

2.28189

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ КОМИССИЯ  
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА.

НА ДОМ  
НЕ ВЫДАЕТСЯ

ПРОФ. А. И. НЕКРАСОВ.

# Теоретическая Механика.

ЛЕКЦИИ, ЧИТАННЫЕ  
на Электротехническом и Инженерно-Строительном ф-тах М. В. Т. У.  
в 1922—23 уч. году.

ЧАСТЬ 1.

## СТАТИКА

(С ГРАФОСТАТИКОЙ).

Цена 1 р. 50 н.



МОСКВА  
1923.



# ОПЕЧАТКИ.

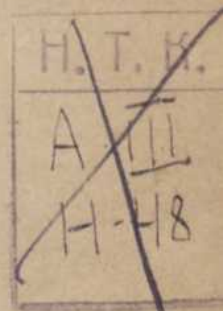
| Стран. | Строка.                            | Напечатано.                                                      | Должно быть.                                    |
|--------|------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 4      | 3 снизу                            | $R^2 = F_1'^2 + F_2'^2 + 2F_1'F_2', *)$                          | $I_1^2 = F_1'^2 + F_2'^2 + 2F_1'F_2'$           |
| 8      | Черт. 9,<br>на плоскости $\Pi$     | $O$                                                              | $O_1$                                           |
| 10     | Черт. 11,<br>координата точки $O'$ | $x$                                                              | $x'$                                            |
| 13     | 22 снизу                           | $B_1D_1 = O_1C_1,$                                               | $B_1D_1 = OC_1,$                                |
| "      | 20 "                               | $= OA_1 \cdot OB_1 +$                                            | $= OA \cdot OB_1 +$                             |
| 16     | 11 "                               | $B_1B_2 \parallel A_1A_2,$                                       | $B_1B_2 \parallel A'_1A'_2,$                    |
| 27     | 18 "                               | Ведем                                                            | Введем                                          |
| 37     | 9 сверху                           | в точке $C$                                                      | в точке $O$                                     |
| 50     | 5 снизу                            | пр.у $\overline{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} - y,$                  | пр.у $\overline{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - y,$ |
| 57     | 14 снизу                           | $A_2A_3 = 2p$                                                    | $A_2A_3 = 2b$                                   |
| 63     | 8 сверху                           | $OO_1 = OA_1 - AO.$                                              | $OO_1 = O_1A - AO.$                             |
| 73     | 21 сверху                          | $tg \beta_2 = \frac{2p}{h'};$                                    | $tg \beta_2 = \frac{2p}{h};$                    |
| 76     | Черт. 84                           | Точка $C_2$ должна стоять у пересечения прямых $KD_1$ и $C_1C$ . |                                                 |
| 83     | 6 — 9 сверху                       | $Ox \quad Oy$                                                    | $O_1x \quad O_1y$                               |

\*) Не во всех экземплярах.



ИЗДАТЕЛЬСКАЯ КОМИССИЯ  
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА.

Проф. А. И. НЕКРАСОВ.



# Теоретическая Механика.

ЛЕКЦИИ, ЧИТАННЫЕ

✓ на Электротехническом и Инженерно-Строительном ф-тах М. В. Т. У.  
в 1922—23 уч. году.

Провер. 1935

ЧАСТЬ 1.

СТАТИКА.



МОСКВА  
1923.





Гублит № 2302.

Тираж 3000 экз.

Типография М. В. Т. У.



## ГЛАВА I.

### СИЛА, КАК ВЕКТОР.

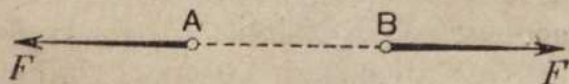
Теоретическая механика есть общее название ряда отдельных дисциплин, изучающих теорию равновесия и движения тел. Теоретическая механика может быть разбита на три основных группы: статику, кинематику и динамику.

Статика учит о равновесии тел под действием сил. Кинематика — о движении как таковом, не касаясь причин, его производящих. Наконец, динамика изучает зависимости между силами и движением. Каждая из этих групп содержит в себе отдельные дисциплины, напр., динамика включает в себя динамику точки, динамику системы, динамику жидкости — гидродинамику, и т. д.

Логически надо было бы начинать изучение теоретической механики с кинематики, так как только через кинематический элемент — ускорение — можно строго определить понятие силы. Мы, однако, в целях практических начнем изучение механики со статики, довольствуясь на первое время теми не вполне строгими определениями силы, с которыми мы познакомились в элементарной механике и физике. Мы удержим также данное в элементарной механике понятие абсолютно твердого тела, т.-е. такого, в котором действие сил не вызывает никаких деформаций, и понятие материальной точки, как предела бесконечно малого объема с конечной массой.

Силы распадаются на объемные, поверхностные и сосредоточенные. Объемной силой называется сила, распределенная по всему объему тела, как, напр., сила тяжести. Поверхностной силой называется сила, распределенная по поверхности тела, как, напр., сила трения. Наконец, сосредоточенной силой называется сила, приложенная в точке тела. Как геометрические линии и поверхности, сосредоточенные и поверхностные силы суть чистые отвлечения; однако изучение сосредоточенных сил так же необходимо в механике, как необходимо изучение прямых в геометрии. В дальнейшем мы будем заниматься, главным образом, сосредоточенными силами.

Если две силы, действуя в противоположных направлениях на две неизменно связанные между собой, но в остальном свободные точки, не изменяют состояния покоя или движения этих точек, то мы будем говорить, что силы взаимно уравновешиваются, а сами силы будем называть равными между собою (черт. 1). Это дает возможность сравнивать силы между собою, в частности с силой тяжести.



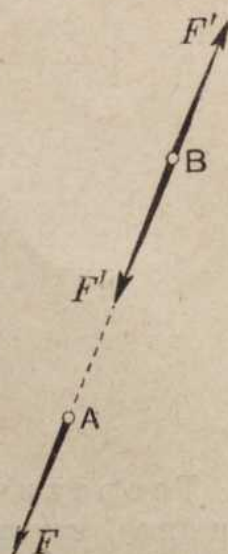
Черт. 1.

Для сравнения сил между собой служат особые приборы — динамометры, устройство которых известно из физики. За единицу силы мы примем вес 1 куб. дециметра чистой воды при  $4^{\circ}C$  на уровне моря при широте  $45^{\circ}$  и назовем эту единицу кило-



граммом. Так как количество килограммов пропорционально объему взятой воды, то мы можем построить эталоны веса и измерять силы килограммами.

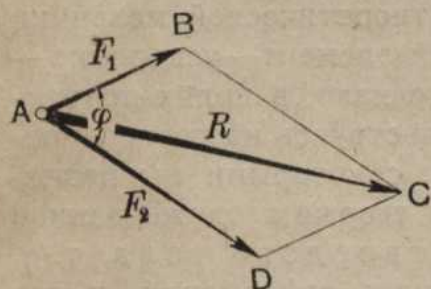
Сила есть вектор скользящий, т.е. в силе мы должны различать величину и направление, но можем переносить силу по прямой ее действия в любую точку. В самом деле, пусть будет дана сила  $F$ , приложенная в точке  $A$  и действующая вдоль некоторой прямой (черт. 2). Возьмем какую-нибудь точку  $B$  этой прямой и приложим в ней силы  $F'$  и  $F''$ , действующие в противоположных направлениях вдоль прямой, и таких, что  $F' = F$ . Это всегда возможно, так как по данному выше определению равных сил, силы  $F'$  и  $F''$  взаимно уравниваются. Но, с другой стороны, можно рассматривать, как уравнивающиеся, силы  $F'$  и  $F''$ ; таким образом мы получаем одну силу  $F''$ , приложенную в точке  $B$ , вместо силы  $F$ , приложенной в точке  $A$ .



Черт. 2.

Мы будем называть сходящимися силами такие силы, прямые действия которых пересекаются в одной точке—точке схода. Следовательно, во всякой системе сходящихся сил мы можем перенести все силы в точку схода.

**Аксиома.** Всякую систему сходящихся сил можно заменить одной силой—равнодействующей, являющейся геометрической суммой данных сил—составляющих. Самая операция получения геометрической суммы называется геометрическим сложением.



Черт. 3.

Для случая двух сил геометрическим сложением будет известное построение равнодействующей по правилу параллелограмма. Пусть будут даны две силы  $F_1$  и  $F_2$ , образующие между собой угол  $\varphi$  (черт. 3). Равнодействующей этих двух сил будет сила  $R$ , являющаяся диагональю параллелограмма  $ABCD$ , построенного на составляющих  $F_1$  и  $F_2$ . Из треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = F_1$ ,  $BC = F_2$  и  $\angle ABC = 180^\circ - \varphi$ , получаем:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi),$$

или

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi. \quad (1)$$

Обозначив  $\angle BAC$  через  $\beta_1$ , и  $\angle DAC$  через  $\beta_2$ , получим из треугольников  $ABC$  и  $ADC$ :

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \varphi} = \frac{F_2}{R}; \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \varphi} = \frac{F_1}{R}; \quad \beta_1 + \beta_2 = \varphi. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) определяют как величину силы  $R$ , так и ее направление.

Рассмотрим два важных частных случая.

Первый случай:  $\varphi = 0$ . Здесь мы имеем из (1)

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2,$$

а отсюда

$$R = F_1 + F_2. \quad (3)$$



Что касается направления равнодействующей  $R$ , то, неограниченно уменьшая угол  $\varphi$  в параллелограмме  $ABCD$ , мы видим, что в пределе равнодействующая  $R$  совпадет с общим направлением обеих сил  $F_1$  и  $F_2$ .

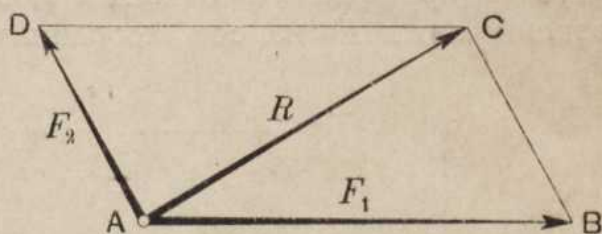
Второй случай:  $\varphi = 180^\circ$ . Здесь мы имеем из (1)

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2,$$

а отсюда

$$R = |F_1 - F_2|. \quad (4)$$

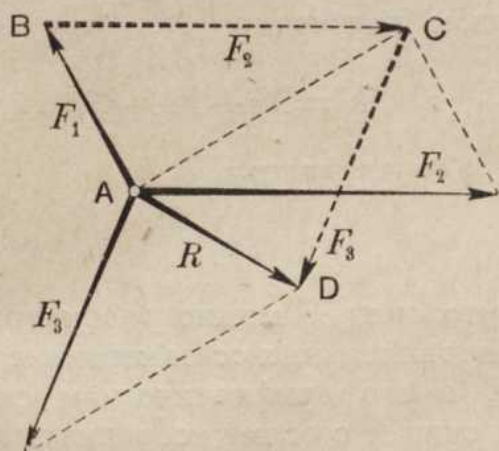
Мы, конечно, должны взять абсолютное значение разности  $F_1 - F_2$ , так как мы ищем арифметическое значение силы  $R$ . Что касается направления равнодействующей  $R$ , обратимся для выяснения этого к параллелограмму  $ABCD$  (черт. 4), в котором  $\varphi > 90^\circ$ . Легко видеть, что если  $\angle DAB = \varphi$  будет стремиться к  $180^\circ$ , равнодействующая  $R$  будет стремиться совпасть по направлению с большей силой  $F_1$  и сделаться равной разности  $F_1 - F_2$ . Таким образом, мы приходим к результатам, уже известным из элементарной механики. Так как во всяком треугольнике одна сторона меньше суммы и больше разности двух других сторон, то в общем случае равнодействующая будет меньше суммы и больше разности двух составляющих, делаясь равной их сумме



Черт. 4.

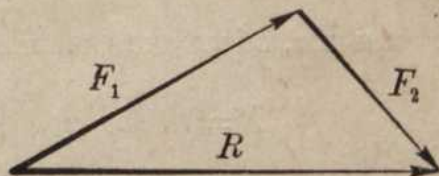
при  $\varphi = 0$  и их разности при  $\varphi = 180^\circ$ .

Перейдем теперь к случаю любого числа сходящихся сил. Пусть будут, напр., даны три сходящиеся силы  $F_1, F_2$  и  $F_3$  (черт. 5). Строя последовательно параллелограммы, найдем сначала равнодействующую  $AC$  сил  $F_1$  и  $F_2$ , затем равнодействующую  $R$  сил  $AC$  и  $F_3$ . Мы видим, однако, что нет необходимости выполнять построение всех этих параллелограммов. Достаточно построить многоугольную линию  $ABCD$ , стороны которой соответственно равны и параллельны силам  $F_1, F_2$  и  $F_3$ . Соединяя начальную точку  $A$  с конечной точкой  $D$ , мы получим равнодействующую  $R$ . Если точки  $D$  и  $A$  совпадут, то  $R = 0$ , и силы взаимно уравновешиваются. Эта операция называется геометрическим сложением, потому что к ней приложимы переместительный и сочетательный законы обыкновенного сложения. Полезно приучиться в случае даже двух сил прибегать не к построению параллелограмма, а к построению треугольника, как показано на чертеже 6.



Черт 5.

Отметим еще частный случай системы трех сходящихся сил  $F_1, F_2$  и  $F_3$ , когда они могут быть расположены вдоль трех ребер прямоугольного парал-



Черт. 6.



лелепипеда. Нетрудно видеть, что в этом случае равнодействующая  $R$  будет диагональю этого параллелепипеда, и мы получим

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \dots \dots \dots (5)$$

Задача разложения данной силы  $R$  на несколько сходящихся составляющих сил есть задача неопределенная, так как можно построить любое число многоугольников с заданной стороной  $R$ . В частности, разложение данной силы  $R$  на две будет вполне определенным тогда, когда наложены ограничивающие условия, позволяющие построить лишь единственный треугольник, например, если величины сил  $F_1$  и  $F_2$  заданы и требуется найти их направление. В самом деле, в этом случае задача приводится к построению треугольника по трем данным сторонам  $R$ ,  $F_1$  и  $F_2$ .

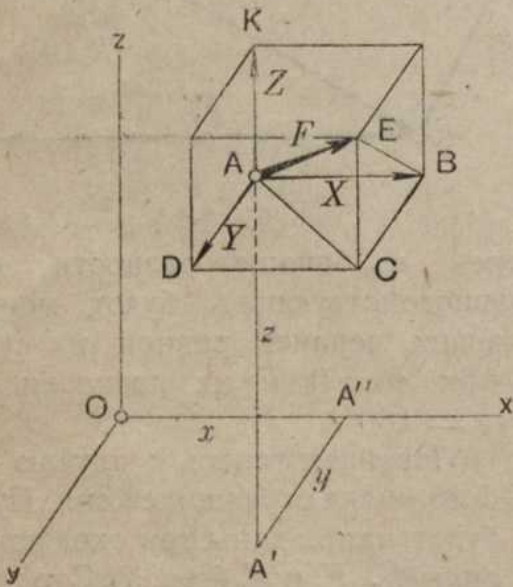
Перейдем теперь к определению силы методом координат. Рассмотрим прямоугольную систему осей координат  $Oxyz$  (черт. 7). Предположим, что сила  $F$  приложена к точке  $A$  с координатами  $(x, y, z)$ . Пусть будут  $(X, Y, Z)$  проекции силы  $F$  на оси координат  $Oxyz$ . Построим при точке  $A$  прямоугольный параллелепипед, стороны которого были бы параллельны осям  $Oxyz$ , и в котором  $F$  было бы диагональю. По свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда мы получим

$$AE^2 = AB^2 + AD^2 + AK^2;$$

но ребра этого параллелепипеда равны проекциям силы  $F$  на оси координат, именно  $AB = X$ ,  $AD = Y$ ,  $AK = Z$ . Таким образом получаем

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \dots \dots \dots (6).$$



Черт. 7.

Сравнивая формулу (6) с (5), мы видим, что силу  $F$  можно рассматривать, как равнодействующую трех сил  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , параллельных осям координат. Как и в формуле (5), мы берем в (6) корень в его арифметическом смысле. Чтобы определить углы, которые образует сила  $F$  с осями координат, вспомним из элементарной геометрии определение угла между двумя скрещивающимися прямыми. Согласно этого определения за угол силы  $F$  с осью  $Ox$  мы принимаем угол силы  $F$  с прямой  $AB$ . Обозначая этот угол через  $\alpha$ , мы получим из прямоугольного треугольника  $AEB$

$$X = F \cos \alpha.$$

Точно так же, обозначая через  $\beta$  и  $\gamma$  углы с осями  $Oy$  и  $Oz$ , мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X &= F \cos \alpha, & Y &= F \cos \beta, & Z &= F \cos \gamma, \\ \cos \alpha &= \frac{X}{F}, & \cos \beta &= \frac{Y}{F}, & \cos \gamma &= \frac{Z}{F}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

знак косинуса зависит от знака проекции, так как  $F$  мы берем всегда положительным. Если, например,  $X$  положительно, то угол  $\alpha$  лежит в первой



четверти; если же  $X$  отрицательно, то угол  $\alpha$  лежит во второй четверти. Таким образом мы видим, что шесть количеств  $(x, y, z)$  и  $(X, Y, Z)$  вполне определяют силу. Первые три координаты определяют точку приложения силы, через которую проходит прямая действия силы; три остальные количества  $(X, Y, Z)$  определяют по формулам (6) и (7) величину и направление силы. Мы будем называть эти шесть количеств шестью координатами силы и когда надо указать их явно, будем пользоваться обозначением  $F' \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ .

Заметим однако, что если не фиксировать положения силы на прямой ее действия, то для определения силы, как вектора скользящего, достаточно пяти координат: трех проекций  $(X, Y, Z)$  и, например, двух координат  $(x, y)$  точки пересечения прямой действия с плоскостью  $XOY$ .

**Примечание.**—Нетрудно составить уравнение прямой действия силы. Рассмотрим шесть координат силы  $F' \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ . Обозначим через  $(x', y', z')$  текущие координаты прямой  $\Delta$  действия силы  $F'$ . Тогда уравнения этой прямой будут

$$\frac{x' - x}{\cos \alpha} = \frac{y' - y}{\cos \beta} = \frac{z' - z}{\cos \gamma}.$$

Вставляя сюда значения косинусов из (7) и сокращая на  $F'$ , получим искомое уравнение в окончательном виде

$$\frac{x' - x}{X} = \frac{y' - y}{Y} = \frac{z' - z}{Z}.$$

За первые три  $(x, y, z)$  из шести координат силы  $F'$  можно взять координаты любой точки этой прямой  $\Delta$ . Возьмем, например, для  $z'$  какое-нибудь произвольное значение  $z'_0$ ; тогда уравнения

$$\frac{x' - x}{X} = \frac{z'_0 - z}{Z}, \quad \frac{y' - y}{Y} = \frac{z'_0 - z}{Z}$$

дадут для  $x'$  и  $y'$  некоторые значения  $x'_0, y'_0$ . Точка  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  также лежит на прямой  $\Delta$ ; в эту точку можно перенести силу  $F'$ , и, следовательно,

сила  $F'$  может быть представлена еще координатами  $F' \begin{pmatrix} x'_0, y'_0, z'_0 \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ .

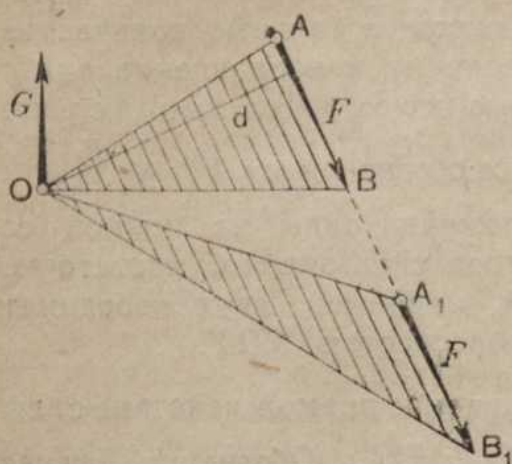
Перейдем теперь к важному вопросу о моменте силы. Моментом силы относительно точки называется удвоенная площадь треугольника, вершина которого лежит в данной точке, а основанием служит данная сила. Пусть будет  $F$  сила, момент  $G$  которой относительно точки  $O$  требуется найти (черт. 8). Мы имеем согласно определения

$$G = 2 \text{ пл. } \triangle OAB \dots \dots \dots (8)$$

То, что сила есть вектор скользящий, не влияет на определение величины момента, так как  $\text{пл. } \triangle OAB = \text{пл. } \triangle OA'B'$ . Условимся момент изображать вектором, основание которого лежит в точке  $O$ , длина которого пропорциональна удвоенной площади моментного треугольника, и, наконец, направление которого перпендикулярно плоскости моментного треугольника и идет в ту сторону, что, стоя по его направлению, мы видим, что сила  $F$  направлена слева направо. В отличие от силы, момент есть вектор при-



ложенный, так как точка его приложения закреплена. Очевидно также, что момент не будет меняться по величине и направлению, если точка  $O$  будет перемещаться по прямой, параллельной прямой действия силы; при этом будет меняться лишь точка приложения момента. Мы видим. (черт. 8), что



$$G = Fd \dots \dots \dots (9)$$

Следовательно, момент равен нулю, если точка  $O$  лежит на прямой действия силы. Так как

$$d = AO \sin (AO, F),$$

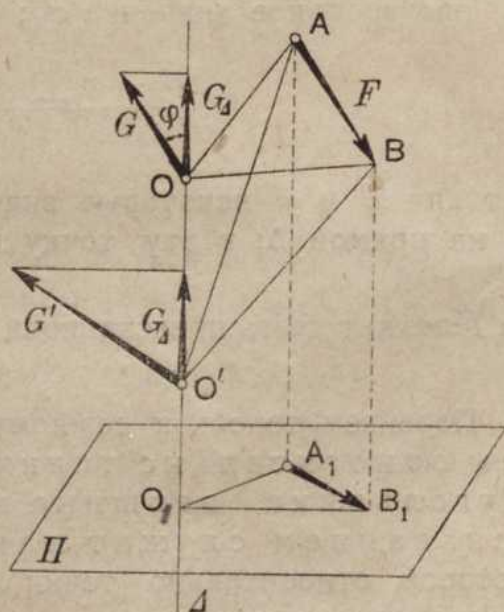
то

$$G = F \cdot AO \cdot \sin (AO, F),$$

Черт. 8.

Это выражение называется векторным произведением векторов  $F = AB$  и  $AO$ . Его обозначают символом  $[AB, AO]$  \*).

Перейдем теперь к определению понятия момента силы относительно оси. Моментом силы относительно оси называется проекция на эту ось момента силы относительно какой-нибудь точки этой оси. Пусть будет  $\Delta$  рассматриваемая ось, и  $F$  данная сила (черт. 9). Возьмем какую-нибудь точку  $O$  на оси и найдем момент  $G$  силы  $F$  относительно этой точки  $O$ . Чтобы получить момент относительно оси  $\Delta$ , надо  $G$  спроектировать на ось  $\Delta$ ; при этом мы получим момент  $G_\Delta$  относительно оси, при чем  $G_\Delta = G \cos \varphi$ . Чтобы это определение было полным, надо показать, что выбор точки  $O$  на оси  $\Delta$  действительно безразличен. Другими словами, если бы мы взяли какую-нибудь другую точку  $O'$  оси  $\Delta$ , то момент  $G'$  относительно точки  $O'$  был бы отличен от момента  $G$ , но проекции как  $G'$ , так и  $G$  на ось  $\Delta$  всегда между собою равны. Чтобы доказать это, проведем через какую-нибудь точку  $O_1$  оси  $\Delta$  плоскость  $\Pi \perp \Delta$  и спроектируем на эту плоскость силу  $F$ . Мы получим на плоскости  $\Pi$  вектор  $A_1B_1$ . Соединяя точки  $A_1$  и  $B_1$  с точкою  $O_1$ , построим на плоскости  $\Pi$  треугольник  $O_1A_1B_1$ , который будет общей проекцией на плоскость  $\Pi$  всех моментных треугольников, как-то  $OAB$ ,  $O'AB$ , и т. д. Так как угол между плоскостями тр-ков  $OAB$  и  $O_1A_1B_1$  равен углу между перпендикулярами  $G$  и  $G_\Delta$  к этим плоскостям, т. е. углу  $\varphi$ , то мы имеем:



Черт. 9.

$$\text{пл. } \triangle O_1A_1B_1 = \text{пл. } \triangle OAB \cos \varphi.$$

\*) Необходимо однако заметить, что для векторного произведения не применим основной закон умножения—закон переместительный; именно, мы будем иметь

$$[AB, AO] = -[AO, AB].$$

В этом нетрудно убедиться, заметив, что при взаимном перемещении векторов  $AB$  и  $AO$  направление вектора  $G$ , представляющего их векторное произведение, изменяется в противоположное.



Умножив это равенство на 2, получим на основании формулы (8)

$$2 \text{ пл. } \triangle O_1 A_1 B_1 = (2 \text{ пл. } \triangle OAB) \cos \alpha = G \cos \alpha.$$

С другой стороны мы имеем

$$G_{\Delta} = G \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$G_{\Delta} = 2 \text{ пл. } \triangle O_1 A_1 B_1 \dots \dots \dots (10)$$

Таким образом мы видим, что момент  $G_{\Delta}$  действительно не зависит от положения точки  $O$  на оси  $\Delta$  и равен удвоенной площади  $\triangle O_1 A_1 B_1$ . Следовательно, мы приходим еще к иному определению момента относительно оси:

Моментом силы относительно оси называется удвоенная площадь треугольника, основанием которого служит проекция силы на плоскость, перпендикулярную к оси, а вершиною — след оси на этой плоскости; момент расположен по оси в том направлении, чтобы относительно него проекция силы шла слева направо.

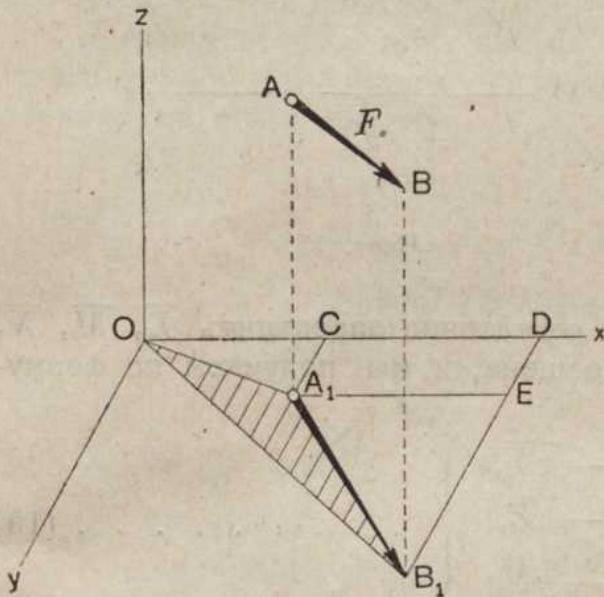
Покажем теперь, как, зная шесть координат силы  $F \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ , вычи-

слить ее моменты относительно осей координат  $G_x, G_y, G_z$ . Мы введем для них следующие обозначения

$$L = G_x, M = G_y, N = G_z \dots \dots (11)$$

Рассмотрим прямоугольную систему осей  $Oxyz$ , к которой отнесена сила  $F$ . Спроектируем силу  $F = AB$  на плоскость  $xOy$ . Мы получим вектор  $A_1 B_1$  (черт. 10), и, чтобы вычислить  $G_z$ , согласно предыдущего нам надо определить удвоенную площадь  $\triangle O A_1 B_1$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} CD = A_1 E = X, B_1 E = Y, \\ OC = x, CA_1 = DE = y. \end{aligned}$$



Черт. 10.

