ теорію вспомогательнаго рычага къ опредѣленію работы, потерянной на треніе въ шарнирахъ кинематической цѣпи. Эту задачу мы рѣшимъ точно въ случаѣ, когда силы дѣйствуютъ

только на звенья цѣпи, имѣющія неподвижныя точки опоры, и приближенно въ общемъ случаѣ. Пусть (фиг. 21) крайніе кривошипы имѣютъ видъ a , а промежуточные имѣютъ видъ b , шатуны же схематически представляются въ видѣ c . Такъ какъ діаметръ шипа кривошипа будетъ нѣсколько менѣе діаметра отверстія въ шатунѣ, то соприкосновеніе произойдетъ такъ, какъ это представлено на фиг. (21) (чертежъ d). Полная сила реакціи подшипника шатуна на



Фиг. 23.

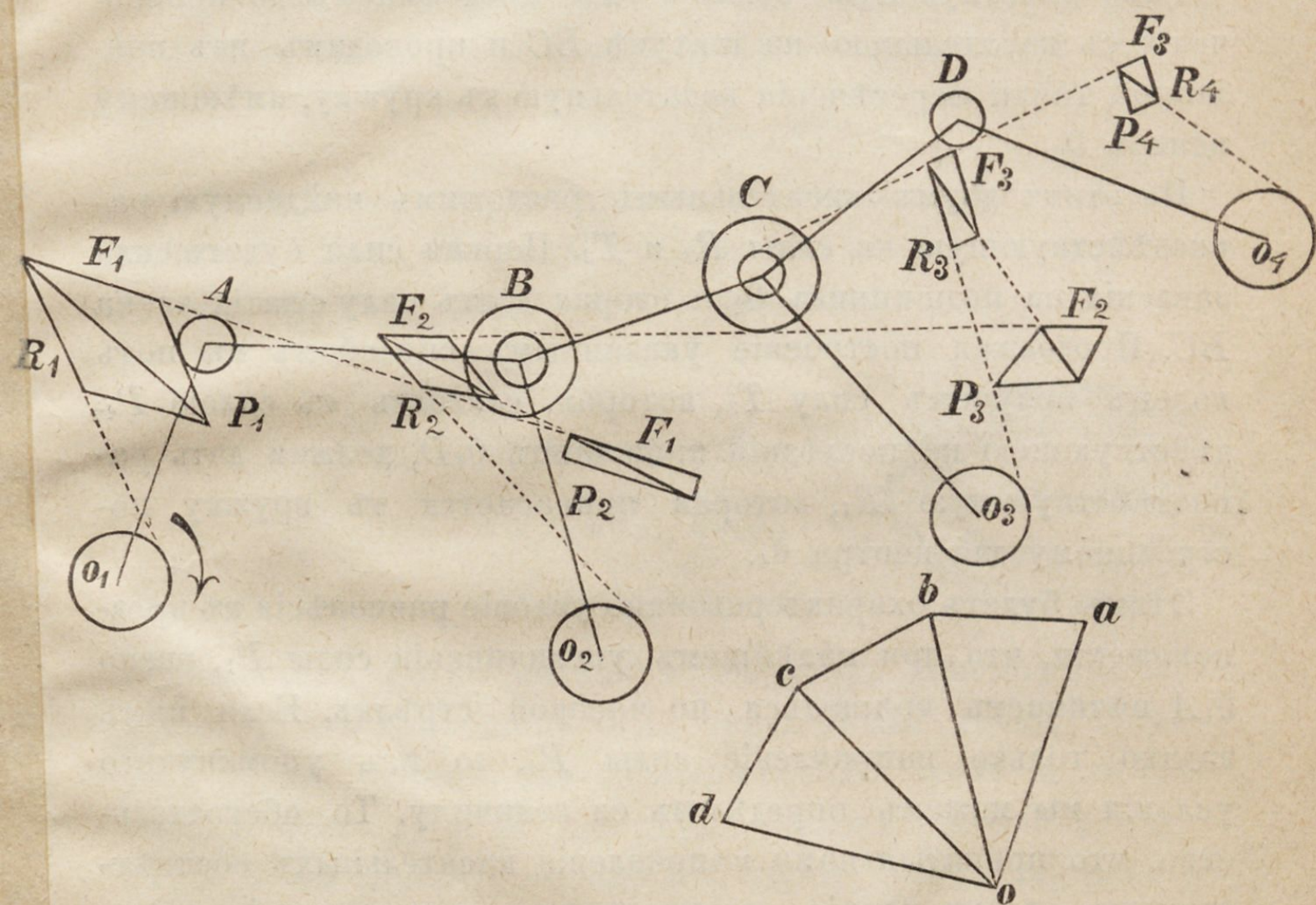
шипъ кривошипа будетъ имѣть направленіе R или R' , смотря потому совершается ли вращеніе шипа по отношенію къ подшипнику по часовой стрѣлкѣ или противъ часовой стрѣлки.