Далее

$$\begin{aligned} 2 \text{ пл. } \triangle O A_1 B_1 &= 2 \text{ пл. } \triangle ODB_1 - 2 \text{ пл. } \triangle OCA_1 - \\ &- 2 \text{ пл. } \triangle A_1 B_1 E - 2 \text{ пл. } \triangle A_1 CDE, \end{aligned}$$

или

$$2 \text{ пл. } \triangle O A_1 B_1 = (x + X)(y + Y) - xy - XY + 2yX.$$

Отсюда находим

$$N = G_z = 2 \text{ пл. } \triangle O A_1 B_1 = xY - yX.$$

Переставляя буквы в круговом порядке, получим  $L$  и  $M$ . Таким образом, будем иметь весьма важные формулы

$$\left. \begin{aligned} L &= yZ - zY, \\ M &= zX - xZ, \\ N &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$



Отсюда не трудно найти момент  $G$  относительно точки  $O$ . В самом деле,  $G$  есть вектор, все шесть координат которого  $(o, o, o; L, M, N)$  известны. Следовательно, мы по предыдущему получаем

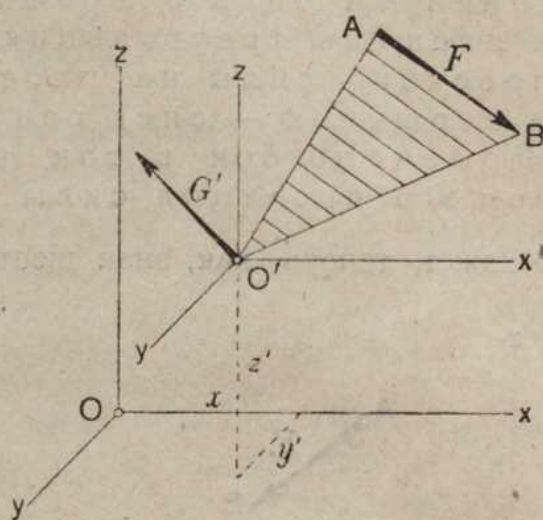
$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \dots \dots \dots (13)$$

Что касается углов  $a, b, c$ , образуемых  $G$  с осями координат, то их косинусы равны

$$\cos a = \frac{L}{G}, \quad \cos b = \frac{M}{G}, \quad \cos c = \frac{N}{G} \dots \dots \dots (14)$$

Найдем теперь, как на формулах (11) отражается преобразование начала координат. Рассмотрим вместе с системой осей  $Oxyz$  другую систему  $O'x'y'z'$ , параллельную первой, при чем точка  $O'$  имеет координаты  $(x', y', z')$ .

Пусть будет дана сила  $F \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$  своими шестью координатами относительно системы осей  $Oxyz$  (черт. 11). Обозначим через  $G'$  момент силы относительно точки  $O'$ . Пусть будут  $L', M', N'$  проекции момента  $G'$  на оси  $O'x'y'z'$ . Очевидно, что проекции момента  $G'$  на оси  $Oxyz$ , которые мы обозначим через  $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ , будут соответственно равны  $L', M', N'$ . Следова-



Черт. 11.

тельно, чтобы определить  $L', M', N'$ , достаточно определить  $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ , а такая задача нами только что была решена, и мы получаем по формулам (12)

$$\left. \begin{aligned} L' &= \bar{L} = \bar{y}Z - \bar{z}Y, \\ M' &= \bar{M} = \bar{z}X - \bar{x}Z, \\ N' &= \bar{N} = \bar{x}Y - \bar{y}X, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

где через  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  обозначены шесть координат силы относительно осей  $O'x'y'z'$ . Но очевидно, что проекции  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  силы  $F$  на оси  $O'x'y'z'$  равны соответственно проекциям  $(X, Y, Z)$  на оси  $Oxyz$ . Далее, координаты  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  точки  $A$  относительно осей  $O'x'y'z'$  выражаются через координаты  $(x, y, z)$  той же точки  $A$  и координаты  $(x', y', z')$  точки  $O'$  относительно осей  $Oxyz$  формулами

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - x', \\ \bar{y} &= y - y', \\ \bar{z} &= z - z'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Таким образом, формулы (15) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} L' &= (y - y')Z - (z - z')Y, \\ M' &= (z - z')X - (x - x')Z, \\ N' &= (x - x')Y - (y - y')X. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$



Формулы (17) можно представить иначе в виде

$$\left. \begin{aligned} L' &= (yZ - zY) - (y'Z - z'Y), \\ M' &= (zX - xZ) - (z'X - x'Z), \\ N' &= (xY - yX) - (x'Y - y'X). \end{aligned} \right\}$$

Обращая внимание на формулу (12), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} L' &= L - (y'Z - z'Y), \\ M' &= M - (z'X - x'Z), \\ N' &= N - (x'Y - y'X). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Заметим, что мы будем иметь  $L' = L$ ,  $M' = M$ ,  $N' = N$  во всех точках  $O'$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ), координаты которых обращают в нуль скобки формул (18), т.-е. во всех точках  $O'$ , координаты которых удовлетворяют двум уравнениям

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z}.$$

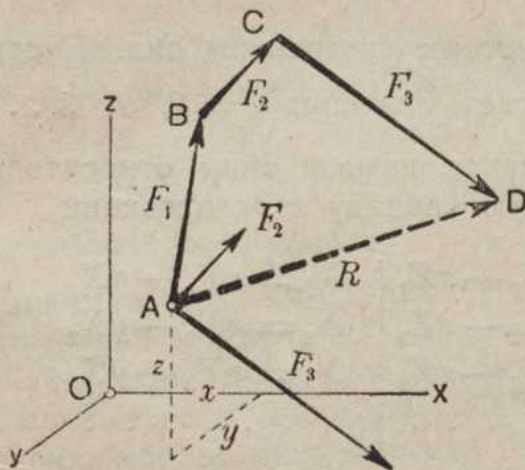
Это уравнение прямой, параллельной силе  $F$  и проходящей через точку  $O$ . Результат очевиден геометрически и уже указан выше, так как, перемещая точку  $O$  по прямой, параллельной силе  $F$ , мы не изменяем ни площади моментного треугольника, ни положения в пространстве его плоскости; следовательно, величина и направление  $G'$  остаются неизменными.

**Важное замечание.** Если сила с осью лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси равен нулю.

В самом деле, в этом случае ось лежит в плоскости моментного треугольника, и потому момент  $G$  перпендикулярен к оси; следовательно, его проекция на ось равна нулю.

## ГЛАВА II.

### СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ.



Черт. 12.

Рассмотрим теперь систему сходящихся сил

$$\left. \begin{aligned} F_1(X_1, Y_1, Z_1), \\ F_2(X_2, Y_2, Z_2), \\ F_3(X_3, Y_3, Z_3), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

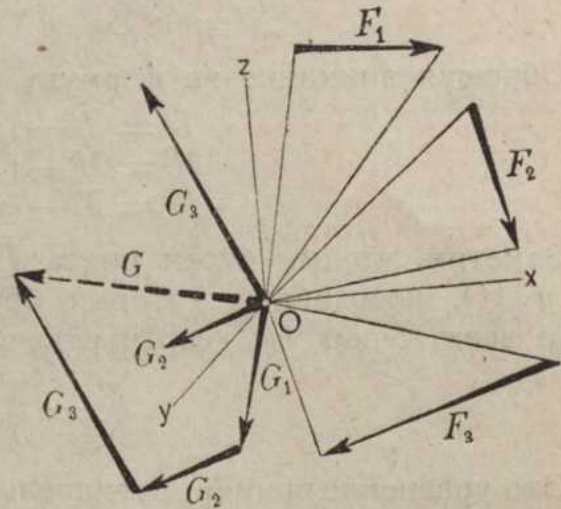
Пусть будет  $A(x, y, z)$  их точка схода (черт. 12). Построим многоугольную линию  $ABCD$ ; замыкая ее, получим равнодействующую  $R$ . Замечая, что проекция замыкающей равна сумме проекций колен ломаной, будем иметь, если обозначим через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  проекции силы  $R$ ,

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \Sigma X_i, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \Sigma Y_i, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots = \Sigma Z_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Мы видим, что геометрическое сложение векторов приводится к алгебраическому сложению их проекций. Так как к алгебраическому сложению применимы законы переместительности и сочетательности, то отсюда следует, что эти же законы имеют место и в геометрическом сложении, чем и оправдывается термин „геометрическое сложение“.



Перейдем теперь к новому понятию общего момента системы. Общим моментом системы сил или результирующим моментом относительно какой-нибудь точки называется геометрическая сумма моментов отдельных сил системы относительно той же точки. Это определение имеет общий характер, т.-е. распространяется не только на систему сходящихся сил, но и на любую систему сил. Рассмотрим какую-нибудь произвольную систему сил  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . Построим их моменты относительно точки  $O$ ; пусть будут  $G_1, G_2, G_3, \dots$  эти моменты (черт. 13). Складывая геометрически векторы  $G_1, G_2, G_3, \dots$  получим вектор  $G$ , который и будет, согласно определения, общим моментом системы. Обозначим проекции вектора  $G$  на оси координат через  $L, M, N$ , а проекции каждого вектора  $G_i$  через  $L_i, M_i, N_i$ , где  $i$  пробегает значения  $1, 2, 3, \dots$ . Из предыдущего, на основании свойств проекции ломаной и замыкающей, находим



Черт. 13.

$$\left. \begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots = \sum_i L_i, \\ M &= M_1 + M_2 + \dots = \sum_i M_i, \\ N &= N_1 + N_2 + \dots = \sum_i N_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Таким образом, мы получаем весьма простой способ вычислять общий момент системы.

Найдем теперь общий момент системы сходящихся сил. Пусть будет дано  $n$  сил  $F_i \left( \begin{smallmatrix} x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{smallmatrix} \right)$ , где  $i$  пробегает значения  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Вычислим проекции на оси координат момента каждой силы относительно начала координат. Мы получим следующую таблицу этих проекций

|                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| $L_1 = yZ_1 - zY_1$ | $M_1 = zX_1 - xZ_1$ | $N_1 = xY_1 - yX_1$ |
| $L_2 = yZ_2 - zY_2$ | $M_2 = zX_2 - xZ_2$ | $N_2 = xY_2 - yX_2$ |
| $L_3 = yZ_3 - zY_3$ | $M_3 = zX_3 - xZ_3$ | $N_3 = xY_3 - yX_3$ |
| $\dots \dots \dots$ | $\dots \dots \dots$ | $\dots \dots \dots$ |

Чтобы найти, например,  $L$ , мы должны составить сумму  $L_1 + L_2 + \dots$ . Вычисляя ее, будем иметь

$$L = L_1 + L_2 + \dots = y(Z_1 + Z_2 + \dots) - z(Y_1 + Y_2 + \dots).$$

Обращаясь к формулам (18), мы видим, что в скобках стоят проекции равнодействующей; следовательно, мы получаем

$$L = yZ - zY,$$

и аналогично будем иметь

$$M = zX - xZ,$$

$$N = xY - yX.$$







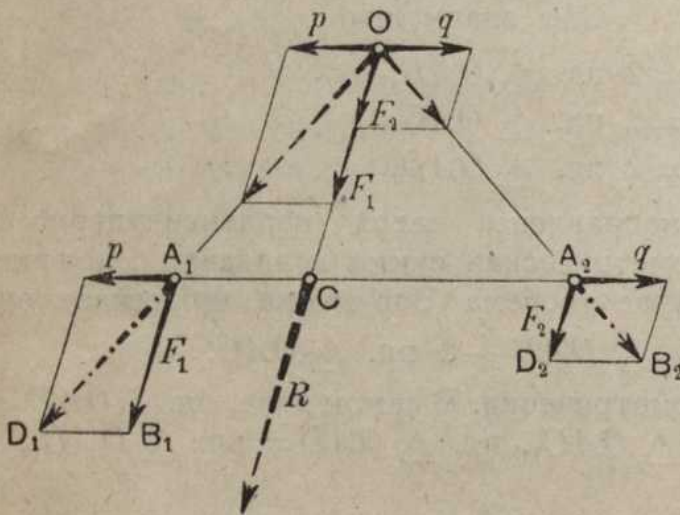
# ГЛАВА III.

## СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.

Силы называются параллельными, если прямые их действия параллельны между собою.

Если две параллельные силы имеют прямо противоположные направления, то они называются иногда антипараллельными.

Рассмотрим случай двух параллельных сил  $F_1$  и  $F_2$ . Зафиксируем их точки приложения  $A_1$  и  $A_2$ . Покажем, что две параллельные силы всегда имеют равнодействующую. Обратимся к



Черт. 16.

перенести в точку  $C$  прямой  $A_1A_2$ . Найдем рассмотрим треугольники

чертежу 16. Приложим в точках  $A_1$  и  $A_2$  две равные, направленные по  $A_1A_2$ , и прямо противоположные силы  $p$  и  $q$  ( $p=q$ ). Складывая силы  $F_1$  и  $p$  и силы  $F_2$  и  $q$ , получим равнодействующие  $A_1D_1$  и  $A_2B_2$ , которые можно перенести в точку их схода  $O$ . Разлагая их там вновь, получим две силы  $F_1$  и  $F_2$ , приложенные в точке  $O$ , и две взаимно уравновешивающихся силы  $p$  и  $q$ , приложенные в той же точке. Силы  $F_1$  и  $F_2$  дадут равнодействующую  $R=F_1+F_2$ , которую можно перенести в точку  $C$ . Для этого

$$\triangle A_1B_1D_1 \sim \triangle A_1OC \text{ и } \triangle A_2B_2D_2 \sim \triangle A_2OC.$$

Из подобия первых двух треугольников получаем

$$\frac{A_1C}{OC} = \frac{D_1B_1}{A_1B_1} = \frac{p}{F_1};$$

из подобия второй пары треугольников находим

$$\frac{A_2C}{OC} = \frac{D_2B_2}{A_2D_2} = \frac{q}{F_2}.$$

Деля одну пропорцию на другую, будем иметь

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1} \dots \dots \dots (21)$$

Таким образом, мы приходим к теореме.



Всякие две параллельные силы имеют равнодействующую, равную их сумме и им параллельную; ее направление делит расстояние между точками приложения составляющих внутренним образом на части, обратно пропорциональные составляющим силам.

Эту теорему можно получить, рассматривая параллельные силы, как предельный случай сходящихся сил.

Пусть будут даны две сходящихся силы  $F_1$  и  $F_2$ , приложенные в точках  $A_1$  и  $A_2$  (черт. 17). Переносим их в точку схода  $O$ , складывая по правилу параллелограмма, получим равнодействующую  $R$ , которую можно перенести в точку  $C$ . Из  $\triangle A_1OC$  и  $\triangle A_2OC$  имеем

$$\frac{A_1C}{OC} = \frac{\sin \alpha}{\sin A_1}; \quad \frac{A_2C}{OC} = \frac{\sin \beta}{\sin A_2}.$$

Деля эти пропорции одну на другую, найдем

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

Но из треугольников параллелограмма получаем

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Следовательно, предыдущая пропорция принимает вид

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

Когда точка  $O$  неограниченно удаляется, угол  $A_2$  стремится к  $180^\circ - A_1$ , и отношение

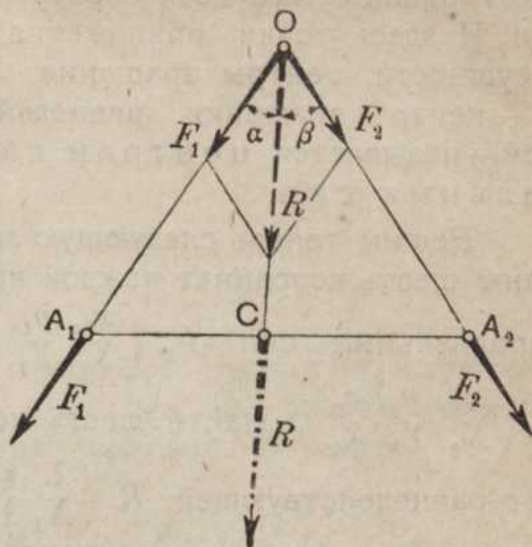
$$\frac{\sin A_2}{\sin A_1}$$

стремится к единице. Таким образом, в пределе получаем уже найденную выше формулу

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Примечание. Так как силы суть векторы скользящие, то точки их приложения неопределенны. Смысл же точек  $A_1$ ,  $A_2$  и  $C$  следующий. Если мы будем вращать прямые действия сил  $F_1$  и  $F_2$  вокруг точек  $A_1$  и  $A_2$ , оставляя их параллельными, то прямая действия равнодействующей будет вращаться вокруг точки  $C$ , оставаясь параллельною двум первым прямым. Самые же силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $R$  можно перемещать произвольно по их прямым действиям.

Если мы имеем несколько параллельных сил, то мы получим равнодействующую, складывая сначала две силы, полученную частичную равно-

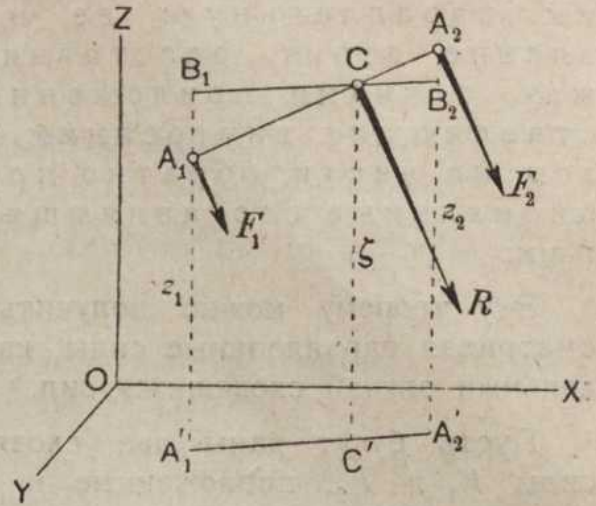


Черт. 17.



действующую с третьей силой, и т. д. Очевидно, что равнодействующая будет равна сумме всех составляющих сил. И здесь точки приложения суть, в сущности, центры вращения. Точка  $C$  — центр вращения равнодействующей — называется центром параллельных сил.

Решим теперь следующую задачу. Даны шесть координат каждой из двух параллельных сил  $F_1 \begin{pmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ X_1, Y_1, Z_1 \end{pmatrix}$  и  $F_2 \begin{pmatrix} x_2, y_2, z_2 \\ X_2, Y_2, Z_2 \end{pmatrix}$ . Найти шесть координат равнодействующей  $R \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ , где  $(\xi, \eta, \zeta)$  суть координаты центра двух параллельных сил  $F_1$  и  $F_2$  (черт. 18).



Черт. 18.

Прежде всего, так как силы параллельны, то их углы с осями координат соответственно равны между собой. Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 \cos \alpha, & X_2 &= F_2 \cos \alpha, \\ Y_1 &= F_1 \cos \beta, & Y_2 &= F_2 \cos \beta, \\ Z_1 &= F_1 \cos \gamma, & Z_2 &= F_2 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Для равнодействующей  $R$  будем иметь

$$R = F_1 + F_2, \quad X = R \cos \alpha, \quad Y = R \cos \beta, \quad Z = R \cos \gamma.$$

Заменяя в последних трех формулах  $R$  его значением  $F_1 + F_2$  и обращая внимание на предыдущие шесть формул, найдем

$$X = X_1 + X_2; \quad Y = Y_1 + Y_2; \quad Z = Z_1 + Z_2 \dots \dots \dots (22)$$

Следовательно, проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих.

Определим теперь координаты точки  $C$ ; найдем например, координату  $\zeta$ . Опустив из точек  $A_1$ ,  $C$  и  $A_2$  перпендикуляры  $A_1A_1'$ ,  $CC'$ ,  $A_2A_2'$  на плоскость  $xOy$ , проведя прямую  $B_1B_2 \parallel A_1A_2$ , будем иметь

$$A_1B_1 = \zeta - z_1; \quad A_2B_2 = z_2 - \zeta.$$

Из подобия  $\triangle A_1B_1C$  и  $\triangle A_2B_2C$ , получим

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C}{A_2C}.$$

Обращая внимание на формулу (21) и значения  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , найдем

$$\frac{\zeta - z_1}{z_2 - \zeta} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Из этого уравнения легко получить  $\zeta$ . Именно, освобождаясь от знаменателя, придем к уравнению

$$\zeta F_1 - F_1 z_1 = F_2 z_2 - \zeta F_2,$$

и отсюда

$$\zeta = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2}.$$



Остальные координаты  $\xi$  и  $\eta$  получаются аналогичным путем, и мы окончательно придем к формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}, \\ \eta &= \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}, \\ \zeta &= \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Чтобы перейти к общему предложению для любого числа сил, воспользуемся методом перехода от  $n$  к  $n+1$ . Для двух сил мы задачу решить умеем. Предположим теперь, что нам даны три параллельных силы

$$F_1 \left( \begin{matrix} x_1, y_1, z_1 \\ X_1, Y_1, Z_1 \end{matrix} \right), \quad F_2 \left( \begin{matrix} x_2, y_2, z_2 \\ X_2, Y_2, Z_2 \end{matrix} \right) \quad \text{и} \quad F_3 \left( \begin{matrix} x_3, y_3, z_3 \\ X_3, Y_3, Z_3 \end{matrix} \right).$$

Сложим сначала две силы  $F_1$  и  $F_2$ . Мы получим равнодействующую  $R' \left( \begin{matrix} \xi', \eta', \zeta' \\ X', Y', Z' \end{matrix} \right)$ , где

$$R' = F_1 + F_2,$$

$$\text{и, например, } \xi' = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}, \quad \text{т.-е. } R' \xi' = F_1 x_1 + F_2 x_2.$$

Складывая теперь силу  $R'$  с силой  $F_3$ , будем иметь равнодействующую  $R \left( \begin{matrix} \xi, \eta, \zeta \\ X, Y, Z \end{matrix} \right)$ . Мы найдем

$$\begin{aligned} R &= R' + F_3 = F_1 + F_2 + F_3, \\ X &= X' + X_3 = X_1 + X_2 + X_3, \\ Y &= Y' + Y_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3, \\ Z &= Z' + Z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{aligned}$$

Чтобы найти, например, координату  $\xi$ , мы должны воспользоваться формулами (23), применив их для сил  $R'$  и  $F_3$ . Мы будем иметь

$$\xi = \frac{R' \xi' + F_3 x_3}{R' + F_3},$$

или, обращая внимание на предыдущие формулы,

$$\xi = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Так же найдем координаты  $\eta$  и  $\zeta$ . Зная решение задачи для трех сил, подобно предыдущему сможем решить ее для четырех сил, и т. д. Очевидно, что формулы имеют общий характер, и мы получаем важные формулы

$$\left. \begin{aligned} R &= F_1 + F_2 + \dots = \Sigma_i F_i, \\ X &= X_1 + X_2 + \dots = \Sigma_i X_i, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots = \Sigma_i Y_i, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots = \Sigma_i Z_i, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

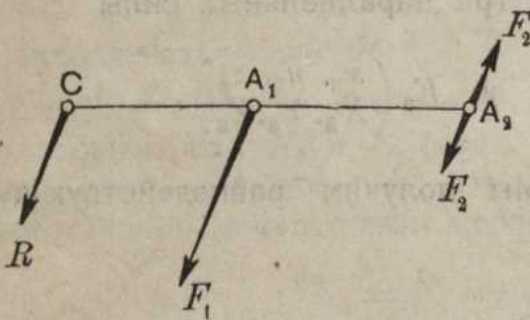




$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{\sum_i F_i x_i}{R}, \\ \eta &= \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{\sum_i F_i y_i}{R}, \\ \zeta &= \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{\sum_i F_i z_i}{R}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Перейдем теперь к случаю двух антипараллельных сил.

Предположим, что нам даны две антипараллельные силы  $F_1$  и  $F_2$ ; зафиксируем их точки приложения  $A_1$  и  $A_2$ . Мы будем рассматривать только тот случай, когда силы  $F_1$  и  $F_2$  между собою неравны; пусть будет, напр.,  $F_1 > F_2$  (черт. 19). Разложим силу  $F_1$  на две параллельных так, чтобы одна была равна  $F_2$  и приложена в точке  $A_2$ . Обозначим величину второй составляющей через  $R$ . Так как должно быть  $R + F_2 = F_1$ , то  $R = F_1 - F_2$ . Найдем положение точки  $C$ . Так как силы  $R$  и



Черт. 19

$F_2$  имеют равнодействующую  $F_1$ , то должно быть

$$\frac{CA_1}{A_1 A_2} = \frac{F_2}{R},$$

или

$$CA_1 = A_1 A_2 \frac{F_2}{F_1 - F_2} \dots \dots \dots (26)$$

Две равные между собою силы  $F_2$ , приложенные в точке  $A_2$ , взаимно уравниваются, и мы получаем вместо системы двух антипараллельных сил  $F_1$  и  $F_2$  одну равнодействующую  $R$ , которая равна разности данных сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы, лежит за большей силой, и ее направление делит отрезок  $A_1 A_2$  в точке  $C$  внешним образом на части, обратно пропорциональные составляющим силам. Последняя часть предложения доказывается следующим образом. Из формулы (26) имеем

$$CA_1 \cdot F_1 - CA_1 \cdot F_2 = A_1 A_2 \cdot F_2,$$

или

$$CA_1 \cdot F_1 = CA_1 \cdot F_2 + A_1 A_2 \cdot F_2 = CA_2 \cdot F_2,$$

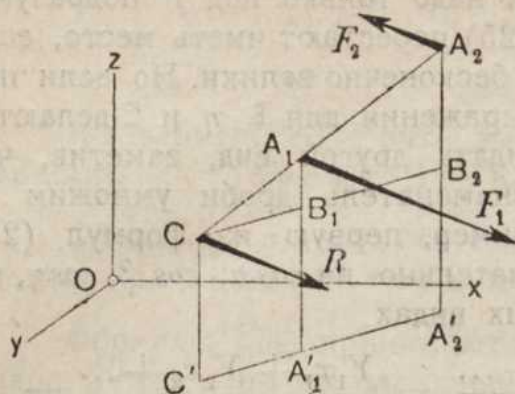
т. е.

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1} \dots \dots \dots (27)$$

Предположим, что  $F_1$  уменьшается, приближаясь к  $F_2$ . При этом  $R$  будет стремиться к нулю, а  $CA_1$ , как это следует из формулы (26), к бесконечности. Таким образом, если мы имеем две равные антипараллельные силы, то их равнодействующая равна нулю и приложена в бесконечно удаленной точке. Не вводя бесконечно удаленных элементов, мы заключаем, что рассматриваемая система двух сил равнодействующей не имеет; такая система называется парю сил и представляет на ряду с силой первичный механический элемент. Отлагая изучение пар до следующей главы, мы будем здесь рассматривать только такие антипараллельные силы, которые равнодействующую имеют.



Пусть будут даны две антипараллельные силы  $F'_1$  и  $F'_2$ , причем  $F'_1 > F'_2$ . Обозначим углы, образуемые силою  $F'_1$  с осями координат, через  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Черт. 20.

Тогда сила  $R$  будет образовывать с осями те же углы, а сила  $F'_2$  — углы  $\pi + \alpha, \pi + \beta, \pi + \gamma$ , так как, чтобы получить направление  $F'_2$ , надо направление  $F'_1$  повернуть на  $180^\circ$  (черт. 20). Пусть будут даны силы  $F'_1$  и  $F'_2$  их координатами

$$F'_1 \begin{pmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ X_1, Y_1, Z_1 \end{pmatrix}, \\ F'_2 \begin{pmatrix} x_2, y_2, z_2 \\ X_2, Y_2, Z_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим координаты силы  $R$  через  $\begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ .

Мы имеем

$$\begin{aligned} X_1 &= F'_1 \cos \alpha, & X_2 &= -F'_2 \cos \alpha, & X &= R \cos \alpha, \\ Y_1 &= F'_1 \cos \beta, & Y_2 &= -F'_2 \cos \beta, & Y &= R \cos \beta, \\ Z_1 &= F'_1 \cos \gamma, & Z_2 &= -F'_2 \cos \gamma, & Z &= R \cos \gamma. \end{aligned}$$

Так как  $R = F'_1 - F'_2$ , то из этих соотношений получим

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad Z = Z_1 + Z_2, \dots (28)$$

т. е. формулы того же вида, как и формулы (22). Чтобы найти, например, координату  $\zeta$  точки  $C$ , опустим из точек  $C, A_1$  и  $A_2$  перпендикуляры на плоскость  $xOy$  и проведем прямую  $CB_2 \parallel C'A'_2$ . Мы будем иметь

$$A_1 B_1 = z_1 - \zeta, \quad A_2 B_2 = z_2 - \zeta.$$

Из подобия  $\triangle C A_1 B_1$  и  $\triangle C A_2 B_2$  находим

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{C A_1}{C A_2} = \frac{F'_2}{F'_1},$$

или

$$\frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta} = \frac{F'_2}{F'_1}.$$

Решая это уравнение относительно  $\zeta$ , получим

$$\zeta = \frac{F'_1 z_1 - F'_2 z_2}{F'_1 - F'_2}. \dots (29)$$

Аналогичные формулы имеют место для координат  $\xi$  и  $\eta$ . Умножая числитель и знаменатель последней формулы на  $-1$ , будем также иметь

$$\zeta = \frac{F'_2 z_2 - F'_1 z_1}{F'_2 - F'_1}. \dots (30)$$

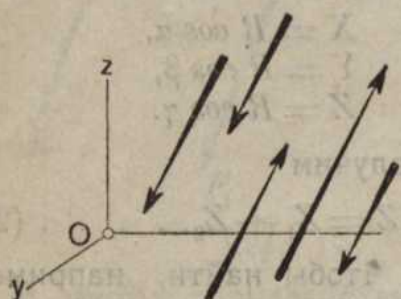
Сделаем следующее условие. Примем одно из направлений сил  $F'_1$  и  $F'_2$  за положительное и будем обозначать через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы этого направления с осями координат. Те силы, которые совпадают с положительным направлением, будем считать положительными, а силы противоположного направления — отрицательными. Таким образом, в отличие от предыдущего, мы будем здесь под количествами  $F$  и  $R$  подразумевать алгебраические количества. Очевидно, что какое бы из двух направлений  $F'_1$  или  $F'_2$  ни было принято за положительное, формула (28) имеет место; далее, как формула (29), так и формула (30) принимают вид

$$\zeta = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2},$$



т. е. совершенно совпадают по виду с формулами (23). Не трудно видеть, что и при любом числе сил результат будет таков же. Следовательно, формулы (24) и (25) имеют общий характер; надо только под  $F'$  подразумевать алгебраические количества. Формулы (25) перестают иметь место, если  $R=0$ , так как в этом случае  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  будут бесконечно велики. Но если при этом и числители обращаются в нуль, то выражения для  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  делаются неопределенными. Формулам (25) можно придать другой вид, заметив, что результат не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножим на на одно и то же количество. Возьмем, например, первую из формул (25). Умножая числитель и знаменатель последовательно на  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , мы можем представить эту формулу в следующих видах

$$\xi = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{X_1 x_1 + X_2 x_2 + \dots}{X_1 + X_2 + \dots} = \frac{Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + \dots}{Y_1 + Y_2 + \dots} = \frac{Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + \dots}{Z_1 + Z_2 + \dots} \dots \dots \dots (31)$$



Черт. 21.

Аналогичные выражения мы получим и для  $\eta$  и  $\zeta$ .

Очевидно, что выражения для  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  зависят только от относительного значения количеств  $F_1$ ,  $F_2$ , . . .

Рассмотрим теперь общий случай системы параллельных сил (черт. 21). Найдем общий момент этой системы относительно осей координат. Для этого надо составить выражение отдельных моментов всех сил относительно осей.

Мы получим при этом следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= y_1 Z_1 - z_1 Y_1, & M_1 &= z_1 X_1 - x_1 Z_1, & N_1 &= x_1 Y_1 - y_1 X_1, \\ L_2 &= y_2 Z_2 - z_2 Y_2, & M_2 &= z_2 X_2 - x_2 Z_2, & N_2 &= x_2 Y_2 - y_2 X_2, \\ L_3 &= y_3 Z_3 - z_3 Y_3, & M_3 &= z_3 X_3 - x_3 Z_3, & N_3 &= x_3 Y_3 - y_3 X_3, \\ &\dots & & & \end{aligned} \right\} \dots \dots (32)$$

Обозначим, по прежнему, общий момент системы относительно точки

$O$  через  $G \begin{pmatrix} 0, 0, 0 \\ L, M, N \end{pmatrix}$ .

Мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + L_3 + \dots, \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 + \dots, \\ N &= N_1 + N_2 + N_3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

Очевидно, что эти формулы будут пригодны всегда, как в случае, когда  $R \neq 0$ , так и для случая, когда  $R=0$ . Выполним теперь одно преобразование, имеющее место только в том случае, если  $R \neq 0$ . Складывая, например,  $L_1$ , получим

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = (y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 + \dots) - (z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + z_3 Y_3 + \dots).$$

Суммы, стоящие в скобках, можно преобразовать. Для этого обратимся ко второму и третьему из уравнений (25). Умножая числитель и знаменатель второго на  $\cos \gamma$ , а третьего на  $\cos \beta$ , будем иметь

$$\eta = \frac{y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 + \dots}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots}, \quad \zeta = \frac{z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + z_3 Y_3 + \dots}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots},$$

откуда, обращая внимание на формулы (24),

$$y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 + \dots = \eta Z, \quad z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + z_3 Y_3 + \dots = \zeta Y.$$



Следовательно, выполняя аналогичные операции с формулами для  $M$  и  $N$ , мы будем иметь

$$\begin{aligned} L &= \eta Z - \zeta Y, \\ M &= \zeta X - \xi Z, \dots \dots \dots (34) \\ N &= \xi Y - \eta X. \end{aligned}$$

Но формулы (34) суть выражения моментов равнодействующей, и мы приходим к теореме Вариньона для случая параллельных сил:

Общий момент системы параллельных сил равен моменту равнодействующей.

Формулы (34) принимают неопределенный вид, если равнодействующая равна нулю, и центр параллельных сил лежит в бесконечности. Чтобы в этом случае вычислить общий момент системы, необходимо обратиться к формулам (33) и (32). Докажем следующую важную теорему:

Если равнодействующая системы параллельных сил равна нулю, то общий момент системы для всех точек пространства постоянен.

Возьмем какую-нибудь точку пространства  $O'$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) и вычислим для нее общий момент системы. Вычисляя по формулам (18) главы I проекции моментов  $G_1'$ ,  $G_2'$ ,  $G_3'$ , ... отдельных сил системы относительно точки  $O'$ , будем иметь

$$\begin{aligned} L_1' &= L_1 - (y'Z_1 - z'Y_1), & M_1' &= M_1 - (z'X_1 - x'Z_1), \\ L_2' &= L_2 - (y'Z_2 - z'Y_2), & M_2' &= M_2 - (z'X_2 - x'Z_2), \\ L_3' &= L_3 - (y'Z_3 - z'Y_3), & M_3' &= M_3 - (z'X_3 - x'Z_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1' &= N_1 - (x'Y_1 - y'X_1), \\ N_2' &= N_2 - (x'Y_2 - y'X_2), \\ N_3' &= N_3 - (x'Y_3 - y'X_3), \end{aligned}$$

Обозначим проекции общего момента  $G'$  относительно точки  $O'$  на оси координат через  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$ . Мы будем иметь

$$\begin{aligned} L' &= L_1' + L_2' + L_3' + \dots, \\ M' &= M_1' + M_2' + M_3' + \dots, \\ N' &= N_1' + N_2' + N_3' + \dots. \end{aligned}$$

Вычисляя, например,  $L'$ , получим из предыдущих формул

$$L' = L_1' + L_2' + L_3' + \dots = L_1 + L_2 + L_3 + \dots - [y'(Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots) - z'(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)],$$

т.-е.

$$L' = L - (y'Z - z'Y),$$

и аналогично

$$\begin{aligned} M' &= M - (z'X - x'Z), \\ N' &= N - (x'Y - y'X). \end{aligned}$$

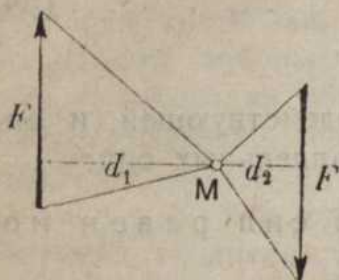
Если равнодействующая равна нулю, то  $X=Y=Z=0$ , и мы будем иметь

$$L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N. \dots \dots \dots (35)$$

Таким образом, теорема доказана.



Самым простым случаем, когда равнодействующая равна нулю, является случай пары сил. Из только-что доказанной общей теоремы следует, что момент пары постоянен для всех точек пространства. Найдем, чему он равен. Пусть будет дана пара сил (черт. 22). Вычислим ее момент относительно какой-нибудь точки  $M$  ее плоскости. Момент левой силы  $F'$  будет равен  $F'd_1$  и направлен перпендикулярно к плоскости чертежа вверх. Момент правой силы равен  $F'd_2$  и также направлен перпендикулярно к плоскости чертежа вверх. Следовательно, общий момент системы этих двух сил, т. е. момент пары, будет направлен вверх перпендикулярно к плоскости чертежа и равен



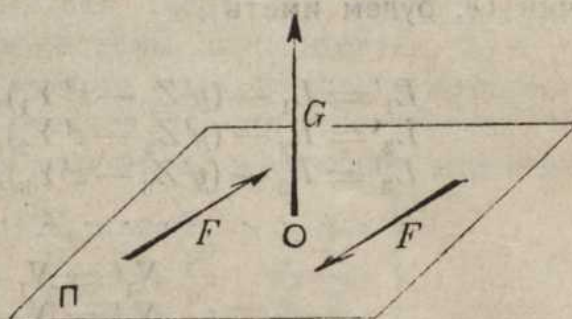
Черт. 22.

$$G = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = Fd \dots \dots \dots (36)$$

Перпендикулярное расстояние между силами пары называется плечом пары. Таким образом, мы получаем следующую теорему:

Момент пары равен произведению силы на плечо, перпендикулярен к плоскости пары и направлен в ту сторону, в которой должен поместиться на плоскости пары между силами наблюдатель, чтобы видеть силы направленными слева направо.

Полезно усвоить себе изображение пары и ее момента  $G$ , данное на чертеже 23. Так как момент пары относительно всех точек пространства один и тот же, то, чтобы получить момент пары для всякой другой точки пространства  $O'$ , достаточно перенести  $G$  параллельно самому себе из точки  $O$  в точку  $O'$ . Отлагая изучение пар до дальнейшего, мы дадим здесь пример на приведение системы параллельных сил.



Черт. 23.

**Пример.** — Пусть будут даны четыре силы

$$F_1 \begin{pmatrix} 0, 0, 1 \\ 2, 2, 3 \end{pmatrix}; \quad F_2 \begin{pmatrix} 1, 2, 1 \\ 4, 4, 6 \end{pmatrix}; \quad F_3 \begin{pmatrix} 2, 1, 1 \\ -2, -2, -3 \end{pmatrix}; \quad F_4 \begin{pmatrix} 5, 2, 7 \\ 6, 6, 9 \end{pmatrix}.$$

Из пропорциональности проекций этих сил на соответствующие оси мы заключаем, что силы параллельны.

Примем направление силы  $F_1$  за положительное.

Тогда силы  $F_1, F_2, F_4$  будут положительными, а сила  $F_3$  — отрицательной. Именно мы будем иметь

$$F_1 = +\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = +\sqrt{17}, \quad F_3 = -\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = -\sqrt{17}, \\ F_2 = +\sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} = +2\sqrt{17}, \quad F_4 = +\sqrt{6^2 + 6^2 + 9^2} = +3\sqrt{17}.$$

Положительное направление образует с осями координат углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , косинусы которых равны

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$



Найдем координаты равнодействующей  $R \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ X, Y, Z \end{pmatrix}$ . Мы будем иметь

$$X = 2 + 4 - 2 + 6 = +10,$$

$$Y = 2 + 4 - 2 + 6 = +10,$$

$$Z = 3 + 6 - 3 + 9 = +15.$$

Чтобы определить координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$  центра этих параллельных сил, обратимся к формулам (31), заменив  $F_i$  их проекциями, чтобы не иметь дела с корнями. Из этих формул получим

$$\xi = \frac{X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 + X_4 x_4}{X}, \quad \eta = \frac{Y_1 y_1 + Y_2 y_2 + Y_3 y_3 + Y_4 y_4}{Y},$$

$$\zeta = \frac{Z_1 z_1 + Z_2 z_2 + Z_3 z_3 + Z_4 z_4}{Z},$$

или

$$\xi = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot 5}{10} = \frac{30}{10} = 3; \quad \eta = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5};$$

$$\zeta = \frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 9 \cdot 7}{15} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}.$$

При вычислении общего момента  $G (L, M, N)$ , выгодно воспользоваться теоремою Вариньона. Мы будем иметь

$$L = \eta Z - \zeta Y = \frac{9}{5} \cdot 15 - \frac{23}{5} \cdot 10 = 27 - 46 = -19;$$

$$M = \zeta X - \xi Z = \frac{23}{5} \cdot 10 - 3 \cdot 15 = 46 - 45 = +1;$$

$$N = \xi Y - \eta X = 3 \cdot 10 - \frac{9}{5} \cdot 10 = 30 - 18 = +12.$$

Отсюда находим

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = \sqrt{19^2 + 1^2 + 12^2} = \sqrt{506}.$$

Углы  $a, b, c$ , образуемые  $G$  с осями координат, определяются из формул

$$\cos a = -\frac{19}{\sqrt{506}}; \quad \cos b = +\frac{1}{\sqrt{506}}; \quad \cos c = +\frac{12}{\sqrt{506}}.$$

Если бы мы захотели вычислить общий момент системы  $G (L, M, N)$  непосредственно, а не исходя из теоремы Вариньона, то пришлось бы вычислить моменты отдельных сил, и мы имели бы следующую таблицу:

|            |           |           |            |           |           |            |           |           |
|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|
| $L_1 = 0.$ | $3 - 1.$  | $2 = -2$  | $M_1 = 1.$ | $2 - 0.$  | $3 = +2$  | $N_1 = 0.$ | $2 - 0.$  | $2 = 0$   |
| $L_2 = 2.$ | $6 - 1.$  | $4 = +8$  | $M_2 = 1.$ | $4 - 1.$  | $6 = -2$  | $N_2 = 1.$ | $4 - 2.$  | $4 = -4$  |
| $L_3 = 1.$ | $-3 - 1.$ | $-2 = -1$ | $M_3 = 1.$ | $-2 - 2.$ | $-3 = +4$ | $N_3 = 2.$ | $-2 - 1.$ | $-2 = -2$ |
| $L_4 = 2.$ | $9 - 7.$  | $6 = -24$ | $M_4 = 7.$ | $6 - 5.$  | $9 = -3$  | $N_4 = 5.$ | $6 - 2.$  | $6 = +18$ |
| $L =$      | $= -19$   |           | $M =$      | $= +1$    |           | $N =$      | $= +12$   |           |

Здесь  $L, M, N$  определены по формулам

$$L = \sum_i L_i, \quad M = \sum_i M_i, \quad N = \sum_i N_i,$$

и мы видим, что мы пришли к прежним результатам, но только более длинным путем.



# ГЛАВА IV.

## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

Известно, что под действием сил всемирного тяготения каждая материальная частица притягивается к земле, причем сила тяжести направлена приблизительно к центру земли. Рассмотрим два направления силы тяжести, образующие между собою угол в  $90^\circ$  (черт. 24). Чтобы перейти из  $A$  в  $B$  надо переместиться на четверть земного меридиана, т.е. в круглых числах на 10.000.000 метров. Чтобы угол между двумя отвесными прямыми был равен  $1''$ , надо переместиться на

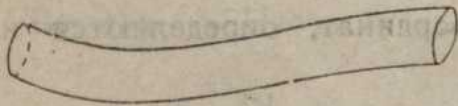
$$\frac{10000000}{90 \cdot 60 \cdot 60} = 30,9 \text{ метра} \dots (37)$$

Отсюда следует, что силы притяжения отдельных частиц небольших предметов можно считать параллельными друг другу. Пусть будет дано какое-нибудь тело; разобьем это тело на бесконечно малые частицы. Каждая частица притягивается к земле. Общая равнодействующая всех этих отдельных, параллельных между собою, сил притяжения есть вес тела, а центр этих параллельных сил называется центром тяжести тела.

Мы будем разыскивать центр тяжести материальных линий, поверхностей и тел.

Материальные линии и поверхности мыслятся, как пределы материальных тел.

Рассмотрим тело в виде стержня (черт. 25) и некоторую среднюю линию внутри его. Неограниченно уплотняя тело так, чтобы количество материи, заключающейся между любыми перпендикулярными к средней линии сечениями, оставалось неизменным и сжималось к средней линии, мы в пределе и получим материальную линию, совпадающую со средней линией тела.



Черт. 25.

Пусть будет  $\Delta s$  элемент длины материальной линии,  $\Delta m$  — масса на этом элементе длины. Тогда частное  $\bar{\rho}$

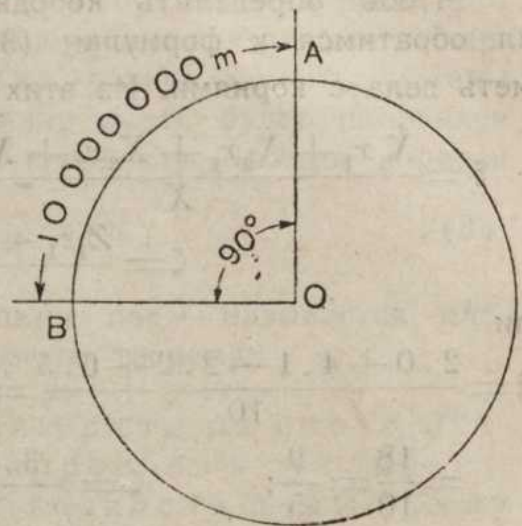
$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta s} \dots (38)$$

называется среднею плотностью линии в данном месте. Переходя к пределу, получим истинную плотность  $\rho$  в данной точке линии

$$\rho = \lim \left( \frac{\Delta m}{\Delta s} \right)_{\Delta s \rightarrow 0}$$

или, в дифференциальном обозначении,

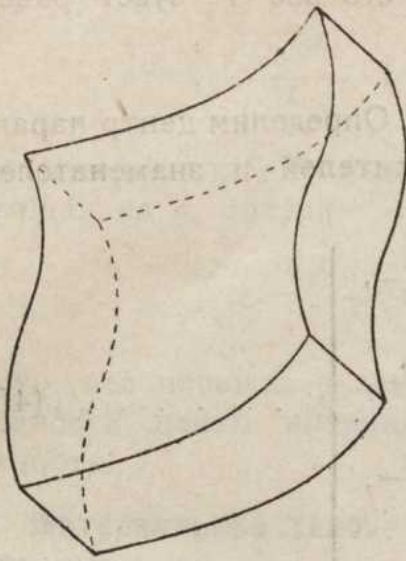
$$\rho = \frac{dm}{ds}, \quad dm = \rho ds. \dots (39)$$



Черт. 24.



Точно так же рассмотрим тело в виде слоя (черт. 26) и некоторую среднюю поверхность внутри его. Неограниченно уплотнят тело так, чтобы количество материи, заключающейся внутри любой цилиндрической поверхности, перпендикулярной к средней поверхности, оставалось неизменным и сжималось к средней поверхности, мы в пределе и получим материальную поверхность, совпадающую со среднюю поверхность рассматриваемого тела.



Черт. 26.

Пусть будет  $\Delta\sigma$  элемент площади материальной поверхности,  $\Delta m$ —масса на этом элементе. Тогда частное  $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} \dots \dots \dots (40)$$

называется среднюю плотностью поверхности в данном месте. Переходя к пределу, получим истинную плотность в данной точке

$$\rho = \lim \left( \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} \right)_{\Delta\sigma \rightarrow 0}$$

или, в дифференциальном обозначении,

$$\rho = \frac{dm}{d\sigma}, \quad dm = \rho d\sigma \dots \dots \dots (41)$$

Наконец, пусть будет  $\Delta v$  элемент объема тела, и  $\Delta m$ —масса этого элемента. Тогда частное  $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta v} \dots \dots \dots (42)$$

называется среднюю плотностью тела в данном месте, а предел  $\rho$  этого частного

$$\rho = \lim \left( \frac{\Delta m}{\Delta v} \right)_{\Delta v \rightarrow 0}$$

называется истинною плотностью тела в данной точке, или, в дифференциальном обозначении,

$$\rho = \frac{dm}{dv}, \quad dm = \rho dv \dots \dots \dots (43)$$

Во всех этих трех случаях истинная плотность  $\rho$  может меняться от точки к точке. Поэтому, вообще,  $\rho$  есть функция координат  $(x, y, z)$  рассматриваемой точки

$$\rho = f(x, y, z) \dots \dots \dots (44)$$

Если во всех точках истинная плотность одна и та же, то линия, поверхность или тело называются однородными.

Примечание. Очевидно, что предельные понятия материальной поверхности или линии можно применять к практике во всех тех случаях, когда можно пренебрегать соответственно или толщиной тела, или и толщиной, и шириною, и рассматривать только длину тела. Таковы, например, случай листа бумаги или длинного куска проволоки.



Перейдем теперь к определению центра тяжести какого-нибудь материального предмета. Разобьем его на бесконечно малые элементы. Обозначим через  $m_i$  массу какого-нибудь элемента; тогда его вес  $F'_i$  будет равен

$$F'_i = m_i g,$$

где  $g$  есть ускорение, производимое силою тяжести. Определим центр параллельных сил  $F'_i$  по формулам (25). Сокращая числителей и знаменателей на  $g$ , мы получим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \\ \eta &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \\ \zeta &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}, \\ M &= \sum_i m_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

Мы видим, что эта точка с координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$  существует и в том случае, если предмет находится вне действия силы тяжести; ее положение зависит от распределения масс. Поэтому к центру тяжести можно подойти иначе, с более общей точки зрения. Введем следующее определение:

Центром инерции материальной системы называется точка с координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$ , определяемыми формулами (45).

Очевидно, что у всякой материальной системы, как неизменяемой, так и изменяемой, во всякий момент есть определенный центр инерции независимо от того, весит система или нет. В частном случае весомой системы центр тяжести совпадает с центром инерции, как это следует из вывода формул (45). Применим теперь формулы (45) отдельно к материальной линии, материальной поверхности и телу.

**Материальная линия.**—Разобьем материальную линию на элементы длины  $\Delta s$  с массами  $\Delta m$ . Опуская указатель  $i$ , мы получим из формул (45)

$$\xi = \frac{\sum x \Delta m}{M}, \quad \eta = \frac{\sum y \Delta m}{M}, \quad \zeta = \frac{\sum z \Delta m}{M}, \quad M = \sum \Delta m.$$

Переходя к пределу и обращая внимание на формулы (39), будем иметь

$$\xi = \frac{\int x \rho ds}{M}, \quad \eta = \frac{\int y \rho ds}{M}, \quad \zeta = \frac{\int z \rho ds}{M}, \quad M = \int \rho ds \quad \dots \dots (46)$$

Если линия, однородна, то  $\rho$  во всех слагаемых одинаково; вынося  $\rho$  за скобки и сокращая на него, получим

$$\xi = \frac{\int x ds}{L}, \quad \eta = \frac{\int y ds}{L}, \quad \zeta = \frac{\int z ds}{L}, \quad L = \int ds, \quad \dots \dots \dots (47)$$

где  $L$  есть длина рассматриваемой линии. Мы видим, что в случае однородности положение центра инерции линии зависит исключительно от ее геометрического вида.

**Материальная поверхность.**—Разобьем материальную поверхность на элементы площади  $\Delta s$  с массами  $\Delta m$ . Опуская указатель  $i$ , мы получим из формул (45)

$$\xi = \frac{\sum \sum x \Delta m}{M}, \quad \eta = \frac{\sum \sum y \Delta m}{M}, \quad \zeta = \frac{\sum \sum z \Delta m}{M}, \quad M = \sum \sum \Delta m,$$



Здесь надо поставить знак двойной суммы, так как придется суммировать по двум измерениям,—длине и ширине. Переходя к пределу, будем иметь (формула 41)

$$\xi = \frac{\iint x \rho d\sigma}{M}, \quad \eta = \frac{\iint y \rho d\sigma}{M}, \quad \zeta = \frac{\iint z \rho d\sigma}{M}, \quad M = \iint \rho d\sigma \dots (48)$$

Если поверхность однородна, то  $\rho$  во всех слагаемых одинаково. Поэтому, сокращая на  $\rho$ , получим

$$\xi = \frac{\iint x d\sigma}{S}, \quad \eta = \frac{\iint y d\sigma}{S}, \quad \zeta = \frac{\iint z d\sigma}{S}, \quad S = \iint d\sigma, \dots (49)$$

где  $S$ —вся площадь рассматриваемой поверхности. И здесь в случае однородности центр инерции зависит лишь от геометрической формы поверхности.

**Материальное тело.**—Переходя к материальному телу, мы, очевидно, будем иметь

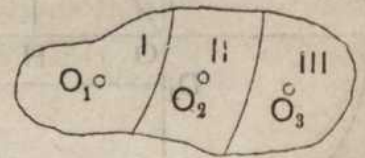
$$\xi = \frac{\iiint x \rho dv}{M}, \quad \eta = \frac{\iiint y \rho dv}{M}, \quad \zeta = \frac{\iiint z \rho dv}{M}, \quad M = \iiint \rho dv \dots (50)$$

Если тело однородно, то, по сокращении на  $\rho$ , получим

$$\xi = \frac{\iiint x dv}{V}, \quad \eta = \frac{\iiint y dv}{V}, \quad \zeta = \frac{\iiint z dv}{V}, \quad V = \iiint dv, \dots (51)$$

где  $V$ —весь рассматриваемый объем тела.

Мы видим, что нахождение центра тяжести приводится к вычислению определенных интегралов. Однако, в простейших случаях центр тяжести можно разыскать элементарным путем. Мы рассмотрим в дальнейшем эти элементарные случаи. Введем предварительно новое понятие, эквивалентной точки. Мы будем называть эквивалентной точкою материальную точку, совпадающую с центром тяжести предмета, масса которой равна массе предмета. Вернемся к формулам (45). Заметим, что, например,  $\sum m_i x_i = M\xi$ . Рассмотрим некоторое тело, которое мы можем разбить, например, на три части, центры тяжести которых  $O_1 (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $O_2 (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ,  $O_3 (\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$  и массы  $M_1, M_2, M_3$  нам известны (черт. 27). Применим к нему формулы (45). Мы имеем



Черт. 27.

$$\xi = \frac{\sum m_i x_i}{M}.$$

Разбивая сумму в числителе на три части, относящиеся к частям I, II и III тела, и заменяя эти три суммы на основании предыдущего замечания соответственно их значениями  $M_1\xi_1, M_2\xi_2, M_3\xi_3$ , мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + M_3 \xi_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \eta &= \frac{M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + M_3 \eta_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \zeta &= \frac{M_1 \zeta_1 + M_2 \zeta_2 + M_3 \zeta_3}{M_1 + M_2 + M_3}. \end{aligned} \right\} \dots (52)$$



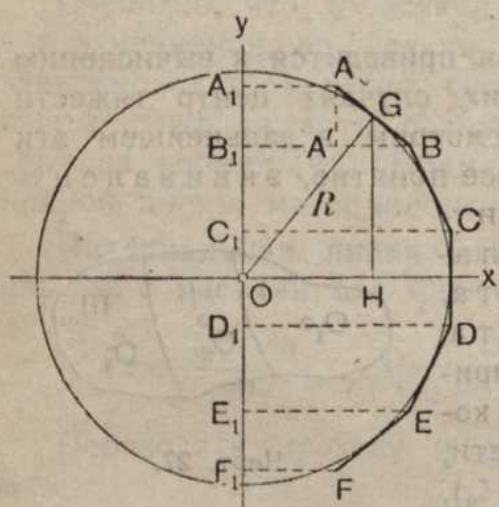
Мы видим отсюда, что нахождение центра инерции тела может быть приведено к нахождению центра инерции заменяющих его эквивалентных точек.

Дадим еще следующее замечание. Предположим, что рассматриваемый предмет имеет, например, плоскость  $xOy$  плоскостью симметрии, т. е. каждой массе, лежащей над плоскостью  $xOy$ , соответствует такая же масса, расположенная на таком же расстоянии под плоскостью  $xOy$ . Тогда  $\sum m_i z_i = 0$ , и мы имеем  $\xi = 0$ . Следовательно, если предмет имеет плоскость симметрии, то центр инерции лежит в этой плоскости. Если предмет имеет две плоскости симметрии, то центр инерции лежит на прямой пересечения этих плоскостей; если же у предмета существуют три плоскости симметрии, то центр инерции лежит в их общей точке, и мы, таким образом, находим его без всякого вычисления. В случае плоской фигуры вместо плоскости симметрии мы будем иметь прямые (оси) симметрии.