Эти силы R и R' наклонны къ общей нормали подъ угломъ тренія i и потому прикасаются къ кружку, проведенному ра-

¹⁾ Аналогичный способъ расчета кривошипнаго механизма изложенъ въ литографированныхъ лекціяхъ профессора Н. И. Мерцалова.

діусомъ $\rho = r \sin(i)$ изъ центра подшипника, гдѣ r радіусъ подшипника (въ виду малой разности между радіусами шипа и подшипника за r можно считать радіусъ шипа). На фиг. (22) представлена кинематическая цѣпь, въ которой силы P_1, P_2, P_3, P_4 дѣйствуютъ на кривошипы.

Изъ всѣхъ центровъ шарнировъ, включая сюда и опорные подшипники, проведемъ кружки соотвѣтственными радіусами



Фиг. 24.

ρ , при чемъ для кривошиповъ (вида b) ступеньчатыми шипами надо будетъ изъ одного центра проводить по два кружка, которые будутъ вообще имѣть различные радіусы ρ . Поведемъ для каждаго шатуна касательную, прикасающуюся къ окружностямъ, построеннымъ при концахъ шатуна, какъ это представлено на фигурѣ. Силу P_1 продолжаемъ до пересѣченія съ первою касательною и изъ точки пересѣченія проводимъ

еще касательную къ окружности, построенной для опорнаго подшипника O_1 . По направленію этихъ двухъ касательныхъ разлагаемъ силу P_1 на T_1 и R_1 . Сила R_1 будетъ полная сила давленія на подшипникъ O_1 , а сила T_1 будетъ силою дѣйствія и противодѣйствія въ подшипникахъ A и B шатуна AB , а также и силою сжимающею шатунъ AB . Силу T_1 , передаваемую чрезъ нормальное давленіе и треніе на кривошипъ O_2B складываемъ съ силою P_2 , дѣйствующую на этотъ кривошипъ.

Равнодѣйствующую этихъ силъ продолжаемъ до пересѣченія съ касательною на шатунъ BC и проводимъ изъ найденной точки пересѣченія касательную къ кружку, имѣющему центръ O_2 .

По этимъ двумъ касательнымъ разложимъ найденную равнодѣйствующую на силы R_2 и T_2 . Первая сила будетъ сила давленія на подшипникъ O_2 , а вторая даетъ силу сжатія звена BC . Продолжая построеніе указаннымъ способомъ мы подъ конецъ получимъ силу T_3 , которая, слагаясь съ силою P_4 , дѣйствующею на послѣдній кривошипъ O_4D , должна дать равнодѣйствующую R_4 , которая прикасается къ кружку, построенному для центра O_4 .

Этимъ будетъ охарактеризовано условіе равновѣсія въ предположеніи, что при малѣйшемъ увеличиваніи силы P_1 , звено O_1A начинаетъ вращаться по часовой стрѣлкѣ. Если намъ задано только направленіе силы P_4 , то изъ упомянутаго условія мы можемъ опредѣлить ея величину. То обстоятельство, что принятыя нами направленія касательныхъ соотвѣтствуютъ силамъ тренія, развивающимся при вращеніи звена O_1A вправо, видно изъ нижеслѣдующаго соображенія. Сила нормальнаго давленія N_1 въ подшипникъ O_1 , слагаясь съ силою тренія F_1 , направленною по часовой стрѣлкѣ, даетъ полную силу дѣйствія R_1 на опорный подшипникъ O_1 ; сила нормальнаго давленія N_2 въ подшипникъ A , слагаясь съ направленною по часовой стрѣлкѣ силою тренія F_2 (движеніе шипа A относительно неподвижнаго шатуна AB будетъ направлено по часовой стрѣлкѣ), даетъ силу T_1 дѣйствія кривошипа O_1A на шатунъ AB и т. д. Составимъ сумму элементарныхъ ра-

ботъ всѣхъ силъ тренія въ нашей кинематической цѣпи при поворотѣ ея главнаго звена 0_1A на уголъ $\delta\varphi$. Пусть отношенія звеньевъ вспомогательнаго рычага (фиг. 24) и цѣпи будутъ:

$$\frac{0a}{0A}=1, \quad \frac{0b}{0B}=\mu_2, \quad \frac{0c}{0C}=\mu_2, \quad \frac{0d}{0D}=\mu_4,$$

$$\frac{ab}{AB}=\lambda_1, \quad \frac{bc}{BC}=\lambda_2, \quad \frac{cd}{CD}=\lambda_3.$$

При этомъ въ неподвижныхъ подшипникахъ $0_1, 0_2, 0_3, \dots$ мы будемъ имѣть углы поворота кривошиповъ:

$$\delta\varphi, \mu_2\delta\varphi, \mu_3\delta\varphi, \mu_4\delta\varphi;$$

углы же поворота кривошиповъ по отношенію къ подшипникамъ A, B, C, D [въ B и C мы имѣемъ по два шипа и по два подшипника] будутъ послѣдовательно:

$$\delta\varphi(1+\lambda_1),$$

$$\delta\varphi(\mu_2+\lambda_1), \delta\varphi(\mu_2+\lambda_2),$$

$$\delta\varphi(\mu_3+\lambda_2), \delta\varphi(\mu_3+\lambda_3),$$

$$\delta\varphi(\mu_4+\lambda_3).$$



Обозначимъ далѣе величины радіусовъ вспомогательныхъ кружковъ: для кривошипа 0_1A —черезъ ρ_1 для точки опоры и черезъ ρ'_1 для головки; для кривошипа 0_2B —черезъ ρ_2 для точки опоры и черезъ ρ'_2 и ρ''_2 для двухъ шиповъ головки и т. д.

Теперь мы можемъ опредѣлить сумму элементарныхъ работъ всѣхъ силъ тренія dF , составляя сумму произведеній угловъ поворота на соотвѣтственные радіусы ρ и соотвѣтственные силы давленій, прикасающіяся къ кружкамъ:

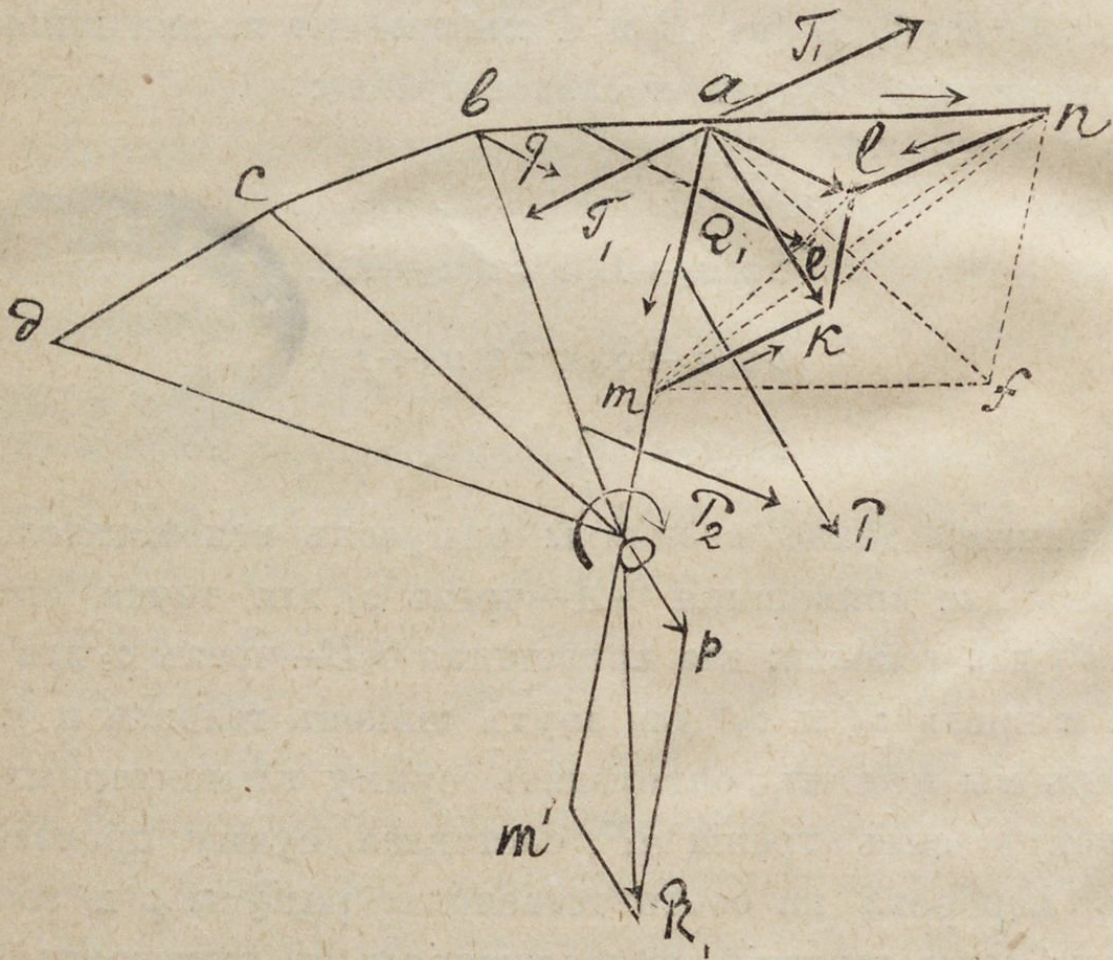
$$\begin{aligned} dF = & \delta\varphi [R_1\rho_1 + T_1\rho'_1 + \mu_2(R_2\rho_2 + T_1\rho'_1 + T_2\rho''_2) + \mu_3(R_3\rho_3 + T_2\rho''_2 + \\ & + T_3\rho'_3) + \mu_4(R_4\rho_4 + T_3\rho'_3) + \lambda_1 T_1(\rho'_1 + \rho'_2) + \lambda_2 T_2(\rho''_2 + \rho'_3) + \\ & + \lambda_3 T_3(\rho'_3 + \rho'_4)]. \end{aligned}$$

Переходимъ къ общему случаю, когда силы дѣйствуютъ на всѣ звенья кинематической цѣпи, при чемъ для упрощенія

построенія предполагаемъ вслѣдствіе малости радіусовъ ρ , что силы реакцій проходятъ прямо чрезъ центры, $O_1, O_2, \dots A, B, \dots$. Построеніе можно дѣлать прямо на вспомогательномъ рычагѣ. Переносимъ фиг. (25) всѣ дѣйствующія силы $P_1, P_2, \dots Q_1, Q_2, \dots$ на вспомогательный рычагъ.