После этих замечаний перейдем к определению центра тяжести простейших объектов.

1. **Центр тяжести однородного прямолинейного отрезка.** — Пусть будет дан прямолинейный отрезок  $AB$ , середина которого есть точка  $O$ . Так как прямая, перпендикулярная к  $AB$  и проходящая через  $O$ , есть ось симметрии, то центр тяжести лежит в точке  $O$ .

2. **Центр тяжести однородной правильной ломаной линии.** — Пусть будет дана правильная ломаная линия  $ABCDEF$ , и  $O$  — центр вписанной в нее окружности. Мы предположим, что  $ABCDEF$  охватывает не более половины окружности (черт. 28). Проведем ось симметрии  $Ox$ , мы на основании предыдущего заключаем, что центр тяжести должен лежать на этой оси. Определим его координату  $\xi$ . Заменим каждое колено  $AB, BC, \dots$  ломаной линии соответствующей эквивалентной точкой  $G, \dots$  Обозначим через  $l$  длину колена ломаной линии, через  $R$  — радиус вписанного круга,  $n$  — число колен ломанной линии. Применяя метод эквивалентных точек и пользуясь для этого формулами (52), сокращении их на постоянную плотность, будем иметь



Черт. 28.

$$\xi = \frac{AB \cdot \xi_1 + CD \cdot \xi_2 + \dots}{AB + CD + \dots} = \frac{l \xi_1 + l \xi_2 + \dots}{nl},$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots$  суть абсциссы центров тяжести колен  $AB, BC, \dots$ . Рассмотрим, например, колено  $AB$ . Опуская из эквивалентной точки  $G$  перпендикуляр  $GH$  на ось  $Ox$ , будем иметь  $OH = \xi_1$ ; далее  $OG = R$ . Проектируя колено  $AB$  на ось  $Oy$  в отрезок  $A_1B_1$  и проводя  $AA' \perp BB_1$ , из подобия треугольников  $\triangle AA'B$  и  $\triangle OGH$  будем иметь

$$\frac{OH}{AA'} = \frac{OG}{AB},$$

или

$$\frac{\xi_1}{A_1B_1} = \frac{R}{l}, \quad l \xi_1 = A_1B_1 \cdot R.$$

Аналогично найдем

$$l \xi_2 = B_1C_1 \cdot R, \quad l \xi_3 = C_1D_1 \cdot R.$$



Вставляя эти выражения в предыдущую формулу для  $\xi$ , получим

$$\xi = \frac{A_1 B_1 \cdot R + B_1 C_1 \cdot R + C_1 D_1 \cdot R + \dots}{nl}$$

Обозначим длину  $A_1 F_1$  всей проекции ломаной линии на ось  $Oy$  через  $d$ . Тогда, вынося в предыдущей формуле  $R$  за скобки, мы будем иметь

$$\xi = \frac{R(A_1 B_1 + B_1 C_1 + \dots)}{nl} = R \frac{d}{L}, \dots \dots \dots (53)$$

где  $L$  — длина всей ломаной линии. Таким образом, мы получаем теорему:

Центр тяжести правильной ломаной линии лежит на оси симметрии на расстоянии от центра вписанного круга, равном радиусу, умноженному на отношение длины проекции ломаной линии на ось, перпендикулярную к оси симметрии, к длине всей ломаной линии.

### 3. Центр тяжести однородной дуги круга.

Пусть будет дана дуга  $ABC$  круга, меньшая  $\pi$  (черт. 29). Проведем ось симметрии  $Ox$  и обозначим через  $\alpha$  половину центрального угла  $AOC$ , стягивающего дугу  $ABC$ . Центр тяжести дуги лежит на оси симметрии  $Ox$ , и, чтобы найти его, надо перейти к пределу в формуле (53), рассмотрев дугу  $ABC$ , как предел правильной ломаной линии, когда число колен неограниченно возрастает, причем каждое колено стремится к нулю. В пределе будем иметь

$$\alpha = AC = 2 AD = 2 R \sin \alpha,$$

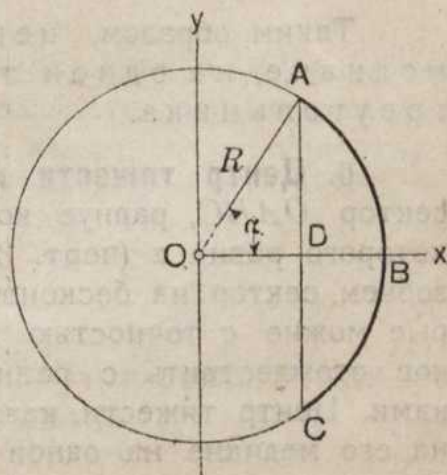
$$L = \widehat{ABC} = R \cdot 2 \alpha,$$

и мы получим из формулы (53)

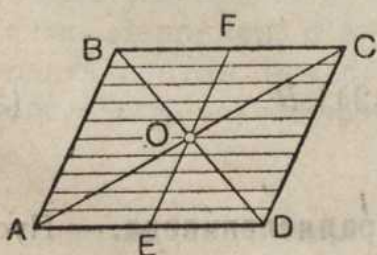
$$\xi = R \frac{2 R \sin \alpha}{R 2 \alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots (54)$$

Применим эту формулу к полуокружности. В этом случае  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , и мы находим

$$\xi = R \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} R = 0,637 R \dots \dots \dots (55)$$



Черт. 29.



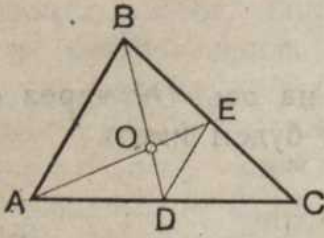
Черт. 30.

4. Центр тяжести параллелограмма. — Рассмотрим параллелограмм  $ABCD$  (черт. 30). Разобьем его прямыми, параллельными основанию  $AD$ , на бесконечно узкие полосы. Центр тяжести каждой полосы лежит в ее середине; геометрическое место эквивалентных точек есть прямая  $EF$ . Таким образом, мы привели задачу к нахождению центра тяжести однородной прямой  $EF$ . Ее центр тяжести лежит в точке  $O$  — месте пересечения диагоналей

$AC$  и  $BD$ . Следовательно, центр тяжести параллелограмма лежит в точке пересечения диагоналей.



5. **Центр тяжести треугольника.** — Рассмотрим треугольник  $ABC$  (черт. 31). Разбивая его прямыми, параллельными основанию  $AC$ , на бесконечно узкие полосы и заменяя каждую полосу эквивалентной точкой, мы



Черт. 31.

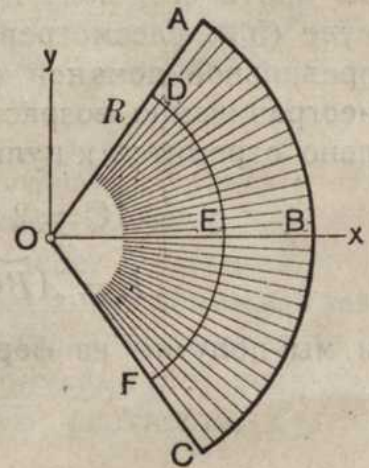
найдем, что место эквивалентных точек будет прямая  $BD$  — медиана треугольника. Таким образом, задача привелась к нахождению центра тяжести неоднородной прямой  $BD$ , плотность которой возрастает по мере приближения к точке  $D$ . Проведя другую медиану  $AE$ , найдем также, что и она есть место эквивалентных точек для треугольника. Следовательно, центр тяжести лежит в точке пересечения  $O$  медиан  $BD$  и  $AE$ . Отсюда вытекает, что все три медианы

треугольника пересекаются в одной точке. Соединим прямую точки  $D$  и  $E$ . Так как  $D$  и  $E$  суть середины сторон  $AC$  и  $BC$ , то прямая  $DE$  есть средняя линия треугольника  $ABC$ ; следовательно, она параллельна  $AB$  и равна половине  $AB$ . Из подобия треугольников  $AOB$  и  $DOE$  находим

$$\frac{BO}{DO} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1} = 2.$$

Таким образом, центр тяжести треугольника лежит на медиане, на одной трети ее длины, считая от основания треугольника.

6. **Центр тяжести кругового сектора.** — Пусть будет дан круговой сектор  $OABC$ , радиус которого равен  $R$  и половина центрального угла которого равна  $\alpha$  (черт. 32). Проведя радиусы, разобьем сектор на бесконечно узкие секторы, которые можно с точностью до малых высших порядков отождествить с равнобедренными треугольниками. Центр тяжести каждого треугольника лежит на его медиане на одной трети ее длины, считая от основания, и геометрическое место этих изображающих точек будет дуга  $DEF$ , радиус которой  $OD = \frac{2}{3} R$ . Таким образом мы привели задачу к нахождению центра тяжести однородной дуги круга  $DEF$ . Ее центр тяжести лежит на оси симметрии  $Ox$  на расстоянии  $\xi$  от центра  $O$ , равном



Черт. 32.

$$\xi = OD \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots (56)$$

Применим эту формулу к нахождению центра тяжести полукруга с радиусом  $R$ . В этом случае  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , и мы имеем

$$\xi = \frac{2}{3} R \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} R = 0,4241 R \dots \dots \dots (57)$$

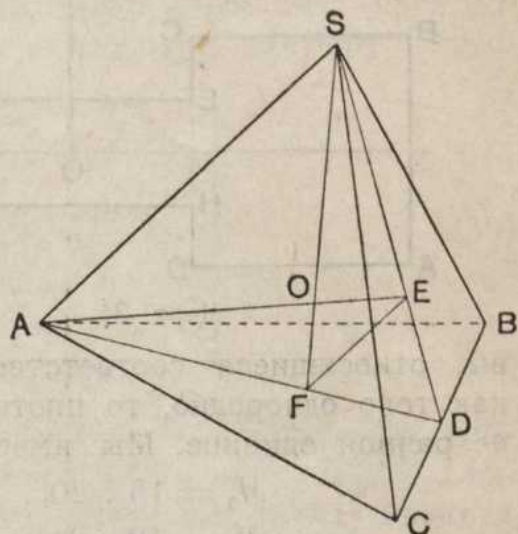
7. **Центр тяжести всякого однородного параллелепипеда.** — Пусть будет дан некоторый параллелепипед. Разбивая его плоскостями, параллельными основанию, на бесконечное множество бесконечно тонких слоев и заменяя каждый слой эквивалентной точкой, лежащей в его центре тяжести, мы найдем, что геометрическое место эквивалентных точек есть прямая, соединяющая центры тяжести обоих оснований. Таким образом, задача при-



велась к нахождению центра тяжести этой однородной прямой. Отсюда нетрудно доказать что, центр тяжести параллелепипеда совпадает с точкою пересечения его диагоналей.

### 8. Центр тяжести однородного тетраэдра.

— Пусть будет дан тетраэдр  $SABC$  (черт. 33). Проводя плоскости, параллельные основанию  $ABC$ , разобьем его на бесконечно тонкие треугольные слои. Заменим каждый слой эквивалентной точкой, лежащей в его центре тяжести. Геометрическое место этих эквивалентных точек есть прямая  $SF$ , соединяющая вершину с центром тяжести  $F$  основания  $ABC$ . Таким образом мы привели задачу к нахождению центра тяжести неоднородной прямой  $SF$ , плотность которой возрастает по мере приближения к точке  $F$ . Соединяя вершину  $A$  с центром тяжести  $E$  основания  $SBC$ , мы получим другое место эквивалентных точек. Следовательно, центр, тяжести  $O$  лежит в точке пересечения этих прямых  $AE$  и  $SF$ . Заметим, что прямые  $AE$  и  $SF$  действительно пересекаются, так как они лежат в плоскости треугольника  $ASD$ . Рассмотрим два треугольника:  $ASD$  и  $FED$ ; они имеют по равному углу  $D$ , заключенному между пропорциональными сторонами, так как



Черт. 33.

$$\frac{AD}{FD} = \frac{SD}{ED} = \frac{3}{1}.$$

Поэтому эти треугольники подобны, и  $FE \parallel AS$ . Из параллельности сторон  $FE$  и  $AS$  следует, что  $\triangle ASO \sim \triangle EFO$ , откуда

$$\frac{SO}{OF} = \frac{AS}{EF} = 3.$$

Следовательно, центр тяжести тетраэдра лежит на прямой, соединяющей вершину с центром тяжести основания, на одной четверти ее длины от основания.

Это предложение имеет место для любой пирамиды и конуса.

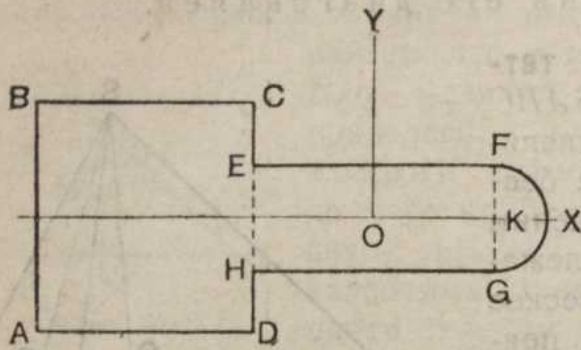
Не усложняя изложения дальнейшими примерами, укажем два общих приема, позволяющих находить центры тяжести в более общих случаях.

**Способ сложения.**— Пусть будет дано тело (черт. 27), центры тяжести частей которого мы можем найти. Заменяя каждую часть ее эквивалентной точкой, мы придем к нахождению центра тяжести системы эквивалентных точек. Например, в случае чертежа 27 мы, по предположению, умеем находить центры тяжести трех частей I, II, III, из которых складывается все тело. Тогда координаты центра тяжести всего тела будут

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + M_3 \xi_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \eta &= \frac{M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + M_3 \eta_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \zeta &= \frac{M_1 \zeta_1 + M_2 \zeta_2 + M_3 \zeta_3}{M_1 + M_2 + M_3}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$



**Пример.** — Рассмотрим плоскую фигуру, представленную на чертеже 34. Требуется найти ее центр тяжести. Так как она имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на оси симметрии; примем ось симметрии за ось  $Ox$ . Разобьем фигуру на три части: прямоугольник  $ABCD$ , прямоугольник  $EFGH$ , сектор  $FKG$ , и поместим начало координат в центре тяжести  $O$  прямоугольника  $EFGH$ . Пусть будет дано  $AD=16$  см,  $AB=20$  см,  $HD=5$  см,  $HE=10$  см,  $HG=24$  см; снабдим указателями 1, 2, 3, буквы, относящиеся соответственно к фигурам  $ABCD$ ,  $EFGH$ ,  $FKG$ . Так как тело однородно, то плотность не играет роли, и мы можем положить ее равной единице. Мы имеем:



Черт. 34.

Мы имеем:

$$M_1 = 15 \cdot 20, \quad \xi_1 = -(12 + 8) = -20 \text{ см};$$

$$M_2 = 10 \cdot 24, \quad \xi_2 = 0;$$

$$M_3 = \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2, \quad \xi_3 = +12 + 5 \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = + \left( 12 + \frac{10}{\pi} \right).$$

Следовательно, по формуле (58) имеем

$$\xi = \frac{-15 \cdot 20 \cdot 20 + 10 \cdot 24 \cdot 0 + \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 \left( 12 + \frac{10}{\pi} \right)}{15 \cdot 20 + 10 \cdot 24 + \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2}$$

или

$$\xi = \frac{-15 \cdot 20 \cdot 20 + 25(6\pi + 5)}{15 \cdot 20 + 10 \cdot 24 + \frac{25}{2} \cdot \pi}.$$

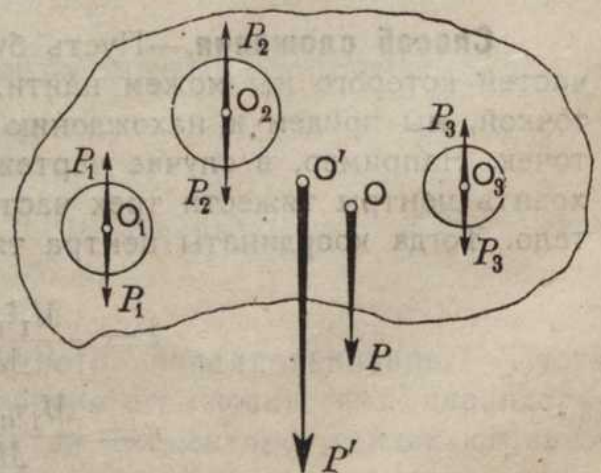
Сокращая на 5 и раскрывая скобки, будем иметь

$$\xi = \frac{-3 \cdot 20 \cdot 20 + 5 \cdot 6\pi + 5 \cdot 5}{3 \cdot 20 + 2 \cdot 24 + \frac{5}{2} \pi} = \frac{30\pi - 1175}{108 + \frac{5}{2} \pi},$$

или

$$\xi = -\frac{1175 - 30\pi}{108 + \frac{5\pi}{2}} = -\frac{1080,752}{115,854} = -9,329 \text{ см}.$$

**Способ вычитания, или способ отрицательных масс.**—Пусть будет дано тело, в котором, например, имеются три отверстия (черт. 35). Предположим, что, если бы эти отверстия были также заполнены веществом, то вес тела был бы  $P'$ , и центр его тяжести лежал бы в  $O'$ . Пусть будет  $P$  действительный вес тела с отверстиями, и  $O$ —его центр тяжести. Обозначим через  $P_1, P_2, P_3$  веса вещества, заполняющего отверстия, и через  $O_1, O_2, O_3$  — соответствующие центры тяжести. Тогда  $P'$  есть равнодействующая параллельных сил  $P, P_1, P_2, P_3$ , приложенных соответственно в точках  $O, O_1, O_2, O_3$ , и точка  $O'$  есть центр этих параллельных сил. Следовательно, сила  $P$  есть разность силы  $P'$  и сил  $P_1, P_2, P_3$ . Мы можем заменить вычитание сложением, рассматривая силы



Черт. 35.

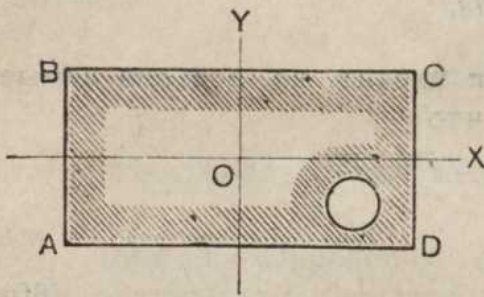


$P_1, P_2, P_3$ , как отрицательные, т.-е. изменив их направление в прямо противоположное. Таким образом задача приводится к нахождению центра антипараллельных сил  $P'$  и  $P_1, P_2, P_3$ . Обозначив массу всего тела, предполагая, что отверстия заполнены веществом, через  $M'$ , координаты точки  $O'$  через  $\xi', \eta', \zeta'$ ; массу вещества, заполняющего первое отверстие, через  $M_1$ , координаты точки  $O_1$  через  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ , и т. д., мы, очевидно, получим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{M'\xi' - M_1\xi_1 - M_2\xi_2 - M_3\xi_3}{M' - M_1 - M_2 - M_3}, \\ \eta &= \frac{M'\eta' - M_1\eta_1 - M_2\eta_2 - M_3\eta_3}{M' - M_1 - M_2 - M_3}, \\ \zeta &= \frac{M'\zeta' - M_1\zeta_1 - M_2\zeta_2 - M_3\zeta_3}{M' - M_1 - M_2 - M_3}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

Из формул (59) мы видим, что задача сводится к нахождению центра инерции положительной массы  $M'$  и отрицательных масс  $M_1, M_2, M_3$ .

**Пример.** — Найдем центр тяжести плоской фигуры — прямоугольника  $ABCD$ , в углу которого сделано круглое отверстие (черт. 36). Пусть будет



Черт. 36.

$AD = 60$  см,  $AB = 40$  см, радиус круглого отверстия равен 5 см, и центр отверстия отстоит от обеих сторон прямоугольника на 10 см. Здесь нет оси симметрии, и мы должны удерживать две первые из формул (59). Возьмем начало координат  $O$  в центре тяжести прямоугольника, и расположим оси координат параллельно сторонам прямоугольника. Мы будем иметь

$$\begin{aligned} M' &= 60 \cdot 40, & \xi' &= 0, & \eta' &= 0; \\ M_1 &= \pi \cdot 5^2, & \xi_1 &= 20 \text{ см}, & \eta_1 &= -10 \text{ см}. \end{aligned}$$

Отсюда на основании формул (59) получаем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{60 \cdot 40 \cdot 0 - \pi \cdot 5^2 \cdot 20}{60 \cdot 40 - \pi \cdot 5^2}, \\ \eta &= \frac{60 \cdot 40 \cdot 0 + \pi \cdot 5^2 \cdot 10}{60 \cdot 40 - \pi \cdot 5^2}, \end{aligned}$$

или

$$\xi = -\frac{25 \cdot 20\pi}{60 \cdot 40 - 25\pi}, \quad \eta = \frac{25 \cdot 10\pi}{60 \cdot 40 - 25\pi}.$$

Сокращая на 25, найдем

$$\xi = -\frac{20\pi}{96 - \pi}, \quad \eta = \frac{10\pi}{96 - \pi},$$

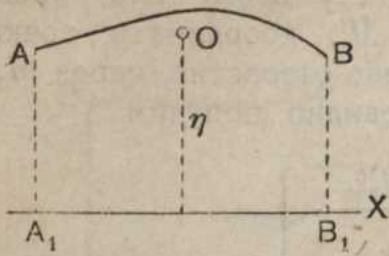
или

$$\xi = -\frac{62,832}{92,858} = -0,677 \text{ см}, \quad \eta = \frac{31,416}{92,858} = +0,338 \text{ см}.$$

**Первая теорема Гюльдена.** — Боковая поверхность тела вращения, описанного дугою плоской кривой, вращающейся вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересека-



ющей этой дуги, равна длине дуги, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой дуги.



Черт. 37.

Рассмотрим дугу  $AB$  и ось  $x$  вращения, которую примем за ось абсцисс (черт. 37). Как крайний случай, одна из точек  $A$  и  $B$ , или обе могут лежать на оси  $x$ . Направим ось  $y$  (ординат) перпендикулярно к оси вращения. Опустим из точек  $A$  и  $B$  перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  на ось вращения; пусть будет  $O$  центр тяжести дуги  $AB$ , и  $\eta$  — его ордината. Обозначим через  $ds$  элемент дуги  $AB$ . С точностью до малых высших

порядков можно считать, что при вращении элемент дуги  $ds$  опишет боковую поверхность усеченного конуса, образующая которого есть  $ds$ , а средний радиус есть  $y$ . Так как боковая поверхность усеченного конуса равна образующей, умноженной на длину окружности, описанной средним радиусом, то мы будем иметь для боковой поверхности рассматриваемого конуса выражение  $2\pi y ds$ . Суммируя все элементы поверхности, мы в пределе получим искомую боковую поверхность  $S$ .

$$S = \int 2\pi y ds = 2\pi \int y ds,$$

где  $2\pi$  вынесено за знак интеграла, так как  $2\pi$  входит во все слагаемые общим множителем. Но из формул (47) видно, что

$$\int y ds = \eta L.$$

Следовательно, мы получаем

$$S = 2\pi \eta L, \dots \dots \dots (60)$$

что и доказывает искомое предложение.

**Пример.**—Пусть будет  $AB$  (черт. 37) дуга полуокружности,  $A_1B_1 = 20$  см,  $AA_1 = BB_1 = 12$  см. Мы имеем (стр. 29)

$$\eta = 12 + 10 \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 12 + \frac{20}{\pi},$$

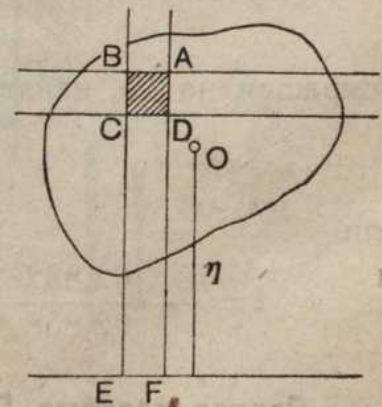
$$L = \pi \cdot 10;$$

отсюда получаем

$$S = 2\pi \left( 12 + \frac{20}{\pi} \right) \pi \cdot 10 = 20 \cdot \pi (12\pi + 20) = 80\pi (3\pi + 5) \text{ кв. см.}$$

**Вторая теорема Гюльдена.**—Объем тела вращения, полученного от вращения плоской фигуры вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей этой фигуры, равен площади этой фигуры, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой фигуры.

Примем ось вращения за ось абсцисс прямоугольной системы осей координат. Как крайний случай, ось вращения может быть одною из сторон плоской фигуры. Пусть будет  $O$  центр тяжести плоской фигуры, и  $\eta$  — его ордината (черт. 38). Разобьем всю плоскую фигуру на бесконечно малые части прямыми, параллельными осям координат. Тогда, если  $CE = y$ ,  $CB = \Delta y$ ,  $CD = \Delta x$ , то с точностью до бесконечно малых



Черт. 38.



третьего порядка, об'ем кольца, образованного вращением площадки  $ABCD$ , будет равен

$$\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x - \pi y^2 \Delta x = 2\pi y \Delta x \Delta y = 2\pi y \Delta \sigma,$$

где  $\Delta \sigma$ —площадь  $ABCD$ . Суммируя все эти об'емы, мы в пределе будем иметь об'ем рассматриваемого тела вращения

$$V = \int \int 2\pi y d\sigma = 2\pi \int \int y d\sigma,$$

где постоянный множитель  $2\pi$  вынесен за знак интеграла. Но мы видели из формул (49), что

$$\int \int y d\sigma = \eta S,$$

где  $S$  есть площадь рассматриваемой плоской фигуры. Следовательно, мы получаем

$$V = 2\pi \eta S, \dots \dots \dots (61)$$

что и доказывает предложение.

**Пример.**—Определим об'ем кругового кольца, образованного вращением окружности с радиусом, равным 24 см, вокруг оси, отстоящей от центра окружности на 50 см. Мы здесь имеем

$$\eta = 50, \quad S = \pi \cdot 24^2.$$

Следовательно, мы получаем

$$V = 2\pi \cdot 50 \cdot \pi \cdot 24^2 = 57600 \pi^2 \text{ куб. см.}$$

**Примечание.**—Ось вращения не должна пересекать дуги или площади потому, что части, лежащие под осью вращения, будут иметь отрицательные ординаты; поэтому они дадут в общей сумме отрицательные слагаемые, и мы получим в итоге разность площадей или об'емов.

Чтобы этого избежать, надо отдельно выполнять вычисление для частей, лежащих под осью и над осью.

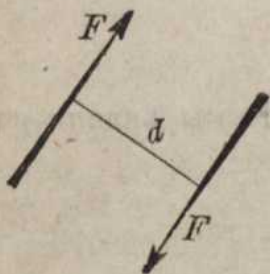




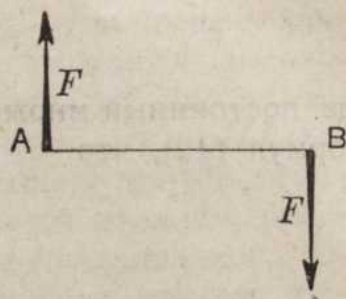
## ГЛАВА V.

### ТЕОРИЯ ПАР.

Рассмотрим какую-нибудь пару  $(F, -F)$ ; мы иногда будем изображать пару предыдущим условным обозначением (черт. 39). Так как силы можно перемещать по прямым их действия, то всегда можно достигнуть того, чтобы силы пары были приложены в концах плеча  $AB$ , как это изображено на чертеже 40. В дальнейшем в этой главе мы всегда будем предполагать, что пара приведена к этому виду. Докажем ряд предложений.



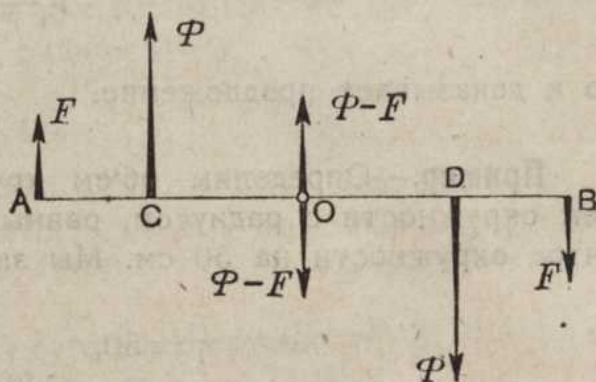
Черт. 39.



Черт. 40.

1. Всегда можно произвольно изменять силы пары, меняя при этом плечо так, чтобы момент пары остался неизменным.

Пусть будет дана пара  $(F, -F)$  с плечем  $AB$  (черт. 41). Мы хотим силы  $F$  пары изменить в силы  $\Phi$ . Предположим, для определенности, что  $\Phi > F$ . Разделим  $AB$  пополам и приложим в середине  $O$  плеча  $AB$  две параллельные  $F$  и прямопротивоположные силы  $\Phi - F$ , как показано на чертеже 41. Складывая силу  $\Phi - F$ , приложенную в точке  $O$ , с параллельною ей силой  $F$ , приложенною в точке  $B$ , получим равнодействующую  $\Phi$ , приложенную в точке  $D$ . Точно так же, складывая две другие силы  $\Phi - F$  и  $F$ , получим силу  $\Phi$ , приложенную в точке  $C$ . Таким образом, мы доказали, что пару  $(F, -F)$  можно заменить парой  $(\Phi, -\Phi)$ . Покажем теперь, что моменты новой и прежней пары между собою равны. Из теории сложения параллельных сил известно, что



Черт. 41.

$$\frac{OD}{DB} = \frac{F}{\Phi - F}.$$

Отсюда, перемножая, будем иметь

$$OD \cdot \Phi - OD \cdot F = DB \cdot F,$$

или

$$OD \cdot \Phi = OD \cdot F + DB \cdot F = (OD + DB) \cdot F.$$

Умножая обе части на 2, получим

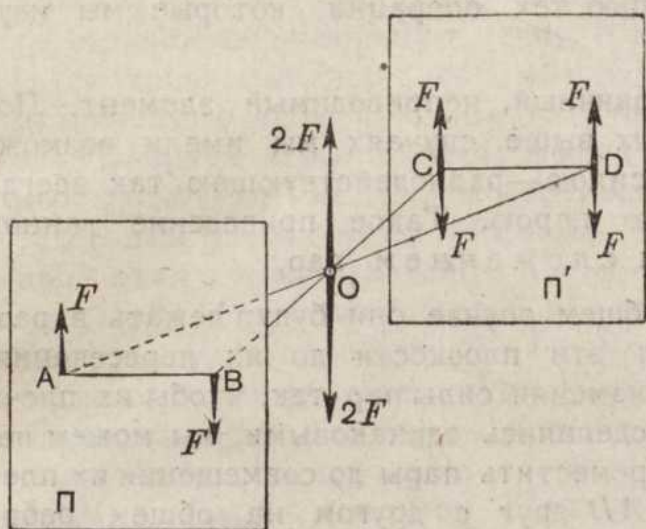
$$2 OD \cdot \Phi = 2 OB \cdot F,$$

или

$$\Phi \cdot CD = F \cdot AB,$$



2. Пару можно переносить параллельно самой себе. Пусть будет дана пара  $(F, -F')$ , лежащая в плоскости  $\Pi$ . Предположим, что мы хотим перенести пару в плоскость  $\Pi'$ , причем  $\Pi' \parallel \Pi$  (черт. 42).



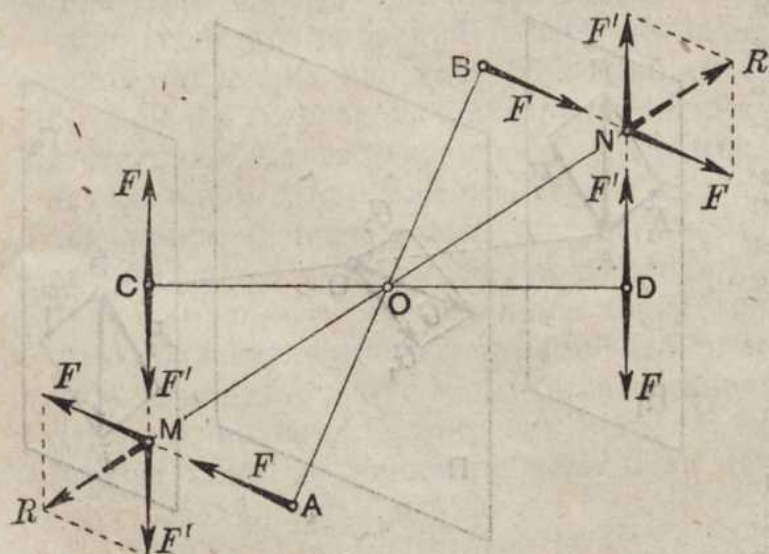
Черт. 42.

Проведем в  $\Pi'$  прямую  $CD \parallel AB$  и приложим в точках  $C$  и  $D$  по две силы  $F$ , прямо противоположные и перпендикулярные к  $CD$ . Так как  $AB \parallel CD$ , то прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$  и делятся в ней пополам. Рассмотрим две направленные в одну сторону силы  $F$ , приложенные в точках  $A$  и  $D$ ; они дадут равнодействующую  $2F$ , приложенную в точке  $O$ . Точно также две направленные в одну сторону силы  $F$ , приложенные в точках  $B$  и  $C$ , дадут равнодействующую  $2F$ , приложенную также в точке  $O$ . Обе эти равнодействующие взаимно уравновешиваются, и у нас остается пара  $(F, -F')$ , расположенная в плоскости  $\Pi'$ .

Очевидно, что момент этой новой пары тождествен с моментом прежней пары. Как частный случай, плоскость  $\Pi'$  может совпадать с плоскостью  $\Pi$ , и мы будем иметь перемещение пары параллельно самой себе в своей плоскости.

3. Пару всегда можно повернуть на произвольный угол в ее плоскости.

Пусть будет дана пара  $(F, -F')$ ; рассмотрим сначала частный случай поворота пары вокруг середины  $O$  плеча  $AB$  (черт. 43). Проведем под заданным углом поворота через точку  $O$  прямую  $CD$  и отложим  $CO = OD = AO = BO$ .



Черт. 43.

Приложим в точках  $C$  и  $D$  по две прямо противоположных и перпендикулярных к  $CD$  силы  $F' = F$ . Продолжим силу  $F'$ , приложенную в точке  $B$ , и силу  $F'$ , приложенную в точке  $D$ , до их пересечения в точке  $N$ . Такую же операцию выполним с двумя другими силами  $F$  и  $F'$ , перенеся их в точку  $M$ . Соединим точки  $M$  и  $N$  с точкой  $O$ . Из равенства треугольников

$$\triangle OBN = \triangle ODN, \quad \triangle OAM = \triangle OCM$$

следует, что  $ON$  и  $OM$  суть биссектрисы двух вертикальных углов  $BOD$  и  $AOC$ , а потому прямые  $ON$  и  $OM$  представляют продолжение одна другой. Складывая силы  $F$  и  $F'$ , приложенные в точках  $N$  и  $M$ , мы получим равные ромбы; равнодействующие пойдут по их диагоналям, составляющим продолжение прямых  $ON$  и  $OM$ . Поэтому эти равнодействующие взаимно уравновешиваются, и у нас остается только пара сил  $(F, -F')$  с плечом  $CD$ .

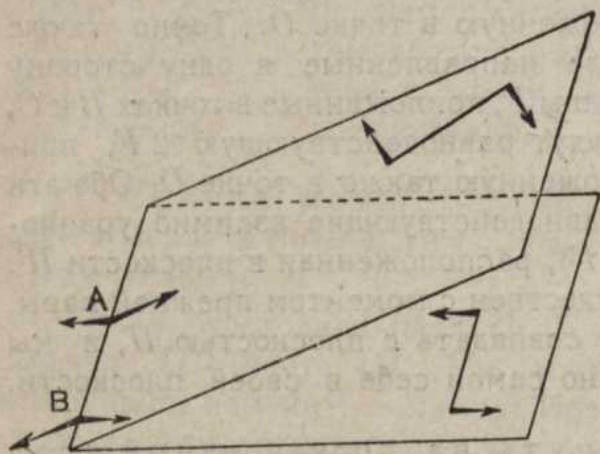
Соединяя поворот вокруг точки  $O$  с параллельным перенесением, мы можем повернуть пару вокруг любой точки ее плоскости.



Очевидно, что и здесь момент пары остается неизменным. Отсюда следует, что момент пары вполне пару характеризует, и две пары с одинаковыми моментами эквивалентны, т. е. могут быть переведены одна в другую помощью тех операций, которые мы изучили в этой главе.

Пара, как и одна сила, есть первичный, неприводимый элемент. Подобно тому как в некоторых описанных выше случаях мы имели возможность заменить несколько сил одною силою—равнодействующею, так всегда можно заменить несколько пар одною парю. Такое приведение данной системы пар к одной паре называется сложением пар.

Пусть будут даны две пары. В общем случае они будут лежать в разных плоскостях (черт. 44). Продолжая эти плоскости до их пересечения,



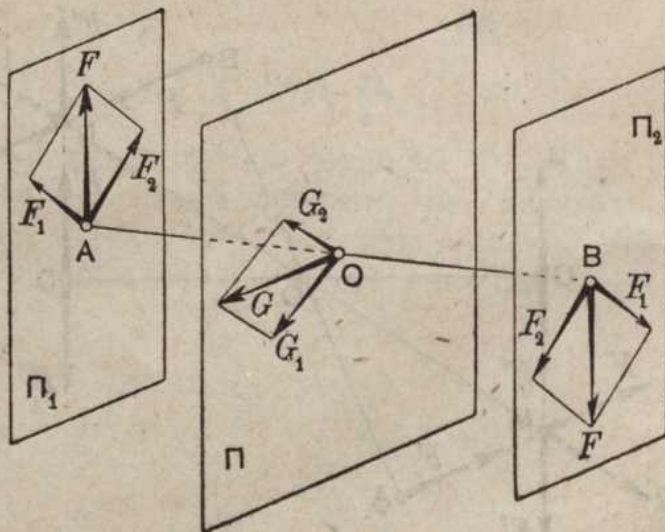
Черт. 44.

изменяя силы пар так, чтобы их плечи сделались одинаковыми, мы можем переместить пары до совмещения их плеч  $AB$  друг с другом на общем ребре пересечения плоскостей, как это показано на чертеже 44. Если пары лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости, то плечи их, очевидно, можно совместить на любой прямой этой плоскости. Мы видим, что для получения единственной пары достаточно сложить силы, приложенные в точках  $A$  и  $B$ , по правилу параллелограмма. Займемся подробнее этим

сложением. Пусть будет  $AB$  это общее плечо двух пар,  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ —плоскости, перпендикулярные их ребру  $AB$ , в которых лежат силы  $F'_1$  и  $F'_2$  пар  $(F'_1, -F'_1)$  и  $(F'_2, -F'_2)$ . Возьмем какую-нибудь точку  $O$  на плече  $AB$  и проведем третью плоскость  $\Pi \perp AB$  (черт. 45). Складывая силы  $F'_1$  и  $F'_2$  в плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , получим пару  $(F, -F)$ . Будем строить в плоскости  $\Pi$  моменты пар  $(F'_1, -F'_1)$  и  $(F'_2, -F'_2)$ . Эти моменты будут

$$G_1 = F'_1 \cdot AB, \quad G_2 = F'_2 \cdot AB,$$

причем векторы  $G_1$  и  $G_2$  перпендикулярны соответственно к плоскостям обеих пар  $(F'_1, -F'_1)$  и  $(F'_2, -F'_2)$ . Сложим векторы  $G_1$  и  $G_2$  по правилу параллелограмма. Мы получим вектор  $G$ . Но параллелограмм, образованный сторонами  $G_1$  и  $G_2$ , подобен параллелограмму, образованному сторонами  $F'_1$  и  $F'_2$ . В самом деле  $G_1$  и  $G_2$  пропорциональны  $F'_1$  и  $F'_2$ , и углы между  $G_1$ ,  $G_2$  и  $F'_1$ ,  $F'_2$  равны, как углы с перпендикулярными сторонами. Вследствие этого диагональ  $G$  перпендикулярна к диагонали  $F'$ , и  $G = F' \cdot AB$ . Отсюда мы видим, что и по величине и по направлению вектор  $G$  есть момент пары  $(F, -F)$ .



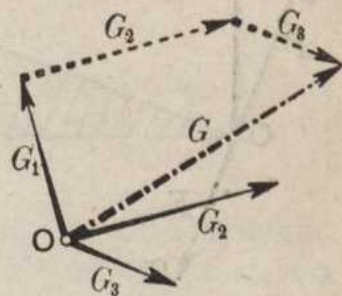
Черт. 45.

Если мы имеем три пары, то сначала складываем две, а затем полученную пару с третьей, и т. д. Таким образом мы приходим к следующей теореме:



Чтобы сложить пары, надо геометрически сложить их моменты.

Пусть будут, например, даны три пары  $(F'_1, -F'_1)$ ,  $(F'_2, -F'_2)$ ,  $(F'_3, -F'_3)$ . Так как момент пары относительно всякой точки пространства один и тот же, то возьмем произвольную точку  $O$  и построим в ней моменты  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  рассматриваемых пар (черт. 46). Складывая эти моменты по правилу геометрического сложения, мы получим момент  $G$  той единственной пары, которую можно заменить три данных пары. Так как законы переместительный и сочетательный здесь имеют место, то термин „сложение пар“ этим оправдывается.



Черт. 46.

Пусть будет дана пара с моментом  $G$ . Обозначим через  $L$ ,  $M$ ,  $N$  проекции  $G$  на оси координат. Так как  $G$  есть геометрическая сумма векторов  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , то отсюда следует, что пару с моментом  $G$  можно рассматривать, как результат сложения пар с моментами  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Пару с моментом  $L$  можно расположить в плоскости  $yOz$ , пару с моментом  $M$  можно расположить в плоскости  $zOx$ , и пару с моментом  $N$  можно расположить в плоскости  $xOy$ . Таким образом, всякую пару можно заменить, вообще, тремя парами, расположенными в трех плоскостях координат. Это замечание выясняет механический смысл геометрического действия проектирования момента пары.

**Примечание.**— В изложенных главах мы встретились с тремя видами векторов. Вектор называется свободным, если его можно переносить параллельно самому себе в любую точку пространства. Для определения его достаточно трех координат, например, трех его проекций. Таков момент пары. Вектор называется скользящим, если он может перемещаться вдоль прямой, по которой он расположен. Примером такого вектора служит сила. Для определения скользящего вектора достаточно пяти координат, напр., трех его проекций и двух координат следа прямой его действия на какой-нибудь из плоскостей координат. Наконец, вектор называется приложенным, если точка его приложения закреплена. Для определения его достаточно шести координат, например, трех его проекций и трех координат точки его приложения. Таков случай момента силы относительно данной точки. В предыдущем изложении мы определяли силу шестью координатами, тогда как для ее определения достаточно пяти координат. Мы отмечали тем самым определенную точку приложения силы, с чем большею частью приходится иметь дело на практике, но, как мы выше видели, координаты этой точки  $A(x, y, z)$  могут быть заменены координатами любой другой точки, лежащей на прямой действия силы. В частности, в главе I мы видели, что момент силы не меняется, если силу переместить по прямой ее действия.

## ГЛАВА VI.

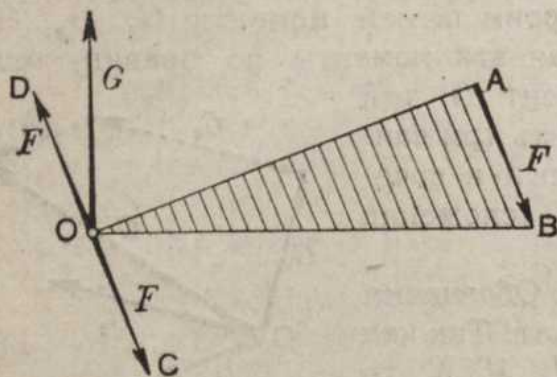
### ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПРИВЕДЕНИЯ СИЛ.

Мы можем теперь перейти к приведению общей системы сил. Для этого докажем предварительно следующую лемму:

Всякую силу можно перенести в любую точку пространства, прибавив соответствующую дополнительную пару, момент которой равен моменту силы относительно этой точки.



В самом деле, рассмотрим силу  $F = AB$ , приложенную в точке  $A$  (черт. 47). Требуется перенести ее в точку  $O$ . Приложим к точке  $O$  две



Черт. 47.

силы  $OC$  и  $OD$ , равные  $F$ , ей параллельные и прямо-противоположно направленные. Таким образом, мы получим силу  $F = OC$ , приложенную в точке  $O$ , и пару  $(F, -F)$ , составленную силами  $OD$  и  $AB$ . Момент  $G$  этой пары будет равен произведению  $F$  на расстояние точки  $O$  от  $AB$ , т. е. моменту данной силы  $F$  относительно точки  $O$ . Следовательно, теорема доказана.

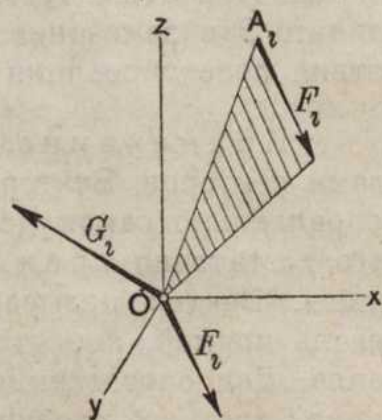
После этого предложения нетрудно решить задачу приведения сил в общем случае. Пусть будет дана система сил  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Выберем некоторую точку

$O$  и перенесем все силы в эту точку, прибавив дополнительные пары; мы будем называть эту точку  $O$  точкой приведения. Примем эту точку за начало прямоугольной системы осей координат (черт. 48). Все силы  $F_i$  после перенесения в точку  $O$ , образуют систему сходящихся сил; ее можно привести по правилу многоугольной линии к одной результирующей  $R$ .

Переноса силы  $F_i$  в точку  $O$ , мы получим дополнительные пары, моменты которых  $G_i$  (с проекциями  $L_i, M_i, N_i$ ) будут равны моментам сил относительно точки  $O$ .

Все эти пары можно сложить; для этого надо геометрически сложить моменты  $G_i$ , мы найдем при этом результирующую пару с моментом  $G$  ( $L, M, N$ ). Следовательно, мы получаем предложение:

Всякую систему сил можно привести, вообще, к одной силе, приложенной в данной точке, и к одной паре.



Черт. 48.

Выполним теперь эту задачу аналитически. Пусть будут даны силы  $F_i$  их координатами  $F_i \begin{pmatrix} x_i, y_i, z_i \\ X_i, Y_i, Z_i \end{pmatrix}$ . При параллельном перенесении сил  $F_i$  в точку  $O$  их проекции на оси координат не изменяются. Если мы обозначим проекции результирующей  $R$  через  $(X, Y, Z)$ , то по правилу сложения системы сходящихся сил будем иметь

$$X = \sum_i X_i, \quad Y = \sum_i Y_i, \quad Z = \sum_i Z_i \dots \dots \dots (62)$$

Точно так же, момент  $G_i$  дополнительной пары будет равен согласно предыдущего моменту силы  $F_i$  относительно точки  $O$ ; поэтому его проекции  $(L_i, M_i, N_i)$  будут равны

$$L_i = y_i Z_i - z_i Y_i, \quad M_i = z_i X_i - x_i Z_i, \quad N_i = x_i Y_i - y_i X_i \dots \dots (63)$$

Чтобы получить момент  $G$  ( $L, M, N$ ) результирующей пары, надо сложить проекции  $L_i, M_i, N_i$ , так как сложение по правилу многоугольной линии



векторов  $G_i$  равносильно алгебраическому сложению их проекций. Следовательно, мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} L &= \sum_i L_i = \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ M &= \sum_i M_i = \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i), \\ N &= \sum_i N_i = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

Формулы (62) и (64) решают поставленную задачу, причем мы видим, что момент результирующей пары равен общему моменту системы относительно точки  $O$ .

Мы поместили точку приведения в начале координат  $O$ . Очевидно, что за точку приведения можно взять любую точку пространства. Возьмем точку приведения в некоторой точке  $O'$  ( $x', y', z'$ ) и посмотрим, как изменятся от этого формулы (62) и (64). Обозначим в этом случае результирующую через  $R'$  ( $X', Y', Z'$ ) и момент результирующей пары через  $G'$  ( $L', M', N'$ ). Очевидно, прежде всего, что в какую бы точку пространства  $O'$  мы ни переносили силы  $F_i$  параллельным перенесением, их проекции останутся неизменными. Поэтому мы будем иметь

$$X' = \sum_i X_i, \quad Y' = \sum_i Y_i, \quad Z' = \sum_i Z_i,$$

и, следовательно,

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z \dots \dots \dots (65)$$

Формулы (65) показывают, что результирующая не меняется ни по величине, ни по направлению, какую бы точку пространства мы ни взяли за точку приведения.

Не то будет с моментами. В самом деле, в главе I [формулы (17)] мы видели, что проекции момента  $G'$  силы  $F'_i$  относительно точки  $O'$  будут равны

$$\begin{aligned} L'_i &= (y_i - y') Z_i - (z_i - z') Y_i, \\ M'_i &= (z_i - z') X_i - (x_i - x') Z_i, \\ N'_i &= (x_i - x') Y_i - (y_i - y') X_i, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание формулы (63),

$$\left. \begin{aligned} L'_i &= L_i - (y' Z_i - z' Y_i), \\ M'_i &= M_i - (z' X_i - x' Z_i), \\ N'_i &= N_i - (x' Y_i - y' X_i). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66)$$

Чтобы геометрически сложить моменты  $G'_i$ , достаточно сложить алгебраически их проекции ( $L'_i, M'_i, N'_i$ ). Выполним это, например, для проекций  $L'_i$ . Давая  $i$  значение 1, 2, 3, ... в формуле для  $L'_i$  и складывая все получившиеся формулы, мы будем иметь

$$L'_1 + L'_2 + L'_3 + \dots = L_1 + L_2 + L_3 + \dots - [y' (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots) - z' (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)],$$

или, в сокращенном обозначении,

$$\sum_i L'_i = \sum_i L_i - (y' \sum_i Z_i - z' \sum_i Y_i);$$

так как

$$L' = \sum_i L'_i, \quad M' = \sum_i M'_i, \quad N' = \sum_i N'_i,$$



то, обращая внимание на формулы (62) и (64), из предыдущей формулы получим

$$L' = L - (y' Z - z' Y).$$

Меняя буквы в круговом порядке, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} L' &= L - (y' Z - z' Y), \\ M' &= M - (z' X - x' Z), \\ N' &= N - (x' Y - y' X). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67)$$

Из формулы (67) мы видим, что общий момент системы или что то же, момент, результирующей пары будет для точки  $O' (x', y', z')$ , вообще, иной, чем для начала координат  $O$ . Он будет изменяться при переходе от точки к точке как по величине, так и по направлению.

Найдем, в каком случае будут иметь место равенства

$$L' = L, M' = M, N' = N.$$

Из формул (67) следует, что для этого необходимо, чтобы было

$$y' Z - z' Y = 0, \quad z' X - x' Z = 0, \quad x' Y - y' X = 0.$$

Эти три равенства равносильны следующим двум уравнениям

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z} \dots \dots \dots (68)$$

Рассматривая здесь  $(x', y', z')$ , как текущие координаты, мы видим, что это—уравнения прямой, проходящей через начало координат и параллельной равнодействующей  $R$ . Таким образом, общий момент системы или момент результирующей пары будет оставаться неизменным по величине и направлению, если мы будем перемещать точку приведения по прямой, параллельной результирующей силе. Мы удовлетворим предыдущим равенствам еще в том частном случае, когда  $X = 0, Y = 0, Z = 0$ , т. е., когда результирующая равна нулю. Следовательно, если результирующая равна нулю, то общий момент, или момент результирующей пары, для всех точек пространства один и тот же; мы уже видели это в главе III. Итак, если мы возьмем за точку приведения начало координат  $O$ , то получим результирующую силу и результирующую пару, координаты которых

$$\left. \begin{aligned} X, Y, Z, \\ L, M, N \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (69)$$

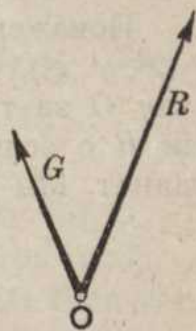
даны формулами (62) и (64). Если же мы возьмем за точку приведения точку  $O' (x', y', z')$ , то получим результирующую силу и результирующую пару, координаты которых

$$\left. \begin{aligned} X', Y', Z', \\ L', M', N' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

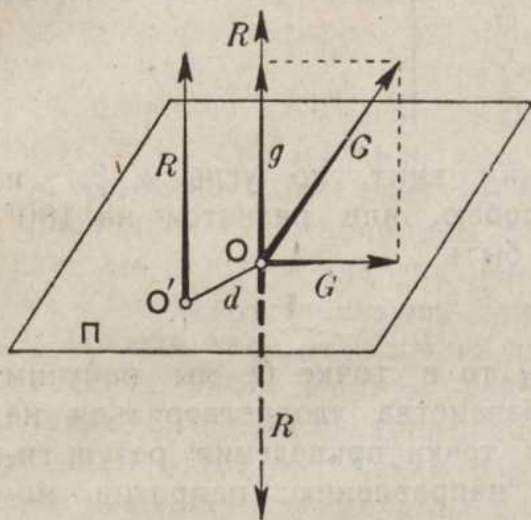
даны формулами (65) и (67).



Если точка приведения выбрана произвольно, то результирующая  $R$  и общий момент системы  $G$  будут составлять друг с другом некоторый угол, отличный от нуля, как показано на чертеже 49. Покажем, что всегда можно выбрать точку приведения  $O'$  так, чтобы результирующая и момент системы были расположены по одной прямой. В самом деле, предположим, что, например, для точки  $O$  результирующая  $R$  и момент  $G$  образуют острый угол (черт. 50). Проведем через точку  $O$  плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную к  $R$ , и спроектируем  $G$  на  $R$  и на плоскость  $\Pi$ ; обозначим первую проекцию через  $g$ , а вторую через  $\bar{G}$ . Мы знаем, что  $\bar{G}$  есть момент некоторой пары, плоскость которой перпендикулярна к  $\bar{G}$ , и, следовательно, может быть проведена через  $R$ . Построим в этой плоскости пару с моментом  $\bar{G}$  так, чтобы силы пары были равны  $R$ , и одна из сил пары проходила через точку  $O$  и была направлена прямо противоположно результирующей  $R$ . Тогда другая сила  $R$  пары пройдет через некоторую точку  $O'$ , где  $OO' = d$  и  $\bar{G} = Rd$ . Мы видим, что силы в точке  $O$  взаимно уравниваются, и мы получаем результирующую в точке  $O'$  и момент  $g$  пары, которую можно расположить в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной

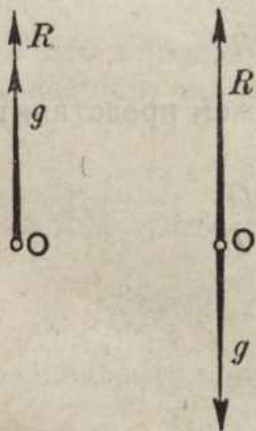


Черт. 49.



Черт. 50.

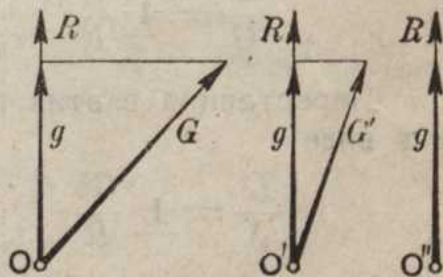
к результирующей  $R$ . Так как момент пары относительно всех точек пространства один и тот же, то, конечно, момент  $g$  можно параллельным перенесением перенести в точку  $O'$ . Таким образом, в зависимости от того, будут ли первоначально  $G$  и  $R$  образовывать между собою острый или тупой угол, мы сможем привести систему к одному из двух указанных на чертеже 51 случаев. Такая комбинация силы и пары, момент которой идет по прямой действия силы, называется динамическим винтом. Следовательно, мы получаем предложение:



Черт. 51.