Каждую изъ силъ разлагаемъ на двѣ параллельныя, проходящія чрезъ концы звена. Силу P_1 разлагаемъ на параллельныя силы aK и op , а силу Q_1 —на двѣ параллельныя силы al и bq . Сила ak приложена въ точкѣ a звена oa , а сила al —въ точкѣ a звена ba .

Въ свою очередь силу ak разлагаемъ на am и $mk=T_1$, а силу al на an и $nl=T_1$, такъ, чтобы mk и nl имѣли равныя



Фиг. 25.

величины и противоположныя направленія. Это достигается указаннымъ на фигурѣ построениемъ.

Точка e , лежащая на срединѣ вектора lk , соединяется съ точкою a ; ae продолжается до точки f такъ, чтобы $ae=ef$; изъ f проводится $fn \parallel ma$ и $fm \parallel na$. Параллелограммъ $kmnl$ даетъ намъ искомыя векторы: $mk=nl=T_1$, выражающіе силы дѣй-

ствія и противодѣйствія въ шарнирѣ A . Сложивъ силы op и $am=om'$, мы получимъ силу давленія R_1 на подшипникъ 0_1 ; сложивъ же силу an съ силою bq , мы получимъ силу T_1' дѣйствія и противодѣйствія между шипомъ кривошипа 0_2B и шатуномъ AB . Эту силу, отнесенную къ кривошипу 0_2B , надо сложить съ силою P_2 и, рассматривая шатунъ BC , присоединеннымъ ко второму шипу кривошипа 0_2B , перейти къ повторенію указаннаго построенія для звеньевъ вспомогательнаго рычага ob и bc и т. д. Такимъ образомъ найдутся давленія $R_1, R_2, \dots$ въ неподвижныхъ подшипникахъ и давленія $T_1, T_1', T_2, T_2', \dots$ въ подшипникахъ на шатунахъ.

Элементарная работа δF силъ тренія выразится формулою, отличающеюся отъ предыдущей тѣмъ, что для одного и того же шатуна надо брать различныя силы T . Мы получимъ при этомъ такую формулу:

$$\begin{aligned} \delta F = \delta \varphi [& R_1 \rho_1 + T_1 \rho_1' + \mu_2 (R_2 \rho_2 + T_1' \rho_1 + T_2 \rho_2'') + \mu_3 (R_3 \rho_3 + T_2' \rho_2'' + \\ & + T_3 \rho_3') + \mu_4 (R_4 \rho_4 + T_3' \rho_3'') + \lambda_1 (T_1 \rho_1' + T_1' \rho_2') + \lambda_2 (T_2 \rho_2'' + T_2' \rho_3'') + \\ & + \lambda_3 (T_3 \rho_3' + T_3' \rho_4')]. \end{aligned}$$

Пользуясь этою формулою мы можемъ находить съ приближеніемъ силу P_1 , уравнивающую всѣ данныя силы, дѣйствующія на кинематическую цѣпь вмѣстѣ съ развивающимися въ шарнирахъ силами тренія. Предположимъ, что сила P_1 дана по направленію и движеніе цѣпи должно начаться въ сторону силы P_1 , (на фиг. 23 по часовой стрѣлкѣ). Сначала рассматриваемъ равновѣсіе вспомогательнаго рычага, не принимая во вниманіе силъ тренія, и опредѣляемъ изъ условія равенства нулю суммы моментовъ всѣхъ силъ величину P_1 .

Послѣ этого вносимъ поправку на треніе.

Для этого по вышеуказанному способу опредѣляемъ δF и искомой силѣ приписываемъ значеніе:

$$P_1 + \frac{1}{h} \frac{\delta F}{\delta \varphi},$$

гдѣ h перпендикуляръ, опущенный изъ o на данное направленіе силы.