Всякую систему сил можно, вообще, привести к динамическому винту.

Взяв пару с моментом  $g$  так, чтобы одна из сил пары прошла через точку  $O$  (черт. 52), и сложив эту силу с силой  $R$ , мы получим две силы, из которых одна лежит в плоскости, перпендикулярной к  $R$ , и не проходит через точку  $O$ , а другая пересекает эту плоскость в точке  $O$ . Таким образом, мы получаем:



Черт. 52.

Всякую систему сил можно привести к двум силам, вообще, лежащим в разных плоскостях.

Всегда можно достигнуть того, чтобы одна из двух сил проходила через заданную точку. В самом деле, взяв эту точку за точку приведения



(черт. 49), мы можем, очевидно, применить предыдущее построение и не исходя из динамического винта, а сложив непосредственно силу  $R$  с одной из сил пары с моментом  $G$ .

Покажем теперь, как аналитически определить положение точки  $O'$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ), для которой имеет место динамический винт. Примем сначала точку  $O$  за точку приведения и обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы результирующей  $R$  с осями координат, и через  $a, b, c$  — углы момента  $G$  с осями координат. Мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{R}, & \cos a &= \frac{L}{G}, \\ \cos \beta &= \frac{Y}{R}, & \cos b &= \frac{M}{G}, \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{R}, & \cos c &= \frac{N}{G}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (71)$$

Если мы имеем в точке  $O$  динамический винт, то углы  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $a, b, c$  или соответственно равны между собою, или разнятся на  $180^\circ$  (черт. 51). Поэтому в данном случае должно быть

$$\cos a = \pm \cos \alpha, \quad \cos b = \pm \cos \beta, \quad \cos c = \pm \cos \gamma.$$

Если последние равенства имеют место, то в точке  $O$  мы получим динамический винт. Вообще же предыдущие равенства удовлетворяться не будут. Но выше мы видели, что с изменением точки приведения результирующая не меняется ни по величине, ни по направлению; напротив, момент и по величине, и по направлению изменяется.

Поэтому, всегда можно выбрать такую точку  $O'$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ), чтобы для нее предыдущие равенства удовлетворились. Обозначим углы момента  $G'$  с осями координат для точки  $O'$  через  $a', b', c'$ , где

$$\cos a' = \frac{L'}{G'}, \quad \cos b' = \frac{M'}{G'}, \quad \cos c' = \frac{N'}{G'}.$$

Как мы знаем, углы  $\alpha, \beta, \gamma$  результирующей останутся прежними, и мы должны иметь в точке  $O'$

$$\cos a' = \pm \cos \alpha, \quad \cos b' = \pm \cos \beta, \quad \cos c' = \pm \cos \gamma,$$

или

$$\frac{L'}{G'} = \pm \frac{X}{R}, \quad \frac{M'}{G'} = \pm \frac{Y}{R}, \quad \frac{N'}{G'} = \pm \frac{Z}{R}.$$

Переставляя в этих пропорциях средние члены, мы можем представить их в виде

$$\frac{L'}{X} = \pm \frac{G'}{R}, \quad \frac{M'}{Y} = \pm \frac{G'}{R}, \quad \frac{N'}{Z} = \pm \frac{G'}{R}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z} = \pm \frac{G'}{R}.$$

Четвертое из этих отношений есть следствие трех первых. В самом деле, известно из алгебры, что если дан ряд равных отношений, то каждое из них равно корню квадратному из отношения суммы квадратов числителей к сумме квадратов знаменателей, т. е.

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z} = \sqrt{\frac{L'^2 + M'^2 + N'^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$



Поэтому предыдущие равенства приводятся только к двум независимым равенствам

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z}.$$

Заменяя здесь  $L', M', N'$  их значениями по формулам (67), будем иметь

$$\frac{L - (y' Z - z' Y)}{X} = \frac{M - (z' X - x' Z)}{Y} = \frac{N - (x' Y - y' X)}{Z} \quad (72)$$

Формулы (72) решают задачу, как надо выбрать точку  $O'$  ( $x', y', z'$ ), чтобы в ней имел место динамический винт. Мы видим, что три координаты ( $x', y', z'$ ) этой точки должны удовлетворять двум уравнениям (72), т. е. геометрическое место точек  $O'$  есть некоторая линия, и, так как относительно  $x', y', z'$  уравнения (72) суть первой степени, то эта линия есть прямая. Таким образом, мы приходим к следующему предложению. Геометрическое место точек приведения, в которых получается динамический винт, есть прямая линия. Эта прямая называется центральной осью системы.

Нетрудно найти одну из точек центральной оси. В самом деле, давая в уравнениях (72), например, количеству  $z'$  какое-нибудь определенное значение, мы получим два уравнения первой степени с двумя неизвестными  $x', y'$ , из которых определим эти неизвестные.

Отсюда непосредственно найдем и центральную ось, проведя через полученную точку прямую действия результирующей. Это очевидно, так как сила есть вектор скользящий, момент же пары для всех точек пространства один и тот же. Таким образом, центральная ось системы образует с осями координат те же углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , как и результирующая сила. Очевидно, что если система приводится только к одной равнодействующей, то ее прямая действия и есть центральная ось.

Вернемся теперь к уравнениям (65) и (67), имеющим место для двух точек приведения  $O$  и  $O'$ ,

$$\begin{aligned} X' &= X, & Y' &= Y, & Z' &= Z; \\ L' &= L - (y' Z - z' Y), & M' &= M - (z' X - x' Z), & N' &= N - (x' Y - y' X). \end{aligned}$$

Перемножая почленно эти уравнения, мы после сокращения получим

$$L' X' + M' Y' + N' Z' = LX + MY + NZ \quad (73)$$

Таким образом, где бы ни была взята точка приведения, выражение  $LX + MY + NZ$  остается неизменным. Найдем его геометрический смысл.

Для этого определим угол  $\widehat{(R, G)}$  между результирующей  $R$  и моментом  $G$ . По известной формуле аналитической геометрии мы имеем

$$\cos \widehat{(R, G)} = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma,$$

или по формулам (71),

$$\cos \widehat{(R, G)} = \frac{LX}{GR} + \frac{MY}{GR} + \frac{NZ}{GR} = \frac{LX + MY + NZ}{GR}.$$

Следовательно, мы получим

$$RG \cos \widehat{(R, G)} = LX + MY + NZ \quad (74)$$

Произведение двух векторов на косинус угла между ними называется скалярным произведением векторов\*). Таким образом выра-

\*) Скаляром называется величина, значение которой выражается абсолютным числом, в отличие от вектора, имеющего направление.



жение  $LX + MY + NZ$  равно скалярному произведению результирующей и общего момента системы. Мы видим, что как величина результирующей,

так и величина скалярного произведения  $RG \cos \angle (G, R)$  не изменяется от изменения точки приведения; очевидно также, что эти величины не изменяются при общем преобразовании осей координат (последнее нетрудно доказать непосредственно). Поэтому оба эти количества называются инвариантами. Итак, мы имеем два инварианта системы сил

$$X^2 + Y^2 + Z^2, \dots \dots \dots (75)$$

$$LX + MY + NZ \dots \dots \dots (76)$$

Возьмем второй инвариант, в виде  $RG \cos \angle (R, G)$ .

Обозначив

$$g = G \cos \angle (R, G), \dots \dots \dots (77)$$

мы видим, что  $g$  есть проекция момента на результирующую. Следовательно, второй инвариант можно представить в виде

$$R \cdot g \dots \dots \dots (78)$$

Так как  $R$  не меняется от изменения точки приведения, то не должно меняться и  $g$ ; следовательно, проекция общего момента системы на результирующую постоянна для всех точек приведения. Изменяя точку приведения, мы можем достигнуть того, что момент совпадет со своей проекцией на результирующую, т. е. получит наименьшее значение (черт. 52). Поэтому момент  $g$  носит название „момента минимума“. С помощью второго инварианта можно решить вопрос о характере простейшей системы, к которой можно привести данную систему, независимо от взятой точки приведения.

Предположим, что  $Rg \neq 0$ . Очевидно, что в этом случае ни  $R$ , ни  $g$  нулю не равны, и система приводится к динамическому винту, или двум силам, не лежащим в одной плоскости. Предположим теперь, что  $Rg = 0$ . Если при этом  $R \neq 0$ , то должно быть  $g = 0$ , и систему можно привести к одной равнодействующей, расположенной вдоль центральной оси. Напротив, если  $R = 0$ , то момент для всех точек пространства постоянен и равен  $g$ . Поэтому, если  $g$  отлично от нуля, то система приводится к паре с моментом  $g$ ; если же и  $g$  равно нулю, то нет ни пары, ни равнодействующей, и система сил взаимно уравновешивается, или, как говорят, система будет равносильна нулю. Две системы называются равносильными, если для одной и той же точки приведения они имеют общую результирующую и одинаковый общий момент; на основании предыдущего они будут обладать этим свойством и для всех остальных точек приведения. Все рассмотренные случаи можно свести в следующую таблицу:

| $LX + MY + NZ \neq 0$ | Динамический винт или две силы в разных плоскостях.                                                 |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $LX + MY + NZ = 0$    | $X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$<br>одна равнодействующая вдоль центральной оси.                            |
|                       | $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$<br>$L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$<br>одна пара.                                     |
|                       | $X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$<br>$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$<br>система равносильна нулю. |



Таким образом, чтобы система сил взаимно уравнивалась, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\left. \begin{array}{lll} X=0, & Y=0, & Z=0, \\ L=0, & M=0, & N=0. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (79)$$

**Пример.**—Пусть будет дана система четырех сил

$$F_1 \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 4, 5, 6 \end{pmatrix}, F_2 \begin{pmatrix} 2, 3, 1 \\ 4, 0, 2 \end{pmatrix}, F_3 \begin{pmatrix} 0, -1, 2 \\ 2, 1, 7 \end{pmatrix}, F_4 \begin{pmatrix} 5, 4, -1 \\ -6, 1, -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем прежде всего проекции результирующей. По формулам (62) имеем

$$\begin{aligned} X &= 4 + 4 + 2 - 6 = + 4, \\ Y &= 5 + 0 + 1 + 1 = + 7, \\ Z &= 6 + 2 + 7 - 2 = + 13, \end{aligned}$$

Отсюда величина результирующей  $R$  равна, с точностью до 0,001,

$$R = \sqrt{4^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{234} = 15,297.$$

Косинусы углов, образуемых результирующей с осями координат, будут

$$\cos \alpha = + \frac{4}{\sqrt{234}}; \cos \beta = + \frac{7}{\sqrt{234}}; \cos \gamma = + \frac{13}{\sqrt{234}}.$$

Отсюда находим

$$\alpha = 74^\circ 50', \quad \beta = 62^\circ 46', \quad \gamma = 31^\circ 48';$$

такие же углы образует с осями координат центральная ось системы. Будем теперь искать моменты сил относительно осей и проекции общего момента системы по формулам (64); мы получим

|                                     |                                       |                                       |
|-------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $L_1 = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3$  | $M_1 = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = + 6$   | $N_1 = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = - 3$   |
| $L_2 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = + 6$ | $M_2 = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$     | $N_2 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$   |
| $L_3 = -1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = -9$ | $M_3 = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 7 = + 4$   | $N_3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = + 2$   |
| $L_4 = 4 \cdot -2 + 1 \cdot 1 = -7$ | $M_4 = -1 \cdot 6 - 5 \cdot -2 = + 4$ | $N_4 = 5 \cdot 1 - 4 \cdot -6 = + 29$ |
| $M = -13$                           | $M = + 26$                            | $N = + 16$                            |

Составим теперь выражение (78) для второго инварианта

$$LX + MY + NZ = -13 \cdot 4 + 26 \cdot 7 + 16 \cdot 13 = + 338.$$

Исходя из выражения (78) для второго инварианта, будем иметь

$$Rg = 338,$$

или

$$g = \frac{338}{\sqrt{234}} = 22,096.$$

Так как второй инвариант нулю не равен, то система приводится к динамическому винту. Вдоль центральной оси, образующей с осями координат углы  $\alpha = 74^\circ 50'$ ,  $\beta = 62^\circ 46'$ ,  $\gamma = 31^\circ 48'$ , располагается результирующая  $R = 15,297$  в том же направлении; в том же направлении располагается момент пары  $g = 22,096$ . Заметим, что если бы знак при  $g$  был отрицательный, то это показывало бы, что направление  $g$  прямо противо-



положно направлению  $R$ , так как  $g = G \cos (R, G)$ . Остается найти какую-нибудь точку центральной оси, например, точку ее пересечения с плоскостью  $xOy$ . Для этого возьмем уравнение центральной оси в виде (72); заменяя в нем  $(X, Y, Z)$ ,  $(L, M, N)$  их значениями, будем иметь

$$\frac{-13 - (13y' - 7z')}{4} = \frac{26 - (4z' - 13x')}{7} = \frac{16 - (7x' - 4y')}{13}.$$

Полагая здесь  $z' = 0$ , получим два уравнения для определения  $x'$  и  $y'$

$$\frac{-13 - 13y'}{4} = \frac{26 + 13x'}{7},$$

$$\frac{-13 - 13y'}{4} = \frac{16 - 7x' + 4y'}{13}$$

или

$$4x' + 7y' = -15,$$

$$28x' - 185y' = 233.$$

Решая эти уравнения, найдем координаты  $x'$ ,  $y'$  следа центральной оси на плоскости  $xOy$ , именно

$$x' = -1,248, \quad y' = -1,444.$$

Отсюда будем иметь уравнение центральной оси в обычном виде

$$\frac{x + 1,248}{4} = \frac{y + 1,444}{7} = \frac{z}{13}.$$

Таким образом, задача приведения данной системы четырех сил вполне решена.

## Г Л А В А VII.

### У Ч Е Н И Е О Р А В Н О В Е С И И.

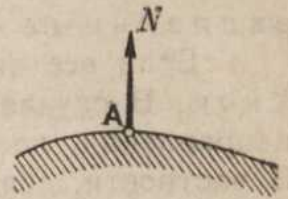
В предыдущей главе мы видели, что необходимые и достаточные условия равновесия системы сил суть

$$\left. \begin{array}{l} X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \\ L=0, \quad M=0, \quad N=0. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (80)$$

Эти уравнения — основные в статике. Предположим, что мы имеем материальную точку или твердое тело. При применении к ним уравнений (80), мы должны рассмотреть все силы, которые на них действуют. Мы разобьем силы на два класса; силы непосредственно данные, и силы или реакции связей. Выясним характер этих последних сил. Если для тела или точки возможны все поступательные и вращательные движения, то мы будем говорить, что они свободны; если же для них возможно не всякое движение, то мы будем говорить, что на них наложены связи. Например, если точка всегда должна оставаться на поверхности, то на точку наложена связь, осуществленная этою поверхностью; точно также, дверь, вращающаяся в петлях, ограничена в своих движениях связями, осуществленными закреплением двух ее точек в петлях. Рассмотрим, например, тяжелую точку,



лежащую на горизонтальной плоскости. Точка давит на эту плоскость, и с такою же силою плоскость давит на точку. Следовательно, точка находится под действием двух сил — силы тяжести и силы давления плоскости. И вообще, всякий раз, когда на тело или точку, на которые наложены связи, действуют силы, то под действием этих сил тело или точка будут давить на связи, испытывая со стороны последних такое же противодействие. Эти силы давления связей называются реакциями связей. Реакции связей, вообще, неизвестны ни по величине, ни по направлению, так что каждая сила реакции приводится к трем неизвестным, именно, к трем своим компонентам. В частном случае, когда точка или тело могут скользить без трения, направление силы реакции известно, и остается неизвестною лишь ее величина. Именно, в этом случае сила реакции нормальна к поверхности или линии, вдоль которых может происходить скольжение. В самом деле, предположим, что точка  $A$  находится на поверхности (черт. 53.) Если трения нет, то нет никакой касательной силы, мешающей передвижению точки по поверхности, и, следовательно, полная сила реакции  $N$  должна быть направлена нормально к поверхности.



Черт. 53.

Если связь никоим образом не может быть нарушена, то связь называется удерживающей; если же при некоторых перемещениях связь может быть нарушена, то связь называется не удерживающей. Пример не удерживающей связи представляет случай тела, лежащего на плоскости; тело не может проникнуть через плоскость, но однако может ее покинуть, удаляясь в ту сторону от плоскости, на которой оно лежит.

Механически все действия связей приводятся к развиваемым ими силам реакции. Поэтому, присоединяя к данным силам еще силы реакции, рассматривают точки и тела, как свободные. Применяя ко всем этим силам уравнения равновесия (80), получим уравнения между данными силами, силами реакции и параметрами, характеризующими рассматриваемую материальную систему. Силы реакции суть, вообще, неизвестные в задаче, и при определении их из уравнений (80) возможны три случая: 1) число неизвестных сил реакции меньше числа уравнений, 2) число неизвестных сил реакции равно числу уравнений, 3) число неизвестных сил реакции больше числа уравнений. В первом случае, исключая из уравнений неизвестные силы реакции, придем к соотношениям, при которых только и возможно равновесие; эти соотношения называются условиями равновесия. Во втором случае равновесие, вообще, не ограничено никакими условиями, и для каждого положения равновесия можно определить неизвестные силы реакции. Наконец, в третьем случае силы реакции из уравнений равновесия определены быть не могут; как мы увидим в дальнейшем, для определения их надо отбросить предположение об абсолютной твердости тел и учесть их упругие свойства; это даст надлежащее число добавочных уравнений, присоединяя которые к уравнениям равновесия, мы сможем определить все силы реакции. Первые два случая называются статически определяемыми, а третий — статически неопределимым \*).

\*) Примечание.— И в первых двух случаях может получиться статически неопределимая система, если неизвестные силы реакции входят не во все уравнения равновесия таким образом, что разыскание этих сил реакции есть задача неопределенная. См., например, ниже задачу 1 в общем случае равновесия твердого тела.



## Равновесие точки.

Перейдем теперь к изучению равновесия точки. Приняв рассматриваемую точку за центр приведения, мы найдем, что моменты всех сил будут тождественно равны нулю, и от уравнений (80) останется

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0 \dots \dots \dots (81)$$

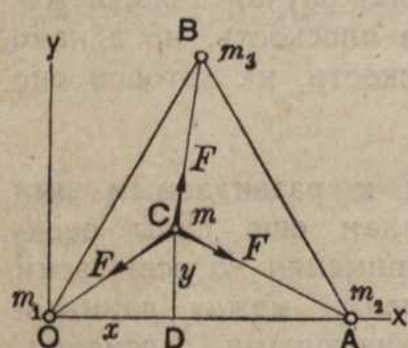
Это — уравнения равновесия точки. Очевидно, что за систему координат можно взять также и любую косоугольную систему, и мы можем высказать следующее общее предложение:

Чтобы точка была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три непараллельных направления были равны нулю.

Если все силы лежат в одной плоскости, то задача называется плоскою. В случае плоской задачи, очевидно, надо взять два непараллельных направления, лежащих в этой плоскости, для проектирования на них сил. В частности, если за эти направления возьмем оси  $Ox$  и  $Oy$ , то получим уравнения равновесия

$$X=0, \quad Y=0 \dots \dots \dots (82)$$

**Примеры.**—1. В вершинах равностороннего треугольника  $OAB$  расположены соответственно массы  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ .



Черт. 54.

Найти положение равновесия массы  $m$ , притягиваемой к этим трем массам с силами, пропорциональными произведению масс на первую степень расстояния между ними.

Возьмем начало координат в точке  $O$  и направим ось  $Ox$  по прямой  $OA$  (черт. 54). Очевидно, что положение равновесия точки  $C$  с массой  $m$  находится в плоскости  $OAB$ , так что мы имеем здесь дело с плоской задачей. Обозначим координаты точки  $C$  через  $(x, y)$  и длину сторон треугольника  $OAB$  через  $a$ . Силы притяжения точки  $C$  к точкам  $O$ ,  $A$  и  $B$  будут соответственно равны

$$F_1 = kmm_1 \cdot \overline{CO}, \quad F_2 = kmm_2 \cdot \overline{CA}, \quad F_3 = kmm_3 \cdot \overline{CB},$$

где  $k$  есть множитель пропорциональности, и направлены от точки  $C$  к точкам  $O$ ,  $A$  и  $B$ . При проектировании сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  на оси координат мы, очевидно, придем к проекции векторов  $\overline{CO}$ ,  $\overline{CA}$  и  $\overline{CB}$  на оси координат. Но легко видеть, что

$$\text{пр.}_x \overline{CO} = \overline{DO} = -x; \quad \text{пр.}_x \overline{CA} = \overline{DA} = a - x; \quad \text{пр.}_x \overline{CB} = \frac{a}{2} - x;$$

$$\text{пр.}_y \overline{CO} = \overline{CD} = -y; \quad \text{пр.}_y \overline{CA} = \overline{CD} = -y; \quad \text{пр.}_y \overline{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - y,$$

где  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  есть высота треугольника  $OAB$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} X_1 &= -kmm_1x, & Y_1 &= -kmm_1y, \\ X_2 &= kmm_2(a-x), & Y_2 &= -kmm_2y, \\ X_3 &= kmm_3\left(\frac{a}{2}-x\right), & Y_3 &= kmm_3\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-y\right). \end{aligned}$$



Уравнения равновесия будут

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 0, \quad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0,$$

или

$$-kmm_1x + kmm_2(a - x) + kmm_3\left(\frac{a}{2} - x\right) = 0,$$

$$-kmm_1y - kmm_2y + kmm_3\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right) = 0.$$

Сокращая на  $km$ , получим

$$-m_1x + m_2a - m_2x + m_3\frac{a}{2} - m_3x = 0,$$

$$-m_1y - m_2y + m_3\frac{a\sqrt{3}}{2} - m_3y = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{2m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

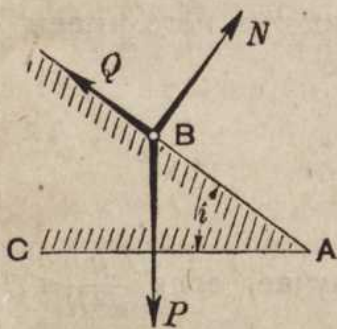
Эти формулы определяют координаты той точки  $C$ , в которой масса  $m$  будет в равновесии. В частном случае, если  $m_1 = m_2 = m_3$ , мы будем иметь

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

т.-е. точка  $C$  находится в центре круга, описанного вокруг  $\triangle OAB$ .

2. Найти условия равновесия тяжелой точки, удерживаемой на наклонной плоскости силою  $Q$ , параллельною этой плоскости.

Обозначим через  $P$  вес точки и через  $i$  угол наклонной плоскости с горизонтом (черт. 55). Так как точка несвободная, то к данным силам  $P$  и  $Q$



Черт. 55.

мы должны присоединить еще силу реакции  $N$ , которая будет перпендикулярна плоскости  $AB$ . Мы имеем в этой задаче одну неизвестную силу реакции  $N$ , уравнений же равновесия будет два. Следовательно, одно из этих уравнений будет служить для определения  $N$ . Выберем за направление проекций направление сил  $N$  и  $Q$ . Преимущество этого выбора заключается в том, что, проектируя все силы на направление  $N$ , мы непосредственно найдем  $N$ ; проектируя же все силы на направление силы  $Q$ , перпендикулярное к  $N$ , мы исключим силу  $N$  и

получим непосредственно условие равновесия. Мы будем иметь

$$N - P \cos i = 0,$$

$$Q - P \sin i = 0.$$

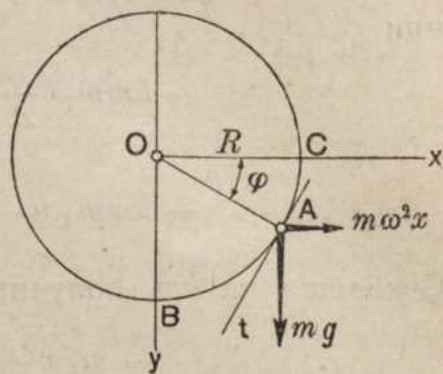
Первое уравнение дает  $N = P \cos i$ , а второе  $Q = P \sin i$  представляет условие, при котором только и возможно равновесие.

3. Тяжелая точка находится на окружности с радиусом, равным  $R$ , и отталкивается от вертикального диаметра  $Oy$  этой окружности с силою, равною  $m\omega^2x$ , где  $m$ —



масса точки,  $\omega^2$  — коэффициент пропорциональности, и  $x$  — расстояние точки от  $Oy$ . Найти условия равновесия.

Обозначим угол, образуемый радиусом  $OA$ , проведенным в рассматриваемую точку, с горизонтальной осью  $Ox$  через  $\varphi$  (черт. 56). Так как и здесь точка несвободная, то к действующим силе тяжести  $mg$  и силе  $m\omega^2 x$  надо присоединить еще силу реакции связи  $N$ , которая пойдет по радиусу  $AO$ . Мы опять приходим к двум уравнениям с одной неизвестной силой реакции  $N$ . Чтобы получить уравнение для определения  $N$  и условие равновесия, не содержащее силы  $N$ , достаточно за направление проекций выбрать направления  $AO$  и  $At$ . Проектируя все силы на эти направления получим



Черт. 56.

$$\begin{aligned} N - m\omega^2 x \cos \varphi - mg \sin \varphi &= 0, \\ mg \cos \varphi - m\omega^2 x \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Заменяя  $x$  через  $R \cos \varphi$  и сокращая второе уравнение на  $m$ , получим

$$\begin{aligned} N &= m (\omega^2 R \cos^2 \varphi + g \sin \varphi), \\ \cos \varphi (g - \omega^2 R \sin \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение определяет силу реакции  $N$ , второе есть условие равновесия, определяющее положения равновесия точки  $m$ . Второе уравнение распадается на два

$$\cos \varphi = 0, \quad g - \omega^2 R \sin \varphi = 0.$$

Положим сначала  $\cos \varphi = 0$ ; тогда  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Точка  $m$  находится в точке  $B$ , и сила  $N = mg$ . Результат — очевидный, так как сила  $m\omega^2 x$  в этом случае равна нулю ( $x = 0$ ), и точка  $m$  находится только под действием силы тяжести  $mg$ . Перейдем теперь ко второму уравнению; из него имеем

$$\sin \varphi = \frac{g}{\omega^2 R},$$

$$N = m\omega^2 R.$$

Это решение может иметь место только в том случае, если  $\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1$ , или, если  $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$ . Следовательно, если  $\omega^2 < \frac{g}{R}$ , то возможно только одно положение равновесия в точке  $B$ . Если же  $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$ , то возможны два положения равновесия как в точке  $B$ , так и в той точке  $A$ , в которой равнодействующая сил  $m\omega^2 x$  и  $mg$  пойдет по направлению радиуса  $OA$  и будет уравновешиваться нормальной реакцией  $N$ .

Примечание. — Следует обратить внимание на способ исключения силы реакции через составление суммы проекций всех сил на направление, перпендикулярное к этой силе реакции.



### Равновесие тел.

Рассмотрим сначала плоскую задачу о равновесии тел, т.-е. такую задачу, когда все силы лежат в одной плоскости. Примем эту плоскость за плоскость  $xOy$ . Три из уравнений (80) обращаются в тождества, именно  $Z=0$ ,  $L=0$ ,  $M=0$ , так как проекция каждой силы на ось  $Oz$  равна нулю, и момент каждой силы относительно оси  $Ox$  или  $Oy$  также равен нулю. Следовательно, остаются только три уравнения равновесия

$$X=0, \quad Y=0, \quad N=0 \dots \dots \dots (83)$$

Очевидно, что результат можно обобщить, взяв за точку приведения не точку  $O$ , а любую точку плоскости  $xOy$ , и за направления проекций — любые непараллельные направления этой плоскости.

Дадим теперь другие способы составления уравнений равновесия. Так как плоская система сил приводится или к равнодействующей, или к паре, или равносильна нулю, то, если момент всех сил относительно какой-нибудь точки  $O_1$  плоскости будет равен нулю,

$$N_{0_1} = 0,$$

пара невозможна, и система или уравнивается, или приводится к равнодействующей, проходящей через точку  $O_1$ . Если общий момент относительно какой-нибудь другой точки  $O_2$  также равен нулю,

$$N_{0_2} = 0,$$

то система сил или уравнивается, или приводится к равнодействующей, проходящей через точки  $O_1$  и  $O_2$ . Если, сверх того, сумма проекций всех сил на направление, перпендикулярное к прямой  $O_1O_2$ , равна нулю, то очевидно, что равнодействующая не существует, и система сил находится в равновесии.

Наконец, предположим, что общий момент всех сил относительно трех точек  $O_1, O_2, O_3$  плоскости, не лежащих на одной прямой, равен нулю

$$N_{0_1} = 0, \quad N_{0_2} = 0, \quad N_{0_3} = 0.$$

В этом случае система сил находится в равновесии; в самом деле, здесь равнодействующая существовать не может, так как она не может пройти через три точки  $O_1, O_2$  и  $O_3$ , не лежащие на одной прямой.

Таким образом, мы получаем три способа составления уравнений равновесия плоской задачи. Именно, система сил будет в равновесии, если

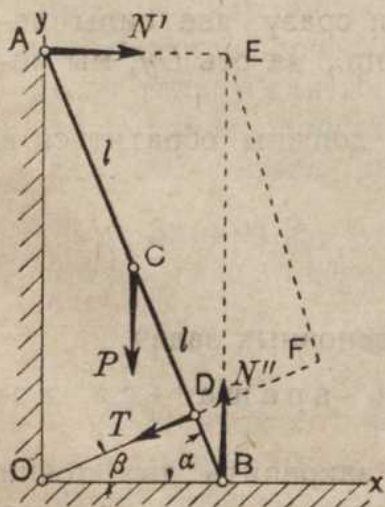
1) суммы проекций всех сил на два непараллельных направления и общий момент относительно какой-нибудь точки плоскости равны нулю;

2) общие моменты относительно двух точек плоскости и сумма проекций всех сил на направление, перпендикулярное к прямой, соединяющей эти две точки, равны нулю;

3) общие моменты всех сил относительно трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой, равны нулю.

**Пример.**—Тяжелая балка  $AB$  опирается своими концами  $A$  и  $B$  в вертикальную и горизонтальную стенки  $Oy$  и  $Ox$ . В точке  $D$  к балке привязана нить  $OD$ . Найти натяжение  $T$  нити.

Обозначим вес балки через  $P$ , и положим  $AC=CB=l$ ,  $\angle ABO=\alpha$ ,  $\angle DOB=\beta$  (черт. 57). Так как на балку наложены связи, то кроме силы  $P$  на нее действуют силы реакции  $T$  и  $N'$  и  $N''$  в точках  $A$  и  $B$ . Чтобы определить силу реакции  $T$ , возь-



Черт. 57.



мом момент всех сил относительно точки  $E$ , в которой пересекаются силы реакции  $N'$  и  $N''$ ; при этом момент этих последних сил будет равен нулю, и нужно будет вычислить только момент сил  $T$  и  $P$  относительно точки  $E$ .

Считая момент положительным для сил, идущих в направлении обхода вокруг точки  $E$  по стрелке часов, получим

$$\text{мом. } T = T \cdot EF = T \cdot 2l \sin(\alpha - \beta),$$

$$\text{мом. } P = -P \cdot \frac{1}{2} AE = -P \cdot l \cos \alpha,$$

и уравнение равновесия будет

$$T \cdot 2l \sin(\alpha - \beta) - P \cdot l \cos \alpha = 0;$$

отсюда найдем

$$T = \frac{1}{2} P \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Пока точка  $D$  лежит ниже точки  $C$ , мы имеем  $\alpha > \beta$ , и решение возможно. Если точка  $D$  попадет в точку  $C$ , то  $\beta = \alpha$ , и мы получим  $T$  бесконечно большим. Наконец, если точка  $D$  будет лежать выше точки  $C$ , то будет  $\alpha < \beta$ , и для  $T$  мы получим отрицательное решение. Это показывает, что сила  $T$  будет направлена не к точке  $O$ , а от точки  $O$ , и, чтобы помешать соскальзыванию балки  $AB$ , надо нить  $OD$  заменить твердым стержнем. Чтобы определить силы реакции  $N'$  и  $N''$ , можно воспользоваться способом проекций. Проектируя все силы на ось  $Ox$ , получим

$$N' - T \cos \beta = 0,$$

или

$$N' = T \cos \beta = \frac{1}{2} P \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Составляя сумму проекций сил на ось  $Oy$ , будем иметь

$$N'' - P - T \sin \beta = 0,$$

или

$$N'' = P + \frac{1}{2} P \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Мы шли в решении этой задачи первым способом и составили три уравнения, из которых определили три неизвестных силы реакции  $N'$ ,  $N''$  и  $T$ . Здесь число неизвестных сил реакции равно числу уравнений; поэтому условий равновесия не существует, и равновесие возможно при всех положениях балки  $AB$ , т.-е. при всех значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  кроме случая, когда  $\alpha = \beta$ , и когда для натяжения  $T$  получается бесконечно большое значение.

**Примечание.**—Следует обратить внимание на то, что вычисление моментов дает более мощный прием для исключения сил реакции, чем проектирование сил на ось. Это ясно видно на предыдущем примере, когда, вычисляя момент относительно точки  $E$ , мы исключили сразу две силы реакции  $N'$  и  $N''$ , составляя же сумму проекций сил, напр., на ось  $Oy$ , мы исключили только одну силу реакции  $N'$ .

Переходя к общему случаю равновесия тела, мы должны обратиться к общим уравнениям равновесия (80)

$$X = 0, Y = 0, Z = 0,$$

$$L = 0, M = 0, N = 0.$$

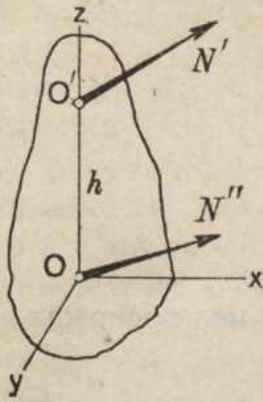
Применим эти уравнения к решению некоторых основных задач.

**Задача I.**—Равновесие тела, могущего вращаться вокруг оси.

Чтобы тело имело неподвижную ось, достаточно закрепить две точки этого тела; тогда будет неподвижной вся прямая, проходящая через эти две



точки. Обозначим точки закрепления через  $O$  и  $O'$ ; пусть будет расстояние  $OO' = h$ . Так как на тело действуют силы, то в точках  $O'$  и  $O$  развиваются силы реакции  $N'$  и  $N''$ . Ни величина, ни направление этих сил реакции неизвестны; поэтому мы введем их компоненты  $(X', Y', Z')$  и  $(X'', Y'', Z'')$  (черт. 58).



Черт. 58.

Чтобы упростить уравнения, из которых придется определять неизвестные  $(X', Y', Z')$  и  $(X'', Y'', Z'')$ , примем точку  $O$  за начало прямоугольных осей координат, и направим одну из осей, напр., ось  $Oz$ , по прямой  $OO'$ . В этом случае моменты силы  $N''$  будут равны нулю, и момент силы  $N'$  относительно оси  $Oz$  также будет равен нулю. Данные силы  $F'_i$  мы определим их координатами  $F'_i \begin{pmatrix} x_i, y_i, z_i \\ X_i, Y_i, Z_i \end{pmatrix}$ . Применим к системе сил

$F'_i, N'$  и  $N''$  уравнения (80). Мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_i X_i + X' + X'' &= 0, \\ \sum_i Y_i + Y' + Y'' &= 0, \\ \sum_i Z_i + Z' + Z'' &= 0, \\ \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) - h Y' &= 0, \\ \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i) + h X' &= 0, \\ N = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (84)$$

$$N = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \dots \dots \dots (85)$$

В двух последних формулах (84) при вычислении моментов силы  $N'$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  по формулам  $yZ - zY$  и  $zX - xZ$  мы должны были взять для координат точки  $O'$  выражения  $x=0, y=0, z=h$ , что дало члены  $-hY'$  и  $+hX'$ .

В формулу (85) не входят силы реакции; следовательно, уравнение (85) есть условие равновесия, и мы приходим к следующему важному предложению:

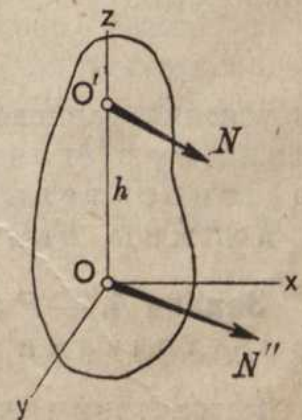
Чтобы тело, могущее вращаться вокруг оси, было в равновесии, сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно оси вращения должна быть равна нулю.

Пять уравнений (84) служат для определения шести сил реакции  $(X', Y', Z'), (X'', Y'', Z'')$ ; следовательно, эта задача статически неопределимая. Из двух последних уравнений (84) мы определим  $X'$  и  $Y'$ ; вставляя их значения в два первых уравнения (84), будем иметь  $X''$  и  $Y''$ ; третье уравнение даст сумму  $Z' + Z''$ , причем разделить  $Z'$  и  $Z''$  нельзя. Последний результат непосредственно очевиден, так как к  $Z'$  и  $Z''$  всегда можно прибавить по произвольно равной, но противоположной силе, направленной по оси  $Oz$ . В сумме  $Z' + Z''$  эти две прибавленные силы дадут нуль, но каждая из них меняет компоненты  $Z'$  и  $Z''$ , так что отдельно  $Z'$  и  $Z''$  остаются неопределенными для случая абсолютно твердого тела. Если же тело упругое, то без деформации тела такого прибавления двух сил, направленных по оси  $Oz$ , сделать нельзя.

**Задача 2.** — Равновесие тела, могущего перемещаться винтовым движением.

Оставив обозначения предыдущей задачи, примем ось  $Oz$  за ось вращения и скольжения (черт. 59).

В этом случае силы реакции  $N'$  и  $N''$  нормальны к оси  $Oz$ , так как скольжение происходит без трения. Поэтому компоненты сил  $N'$  и  $N''$  будут  $(X', Y', 0)$  и



Черт. 59.



$(X'', Y'', 0)$ . Вставляя эти значения в уравнения (84) и (85), получим

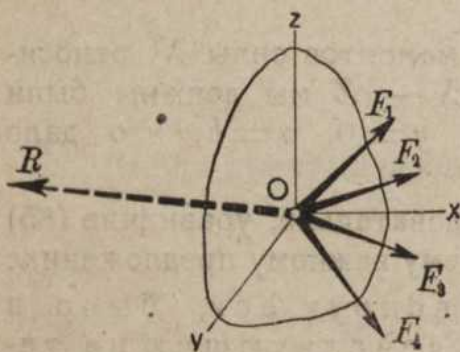
$$\left. \begin{aligned} \Sigma_i X_i + X' + X'' &= 0, \\ \Sigma_i Y_i + Y' + Y'' &= 0, \\ Z = \Sigma_i Z_i &= 0, \\ \Sigma_i (y_i Z_i - z_i Y_i) - h Y' &= 0, \\ \Sigma_i (z_i X_i - x_i Z_i) + h X' &= 0, \\ N = \Sigma_i (x_i Y_i - y_i X_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (86)$$

Мы видим, что третье и шестое из уравнений (86) не содержат сил реакции; следовательно, это суть условия равновесия

$$Z = 0, N = 0 \dots \dots \dots (87)$$

Таким образом, чтобы тело, могущее перемещаться винтовым движением, было в равновесии, сумма проекций всех сил на ось скольжения-вращения и сумма моментов всех сил относительно этой оси должны быть равны нулю.

Остальные четыре уравнения (86) служат для определения четырех сил реакции  $X', Y', X'', Y''$ . Именно, из четвертого и пятого уравнений мы определим  $X'$  и  $Y'$ ; вставляя их в первое и второе, найдем  $X''$  и  $Y''$ . Мы видим, что эта задача статически определяемая.



Черт. 60.

**Задача 3.**—Равновесие тела, имеющего неподвижную точку.

На тело действуют силы, и в точке закрепления  $O$  развивается сила реакции с компонентами  $X', Y', Z'$ . Чтобы исключить эту силу реакции из уравнений моментов, примем неподвижную точку  $O$  за начало координат (черт. 60). Тогда уравнения равновесия будут

$$\Sigma_i X_i + X' = 0, \quad \Sigma_i Y_i + Y' = 0, \quad \Sigma_i Z_i + Z' = 0; \dots \dots \dots (88)$$

$$\left. \begin{aligned} L = \Sigma_i (y_i Z_i - z_i Y_i) &= 0, \\ M = \Sigma_i (z_i X_i - x_i Z_i) &= 0, \\ N = \Sigma_i (x_i Y_i - y_i X_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (89)$$

Первые три уравнения (86) определяют силу реакции  $(X', Y', Z')$ ; уравнения (89)

$$L = 0, M = 0, N = 0$$

суть условия равновесия. Таким образом, чтобы тело, имеющее неподвижную точку, было в равновесии, суммы моментов сил относительно трех осей, проходящих через эту точку, должны быть равны нулю.

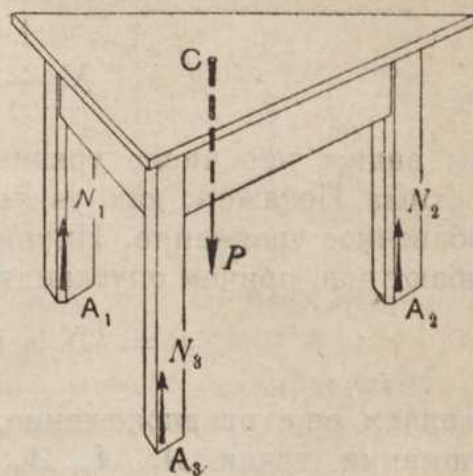
**Задача 4.**—Равновесие тяжелого тела, опирающегося тремя точками на горизонтальную плоскость.

Рассмотрим тяжелое тело, вес которого равен  $P$ , опирающееся точками  $A_1, A_2, A_3$  на горизонтальную плоскость (черт. 61). Пусть будет  $C(x, y, z)$



его центр тяжести, отнесенный к прямоугольной системе осей координат, ось  $Oz$  которых направлена вертикально вверх, и плоскость  $xOy$  проходит через точки  $A_1, A_2, A_3$ . Пусть будут  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$  координаты точек опоры. В точках  $A_1, A_2, A_3$  действуют нормальные силы реакции  $N_1, N_2, N_3$ , направленные вертикально вверх. Из шести уравнений равновесия два уравнения проекций на оси  $Ox$  и  $Oy$  обращаются в тождества, так как силы перпендикулярны к этим осям; точно так же уравнение моментов относительно оси  $Oz$  обращается в тождество, так как все силы параллельны этой оси. Таким образом, остаются только три уравнения

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 - P &= 0, \\ y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 - y P &= 0, \\ -x_1 N_1 - x_2 N_2 - x_3 N_3 + x P &= 0. \end{aligned}$$



Черт. 61.

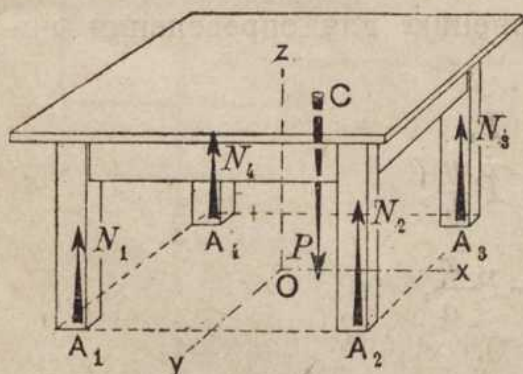
Выражения для моментов сил составлены по формулам  $yZ - zY$  и  $zX - xZ$ , которые в рассматриваемом случае обращаются в  $+yZ$  и  $-xZ$ , так как все силы параллельны оси  $Oz$ ; при этом надо еще принять во внимание, что силы  $N_1, N_2, N_3$  направлены по положительному направлению оси  $Oz$ , а сила  $P$  ей прямо противоположна. Полученные уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= P, \\ y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 &= y P, \\ x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 &= x P. \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы определим неизвестные силы реакции  $N_1, N_2$  и  $N_3$ .

**Задача 5.** — Равновесие тяжелого тела, опирающегося четырьмя точками на горизонтальную плоскость.

В этой задаче мы придем к таким же трем уравнениям, какие получили в предыдущей задаче, но с четырьмя неизвестными силами реакции.



Черт. 62.

Поэтому эта задача статически неопределимая. Чтобы упростить формулы, предположим, что четыре точки опоры  $A_1, A_2, A_3, A_4$  расположены в вершинах прямоугольника со сторонами  $A_1 A_2 = 2a$ ,  $A_2 A_3 = 2b$  (черт. 62).

Обозначим силы реакции через  $N_1, N_2, N_3, N_4$ , вес тела через  $P$ , координаты его центра тяжести  $C$  через  $x, y, z$ , причем ось  $Oz$  направим вертикально вверх, начало координат возьмем в центре прямоугольника  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , и оси координат — параллельно его сторонам. Координаты точек  $A_1, A_2, A_3, A_4$  будут соответственно  $(-a, +b)$ ,

$(+a, +b)$ ,  $(+a, -b)$ ,  $(-a, -b)$ . Так же, как в предыдущей задаче, получим уравнения равновесия

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - P &= 0, \\ b N_1 + b N_2 - b N_3 - b N_4 - y P &= 0, \\ a N_1 - a N_2 - a N_3 + a N_4 + x P &= 0, \end{aligned}$$



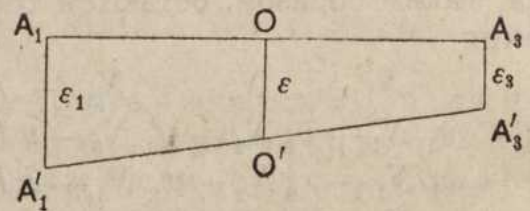
или

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &= P, \\ N_1 + N_2 - N_3 - N_4 &= P \frac{y}{b}; \\ N_1 - N_2 - N_3 + N_4 &= -P \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Мы видим, что число уравнений недостаточно для определения всех неизвестных. Покажем, как, учитывая упругие деформации тел, можно получить добавочное уравнение. Именно, предположим, что ножки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  прогибаются пол, причем опускания их  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  пропорциональны давлениям, т.-е.

$$\varepsilon_1 = kN_1, \quad \varepsilon_2 = kN_2, \quad \varepsilon_3 = kN_3, \quad \varepsilon_4 = kN_4.$$

Сделаем еще предположение, что после деформации точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  сместятся в положения  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$ , причем четыре точки  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  опять будут лежать в одной плоскости. Рассмотрим диагональ  $A_1 A_3$ . После деформации она займет положение  $A'_1 A'_3$  (черт. 63), причем точка  $O$  сместится на расстояние  $\varepsilon = OO'$ ; из свойств трапеции имеем



Черт. 63.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}.$$

Точно так же, рассматривая диагональ  $A_2 A_4$  и замечая, что ее новое положение  $A'_2 A'_4$  должно пересекаться с направлением  $A'_1 A'_3$  в точке  $O'$  на основании сделанного предположения о том, что все четыре точки  $A'_1, A'_2, A'_3$  и  $A'_4$  остаются в одной плоскости, получим

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2}.$$

Следовательно,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4$ . Заменяя  $\varepsilon_i$  их выражениями через  $N_i$ , получим, по сокращении на  $k$ ,

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4.$$

Таким образом мы пришли к четвертому уравнению для определения неизвестных сил реакции. Мы имеем

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &= P, \\ N_1 + N_2 - N_3 - N_4 &= P \frac{y}{b}, \\ N_1 - N_2 - N_3 + N_4 &= -P \frac{x}{a}, \\ N_1 - N_2 + N_3 - N_4 &= 0. \end{aligned}$$

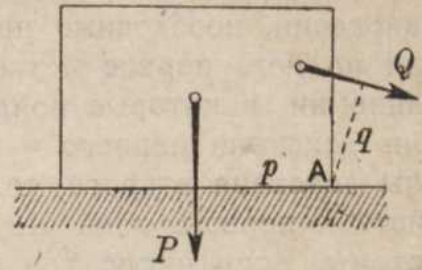
Решая эти уравнения, найдем

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} P \left( 1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), & N_3 &= \frac{1}{4} P \left( 1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right), \\ N_2 &= \frac{1}{4} P \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), & N_4 &= \frac{1}{4} P \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим после этих основных задач случай, тяжелого тела с весом  $P$ , и предположим, что на него действует сила  $Q$ , стремящаяся повер-



нуть тело вокруг ребра  $A$  (черт. 64). Предположим также, что имеет место в большинстве приложений, что силы  $P$  и  $Q$  лежат в одной плоскости. Тогда силы  $P$  и  $Q$  будут сходящимися, и мы найдем их равнодействующую по правилу параллелограмма. Если направление равнодействующей пройдет слева от  $A$ , то тело будет в равновесии, и это положение равновесия будет устойчивым. Если направление равнодействующей пройдет справа от  $A$ , то равновесие невозможно. Если мы будем считать момент сил, направленных относительно  $A$  по стрелке часов, положительным, то в первом случае момент равнодействующей отрицателен, а во втором — положителен. По теореме Вариньона момент равнодействующей равен



Черт. 64.

$$Qq - Pr;$$

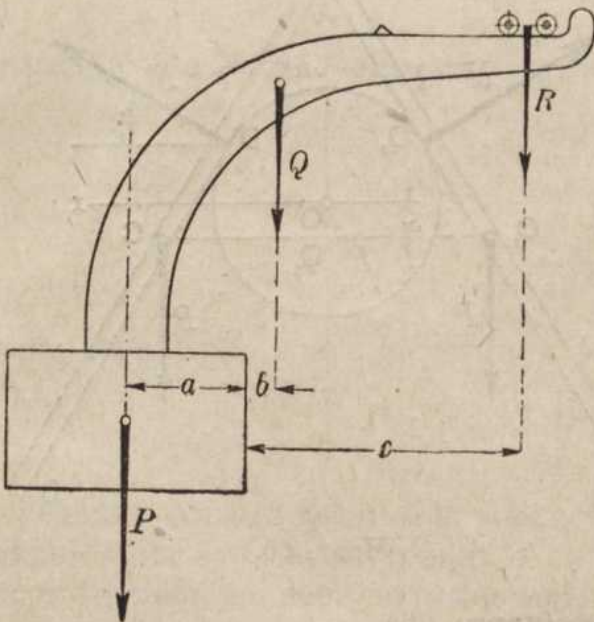
следовательно, для устойчивости равновесия должно быть

$$Qq - Pr < 0,$$

или

$$Pr > Qq \dots \dots \dots (90)$$

Произведение  $Pr$  называется моментом устойчивости, а произведение  $Qq$  — опрокидывающим моментом. Следовательно, для устойчивости равновесия необходимо, чтобы момент устойчивости был больше опрокидывающего момента.



Черт. 65.

**Пример.** — Рассмотрим равновесие крана причем вес его фундамента равен  $P$ , вес самого крана  $Q$ , и вес поднимаемого груза  $R$  (черт. 65). Момент устойчивости будет равен  $Pa$ ; опрокидывающий момент равен  $Qb + Rc$ . Обычно задается то число раз  $n$ , в которое момент устойчивости должен быть больше опрокидывающего момента. Таким образом мы получим

$$Pa = n (Qb + Rc),$$

и отсюда найдем необходимый вес фундамента

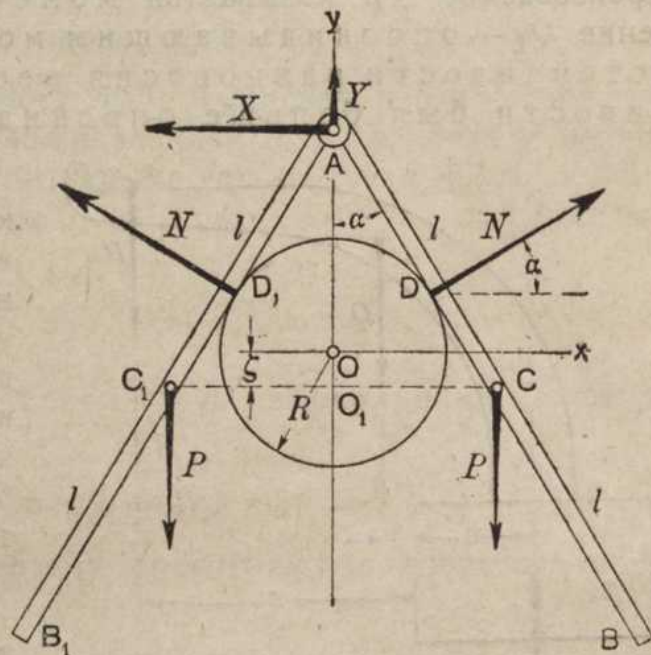
$$P = n \frac{Qb + Rc}{a}.$$

Перейдем теперь к изучению равновесия системы тел. Отличие этой задачи от предыдущих состоит в том, что искомыми неизвестными являются также внутренние силы реакции, которые развиваются в местах соединения различных тел системы. Предположим, что система состоит, напр., из трех тел. Сначала составим уравнения равновесия всей системы, как целого. Мы получим 6 уравнений, в которые внутренние силы реакции не войдут, так как они в системе взаимно уравновешиваются. В самом деле, силы действия первого тела на второе равны и прямо противоположны силам действия второго тела на первое. Выделим далее одно первое тело. Чтобы оно осталось в равновесии, необходимо приложить к нему те силы, с которыми действовали на него второе и третье тело.



Таким образом мы получим еще 6 уравнений, в которые войдут неизвестные внутренние силы реакции, именно, силы действия второго и третьего тела на первое. Выделим затем одно второе тело. Чтобы удержать его в равновесии, необходимо приложить к нему те силы, с которыми действовали на него первое и третье тело. Таким образом мы получим еще шесть уравнений, в которые войдут неизвестные внутренние силы реакции: именно, силы действия первого и третьего тела на второе, причем, очевидно, что силы действия второго тела на первое равны и противоположны силам действия первого тела на второе. Эту операцию применяем для всех тел системы. Если число тел равно  $n$ , то общее число уравнений будет  $6 + 6n$ ; если задача плоская, то число уравнений равно  $3 + 3n$ . Число уравнений может быть и меньше, если некоторые из них обращаются в тождества или являются следствиями других. Если из полученных уравнений все силы реакции определить можно, то задача будет статически определимой; в противном случае — задача статически неопределимая. Этот метод применяется всякий раз, когда хотят разыскать внутренние силы. Предположим, напр., что требуется найти внутренние силы в сечении  $C$  балки  $AB$ . Разрежем мысленно балку по сечению  $C$ . Чтобы часть  $AC$  осталась в равновесии, необходимо к ней приложить те силы и пары, с которыми часть балки  $BC$  действовала на часть балки  $AC$ . Таким образом, на часть балки  $AC$  будут действовать все приложенные к ней данные силы и внешние силы реакции, а также внутренние силы реакции, именно, силы воздействия части  $BC$ . Составив уравнения равновесия всей балки, как целого, а затем части  $AC$ , мы получим уравнения для определения неизвестных внешних сил реакции и искомых внутренних сил. Конечно, можно составлять уравнения равновесия и для части  $BC$ ; величины внутренних сил получаются те же, но с противоположными знаками.

**Пример.**—На вал с радиусом, равным  $R$ , насажены две тяжелые балки  $AB$  и  $AB_1$  с весами  $P$ , скрепленные в точке  $A$  шарниром. Длины балок равны  $2l$ . Найти угол при точке  $A$ , при котором балки останутся в равновесии, причем предполагается, что точка  $A$  с точкою  $O$  лежат на одной вертикали (черт. 66).



Черт. 66.

Пусть будет  $C$  и  $C_1$  центры тяжести балок  $AB$  и  $AB_1$ , и  $\angle OAD = \alpha$ . В точках  $D$  и  $D_1$  развиваются внешние силы реакции, которые по симметрии между собою равны; обозначим их через  $N$ . Рассматривая сначала систему двух балок, как целое, составим ее уравнения равновесия. Проектируя все силы на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и взяв моменты относительно точки  $O$ , получим

$$N \cos \alpha - N \cos \alpha = 0,$$

$$2 N \sin \alpha - 2 P = 0,$$

$$P \cdot OC - P \cdot OC_1 = 0.$$

Мы видим, что первое и третье уравнения обращаются в тождества, и остается только второе уравнение, которое сократим на 2,

$$N \sin \alpha - P = 0.$$



Отрежем теперь мысленно в точке  $A$  правую балку от левой и будем искать равновесие одной правой балки  $AB$ . Чтобы удержать балку  $AB$  в равновесии, мы должны в точке  $A$  приложить ту силу, с которой левая балка действовала на правую; пусть будут  $X$  и  $Y$  компоненты этой силы. Таким образом, на правую балку действуют четыре силы  $P, N, X, Y$ . Составляя уравнения равновесия, будем иметь

$$\begin{aligned} -X + N \cos \alpha &= 0, \\ Y + N \sin \alpha - P &= 0, \\ -X \frac{R}{\sin \alpha} + Pl \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание предыдущее уравнение  $N \sin \alpha - P = 0$ , получим из второго  $Y = 0$ , что можно было вывести и непосредственно из рассмотрения симметрии. Далее, мы будем иметь

$$N = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad X = N \cos \alpha = P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Вставляя это значение  $X$  в третье уравнение, найдем

$$-\frac{PR \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + Pl \sin \alpha = 0.$$

Отсюда, по сокращении на  $P$ , получим

$$\sin^3 \alpha - \frac{R}{l} \cos \alpha = 0.$$

Разделив обе части уравнения на  $\cos^3 \alpha$ , будем иметь

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{R}{l} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0;$$

так как

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

то мы приходим для определения угла  $\alpha$  к кубическому уравнению

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{R}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{R}{l} = 0.$$

Определив отсюда угол  $\alpha$  и внося его значение в выражения для  $N$  и  $X$ , найдем внешнюю и внутреннюю силы реакции. Из симметрии очевидно, что рассмотрение уравнений равновесия левой балки никаких новых результатов не даст.

Для случая тяжелых систем можно еще применить следующий способ разыскания положений равновесия, являющийся частным случаем общего принципа статики, установленного Лагранжем, — принципа возможных перемещений. Если система тяжелая, то очевидно, что она будет в положении устойчивого равновесия, если ее центр тяжести занимает самое низкое положение, так что при всех малых вынужденных отклонениях системы от этого положения он может только повышаться. Если при всех малых отклонениях системы центр тяжести не повышается и не понижается, то рассматриваемое положение есть положение безразличного равновесия. Пример — однородный тяжелый шар на горизонтальной плоскости. Наконец, если центр тяжести занимает самое высокое положение, так что при вынужденном выведении системы из этого положения центр тяжести может только понижаться, то положение равновесия еще возможно, но оно



будет неустойчивым, как показывает пример прямого круглого конуса, поставленного вертикально на острие. Обозначим через  $\zeta$  вертикальную координату центра тяжести системы. Положение безразличного равновесия характеризуется тем, что  $\zeta = \text{Const}$ . Положение устойчивого равновесия характеризуется тем, что в этом положении  $\zeta$  *minimum*, если координата  $\zeta$  отсчитывается вертикально вверх от некоторого уровня; понятно, что при отсчете от некоторого уровня вниз  $\zeta$  должно быть *maximum*. В случае неустойчивого равновесия — значения  $\zeta$  обратны. Предположим, что значение координаты  $\zeta$  зависит от некоторого параметра  $\alpha$ , так что  $\zeta = f(\alpha)$ . Из предыдущего следует, что для разыскания положений устойчивого или неустойчивого равновесия системы надо найти *maximum* или *minimum* (обобщенно говорят *extremum*) функции  $\zeta = f(\alpha)$ . Из дифференциального исчисления известно, что значения  $\alpha$ , дающие *extremum*, удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = f'(\alpha) = 0, \quad \text{или} \quad d\zeta = f'(\alpha) d\alpha = 0.$$

В случае безразличного равновесия  $\zeta = \text{Const}$ , и мы опять имеем  $d\zeta = 0$ . Если координата  $\zeta$  есть функция нескольких параметров, например  $\zeta = f(\alpha, \beta, \gamma)$ , то для нахождения ее *maximum*'а или *minimum*'а должно решить уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

Так как

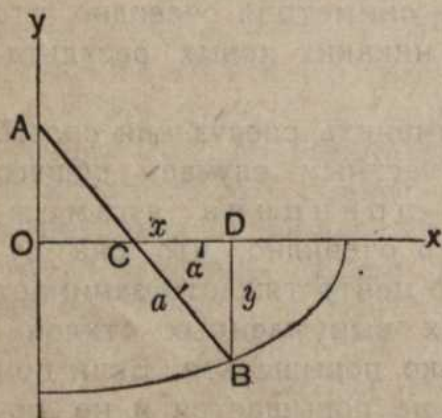
$$d\zeta = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma,$$

то предыдущие условия равносильны опять одному  $d\zeta = 0$ , и обратно. Таким образом, чтобы найти положения равновесия тяжелой системы, надо найти решения, вытекающие из условия

$$d\zeta = 0 \quad \dots \dots \dots (91)$$

**Примеры.** — 1. Тяжелая балка, длина которой равна  $2a$ , опирается одним концом  $A$  в вертикальную стенку, а другим концом  $B$  в некоторую кривую. Найти эту кривую, исходя из условия, что балка остается в равновесии при всех положениях.

Положения равновесия характеризуются условием  $d\zeta = 0$ . Так как в этой задаче равновесие безразличное, то должно быть  $\zeta = \text{Const}$ , т.-е. центр



Черт. 67.

тяжести  $C$  балки должен перемещаться по горизонтальной прямой. Примем эту прямую за ось  $Ox$ , а вертикальную прямую, по которой скользит конец  $A$ , за ось  $Oy$  (черт. 67). Таким образом, мы приходим к следующей задаче. Найти кривую, описываемую концом  $B$  балки, середина которой  $C$  скользит по горизонтальной прямой  $Ox$ , а конец  $A$  по вертикальной прямой  $Oy$ . Обозначая угол балки с осью  $Ox$  через  $\alpha$ , имеем для координат точки  $B$

$$y = -DB = -a \sin \alpha, \\ x = OD = 2OC = 2a \cos \alpha.$$

Отсюда получаем

$$\frac{y}{a} = -\sin \alpha, \quad \frac{x}{2a} = \cos \alpha.$$



Возводя в квадрат и складывая, будем иметь

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

т.-е. конец  $B$  должен опираться на эллипс с полуосями  $2a$  и  $a$ .

2. Та же задача, какая приведена, как пример на равновесие системы (черт. 66). Очевидно, что центр тяжести системы двух балок  $AB$  и  $AB_1$  лежит в точке  $O_1$  — середине отрезка  $CC_1$ . Найдем расстояние  $\zeta = OO_1$ . Мы имеем

$$OO_1 = OA_1 - AO.$$

Но из  $\triangle AO_1C$  получаем  $AO_1 = l \cos \alpha$ , а из  $\triangle AOD$  находим

$$AO = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Следовательно,

$$\zeta = l \cos \alpha - \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Мы видим, что в рассматриваемой задаче

$$f(\alpha) = l \cos \alpha - \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Уравнение равновесия будет  $d\zeta = f'(\alpha) d\alpha = 0$ , т.-е.  $f'(\alpha) = 0$ , и мы имеем

$$f'(\alpha) = -l \sin \alpha + \frac{R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

Отсюда находим

$$l \sin^3 \alpha - R \cos \alpha = 0,$$

и, после указанных выше в этой задаче преобразований, приходим к кубическому уравнению

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{R}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{R}{l} = 0,$$

т.-е. получаем прежний результат.

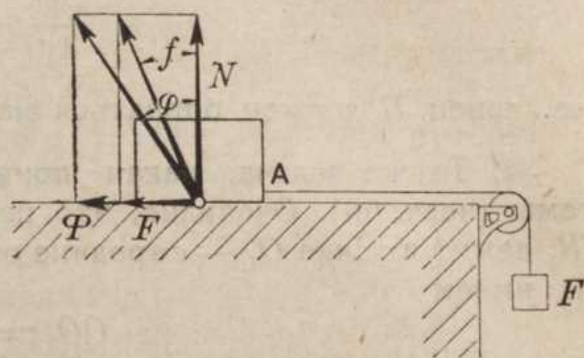
Примечание.—Следует обратить внимание, что при применении этого способа мы совершенно не должны были принимать во внимание сил реакции. В этом заключается преимущество этого способа. Ниже, при изложении принципа возможных перемещений Лагранжа, мы увидим общую причину такого исключения сил реакции.

### Трение.

Чтобы закончить главу, посвященную равновесию, нам остается рассмотреть еще влияние трения или сцепления. Рассмотрим два тела, находящихся в соприкосновении друг с другом, причем второе тело может скользить по первому. Если бы никаких сил сцепления не существовало, то любая сила, приложенная ко второму телу в точке соприкосновения его с первым параллельно касательной плоскости, привела бы второе тело в движение по первому. Однако, опыт показывает, что этого не бывает. Именно, рассмотрим следующий опыт. На горизонтальном столе покоится тяжелое тело, вес которого равен  $N$ . Очевидно, что нормальная сила реакции



стола также будет равна  $N$ . Привяжем в точке  $A$ , взятой ближе к основанию, чтобы уменьшить опрокидывающий момент, нить и перекинем ее через блок. Если мы привесим к нити небольшой груз  $F$ , то может случиться, что тело на столе останется в равновесии и не будет скользить по столу.



Черт. 68.

Это показывает, что между частицами стола и тела возникли некоторые силы, давшие равнодействующую  $F$ , направленную влево и уравновешивающую силу тяги груза (черт. 68). Эта сила  $F$  называется силой сцепления, или силой трения скольжения, или силой трения первого рода.

Мы видим отсюда, что полная сила реакции будет иметь нормальную слагающую  $N$  и тангенциальную слагающую  $F$ . Складывая эти оба компонента по правилу геометрического сложения, мы получим полную силу реакции, образующую с нормалью угол  $f$ . Очевидно, что

$$F = N \cdot \operatorname{tg} f. \quad (92)$$

Будем увеличивать вес  $F$  груза. Сила сцепления также будет увеличиваться, но до некоторого предела. Предположим, что предельным значением веса груза, а, следовательно, и силы сцепления будет  $\Phi$ , т.-е. дальнейшее увеличение веса груза уже приведет тело в скольжение по столу. В этом случае мы получим

$$\Phi = N \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (93)$$

где  $\varphi$  есть предельное отклонение полной силы реакции от нормали. Сила  $\Phi$  называется предельной силой сцепления, а угол  $\varphi$  — углом трения. Практически угол  $\varphi$  невелик; так, для трущихся сухих металлов он равен около  $10^\circ$ . Законы трения скольжения были исследованы Кулоном, который нашел, пользуясь только что описанным прибором, что:

1. Предельная сила сцепления пропорциональна нормальной реакции.

2. Предельная сила сцепления не зависит при данной силе нормальной реакции от размера трущихся поверхностей.

3. Она зависит от природы трущихся поверхностей.

Из первого закона следует, что если вес тела увеличится в  $n$  раз, то и предельная сила сцепления также увеличится в  $n$  раз, так что угол  $\varphi$  останется неизменным. Вторым законом имеет тот смысл, что если, не изменяя ни веса тела, ни природы его трущейся поверхности, мы изменим только ее размеры, то от этого предельная сила сцепления не изменится. Наконец, всякое изменение природы трущихся поверхностей, например, полирование, смазывание, и т. п. изменяет предельную силу сцепления. Мы будем обозначать, вообще,

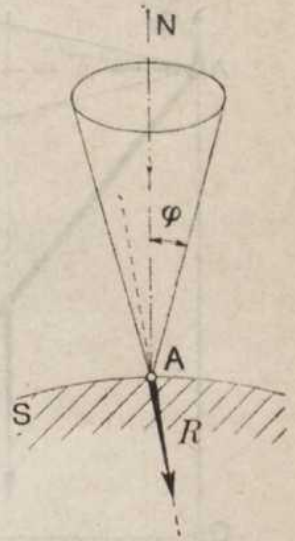
$$F = \mu N, \quad (94)$$

где  $\mu = \operatorname{tg} f$ . В случае, когда сила  $F$  достигает своего предельного значения  $\Phi$ ,  $\mu$  достигает своего предельного значения  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ ; это предельное значение  $\mu$  называется коэффициентом трения первого рода или трения скольжения. Таким образом, всегда

$$\operatorname{tg} \varphi \geq \mu \geq 0 \quad (95)$$



Найдем теперь условия равновесия при наличии сцепления. Предположим, что тело опирается одною точкою  $A$  на поверхность  $S$  другого тела, по которому оно может скользить (черт. 69). Восставим в точке  $A$  нормаль к  $S$  и опишем вокруг этой нормали прямой круглый конус, образующие которого наклонены к оси под углом трения  $\varphi$ . Из предыдущего мы знаем, что полная сила реакции должна обязательно лежать внутри этого конуса или на его поверхности, так как она не может образовать с нормалью угла, большего, чем  $\varphi$ . Поэтому, чтобы равновесие было возможно, силы, действующие на тело, должны привести к одной равнодействующей  $R$ , направление которой проходит через точку  $A$  и не выходит из конуса трения, так как только в этом случае полная сила реакции поверхности  $S$  может уравновесить силы, приложенные к телу. Если тело имеет несколько точек прикосновения, то те же рассуждения применимы ко всем этим точкам. Наконец, в случае соприкосновения по конечным площадкам, система сил, действующих на тело, должна приводиться к нескольким силам, пересекающим поверхность внутри этих площадок и образующим в точках пересечения углы с нормальными в этих точках, меньшие предельных углов трения.



Черт. 69.

Для решения задач на трение скольжения можно применять как геометрический, так и аналитический методы. Покажем это на нескольких примерах.

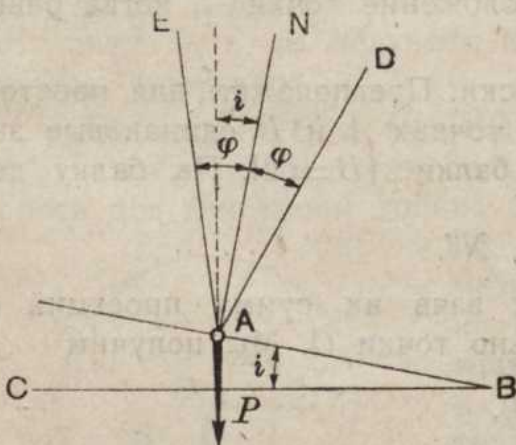
**Примеры.** — 1. Найти равновесие тяжелой точки, лежащей на наклонной плоскости, при наличии сцепления.

Пусть будет дана наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол  $i$ , на которой лежит тяжелая точка  $A$  с весом  $P$ . Проведем нормаль  $AN$  в точке  $A$  и построим конус трения, который, в случае плоской задачи, можно заменить углом  $DAE$  (черт. 70). Если продолженное направление силы  $P$  проходит внутри угла  $DAE = 2\varphi$ , как это имеет место на чертеже, то точка будет в равновесии. Если мы будем увеличивать угол  $i$ , то направление силы  $P$  будет приближаться к стороне  $AE$ . Предельное значение угла  $i$ , при котором равновесие еще возможно, будет такое, когда направление  $P$  пойдет по стороне  $AE$ ; из чертежа видно, что в этом случае будет  $i = \varphi$ . Таким образом, равновесие будет возможно при всех углах  $i$ , удовлетворяющих неравенству

$$i \leq \varphi.$$

2. Балка  $AB$  опирается своими концами  $A$  и  $B$  в вертикальную и горизонтальную стенки с трением. Найти условия равновесия.

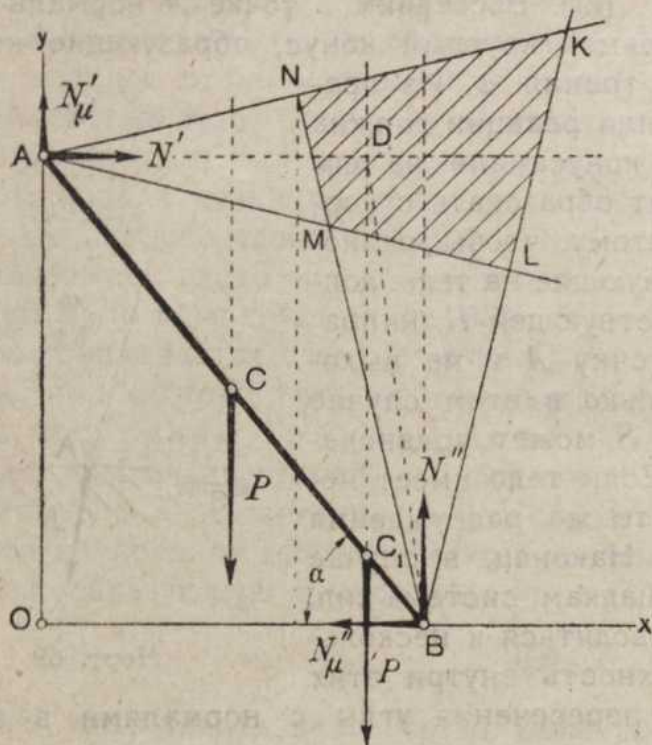
Проведем в точках  $A$  и  $B$  нормали и построим углы трения  $KAL$  и  $NBK$ . Мы получим часть  $MNLK$ , общую обоим углам; она заштрихована



Черт. 70.



на чертеже 71. Предположим, что вес балки  $P$  приложен в точке  $C_1$ . Продолжая направление этой силы  $P$ , мы видим, что оно пересечет заштрихованную часть. Возьмем какую-нибудь точку  $D$  на этом направлении внутри заштрихованной части. Соединим точку  $D$  с точками  $A$  и  $B$  и перенесем силу  $P$  в точку  $D$ . Разлагая силу  $P$  на две силы по направлениям  $DA$  и  $DB$  и перенеся оба полученных компонента в точки  $A$  и  $B$ , мы видим, что эти компоненты могут уравновеситься с реакциями стенок, так как их направления проходят внутри конусов трения. Следовательно, мы имеем в этом случае равновесие. Предположим теперь, что сила  $P$  проходит через точку  $C$ . Продолжая ее направление, мы не попадем в заштрихованную часть. Следовательно, силу  $P$



Черт. 71.

нельзя в этом случае разложить на два компонента, направления которых не выходили бы из углов  $KAL$  и  $NBK$ , и равновесие невозможно. Проведем через точку  $N$  вертикальную прямую. Очевидно, что при всех положениях центра тяжести, лежащих справа от этой прямой, будет иметь место равновесие; если же центр тяжести лежит слева от этой прямой, то равновесие невозможно. Этим объясняется, почему лестница, прислоненная к стене и не соскальзывающая, когда человек стоит на ее нижних ступеньках, начнет соскальзывать, если человек поднимется на ее верхние ступеньки. Очевидно, что с увеличением угла  $\alpha$  прямая  $AB$  будет приближаться к  $NB$ , и предельное положение точки  $C_1$ , когда равновесие возможно, будет повышаться.

Решим теперь ту же задачу аналитически. Предположим, для простоты рассуждений, что коэффициенты  $\mu$  имеют в точках  $A$  и  $B$  одинаковые значения, и центр тяжести лежит на середине балки  $AB = 2l$ . На балку действуют пять сил

$$\mu N', N', P, \mu N'', N''.$$

Составим уравнения равновесия этих сил, взяв их сумму проекций на оси  $Ox$  и  $Oy$  и сумму моментов относительно точки  $O$ . Мы получим

$$N' - \mu N'' = 0,$$

$$\mu N' - P + N'' = 0,$$

$$N' \cdot 2l \sin \alpha + P \cdot l \cos \alpha - N'' \cdot 2l \cos \alpha = 0.$$

Из первого имеем

$$N' = \mu N'';$$

вставляя во второе, найдем

$$N'' = P \frac{1}{1 + \mu^2},$$

и, следовательно,

$$N' = P \frac{\mu}{1 + \mu^2}.$$



Вставим эти значения  $N'$  и  $N''$  в последнее из уравнений равновесия, сократив его предварительно на  $l$ . После простых приведений получим

$$\frac{2\mu}{1+\mu^2} \sin \alpha = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \cos \alpha.$$

Отсюда будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1-\mu^2}{2\mu}.$$

Введем для  $\mu$  его значение  $\mu = \operatorname{tg} f$ . Тогда

$$\frac{1-\mu^2}{2\mu} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 f}{2 \operatorname{tg} f} = \frac{\cos^2 f - \sin^2 f}{2 \sin f \cos f} = \frac{\cos 2f}{\sin 2f} = \operatorname{ctg} 2f.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 2f = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 2f \right),$$

т.-е.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2f.$$

Так как угол  $f$  может изменяться от 0 до  $\varphi$ , то для значений  $\alpha$ , при которых равновесие возможно, получим неравенства

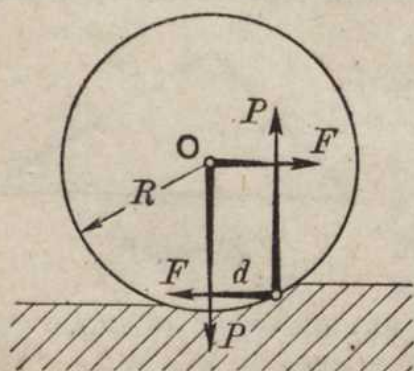
$$\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \frac{\pi}{2} - 2\varphi.$$

Предоставляем убедиться геометрически в верности полученного результата, исходя из следующих указаний. Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то  $AB$  стоит вертикально

вдоль  $Oy$ , и равновесие возможно. Если  $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$ , то  $\angle ABN = \varphi$ , и

точка  $N$  есть середина основания равнобедренного треугольника, боковыми сторонами которого служат  $BA$  и вертикаль в точке  $B$ . Поэтому прямая, проходящая через точку  $C$  и параллельная вертикали в точке  $B$ , пройдет через точку  $N$ , и мы получаем предельное положение, при котором равновесие еще возможно.

Рассмотрим еще вкратце трение второго рода, или трение качения. Предположим сначала, что на горизонтальном рельсе находится колесо под действием только своей силы тяжести  $P$ . Рельс прогибается



Черт. 72.

под колесом симметрично, и из соображений симметрии очевидно, что все силы давлений рельса на колесо можно заменить одной равнодействующей, которая должна уравновесить вес колеса  $P$  и, следовательно, быть равна весу  $P$  и ему противоположна. Предположим теперь, что на колесо действует сила  $F$ , проходящая через его центр  $O$  (черт. 72). Колесо будет стремиться покатиться направо, давление на рельс сделается несимметричным, рельс прогнется несимметрично, и полная сила реакции не будет равна и прямо противоположна весу  $P$ ; она составит из двух компонентов  $P$  и  $F$ , причем, чтобы равновесие было

возможно, моменты пар  $(P, -P)$  и  $(F, -F)$  должны быть по абсолютной величине между собою равны, т.-е. должно быть

$$Pd = FR,$$







## ГРАФОСТАТИКА.

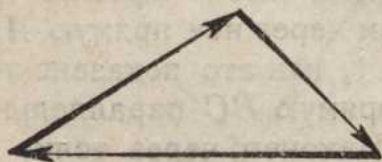
### ГЛАВА VIII.

#### ОБЩИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

При решении многих задач статики с большой пользой могут быть применены графические приемы. Конечно, при графическом методе точность результата ограничена и определяется точностью построений и измерений на чертеже, тогда как при алгебраическом методе точность самых выкладок может быть сделана сколь угодно большой, и практически точность результата будет зависеть лишь от точности данных, но не от точности операций; однако, во многих приложениях статики, точность, достаемая применением графических приемов, является вполне достаточной. Так как вместе с тем графические приемы весьма наглядны, позволяют в одной картине обнять всю задачу и часто ведут быстрее к цели, чем алгебраические вычисления, то применение их весьма распространено. Эти графические приемы в середине XIX столетия были собраны и пополнены цюрихским профессором Кульманом, положившим тем самым начало особой науке, графической статике или графостатике. Дальнейшим развитием Графостатики мы обязаны Максвеллу, Кремона, Мору, М.-Бреслау\*).

Построения графической статики преимущественно развиты для плоских систем; мы будем исключительно заниматься ими.

Если мы имеем плоскую систему сил, то при приведении ее могут встретиться только три случая: или система приводится к одной равнодействующей, или к одной паре, или уравнивается; очевидно, что динамического винта здесь существовать не может. В этом можно убедиться из рассмотрения второго инварианта (формула 76)  $LX + MY + NZ$ , который для случаев плоской системы сил всегда равен нулю. Как и прежде, мы будем представлять силы векторами, вычерчиваемыми в каком-нибудь определенном масштабе, причем будем отмечать эти векторы цифрами.



Черт. 73.

Вспомним следующие предложения статики. Если многоугольник сил, построенный для данной системы сил, — замкнутый, то или система приводится к паре, или имеет место равновесие. В обоих этих случаях направление стрелок, представляющих силы, устанавливает непрерывное направление обхода периметра многоугольника. В случае трех сил мы получаем та-

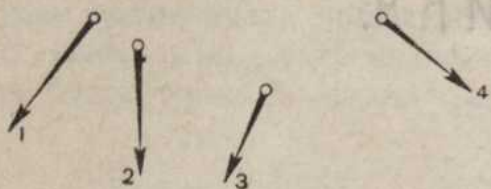
ким образом треугольник сил (черт. 73). Если изменить направление обхода одной из сторон, то она представит равнодействующую сил, представляемых другими сторонами.

Рассмотрим плоскую систему сил, например четырех сил 1, 2, 3, 4 (черт. 74). Построим многоугольник сил. Если многоугольник сил будет

\*) Из русских курсов можно указать на превосходный курс профессора В. Л. Кирпичева: Основания Графической Статики.



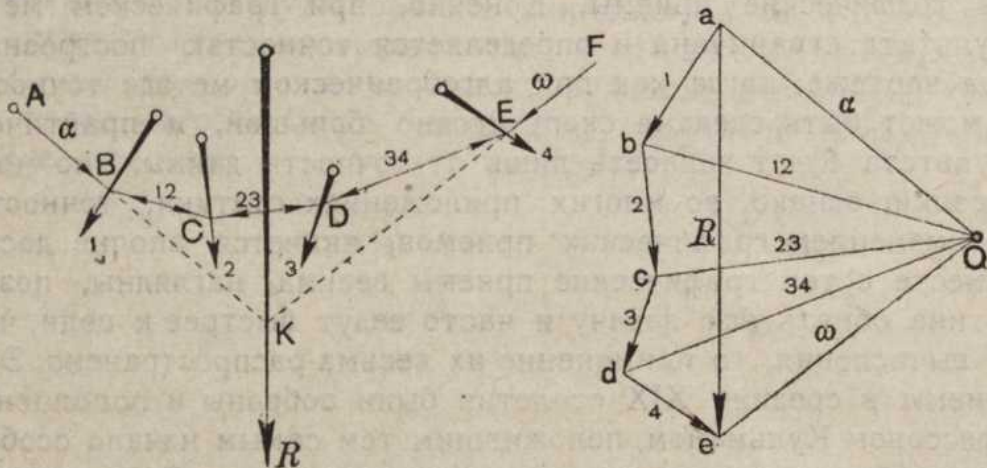
замкнутым, то будет иметь место или равновесие, или система приведет к паре. Таким образом, замкнутость многоугольника сил есть необходимое, но еще недостаточное условие равновесия. Если же многоуголь-



Черт. 74.

ник сил разомкнутый, то система сил приводится только к равнодействующей. Для системы сил, представленной на чертеже 74 и повторенной на левой части чертежа 75, имеет место последнее, и замыкающая  $ae$  ломаной линии (черт. 75) дает величину и направление равнодействующей; конечно, стороны 1, 2, 3, 4 этой ломаной линии дол-

жны быть проведены параллельно силам 1, 2, 3, 4, чтобы направление  $ae$  представило направление равнодействующей  $R$ . Чтобы вполне знать равнодействующую  $R$ , необходимо найти какую-нибудь одну из точек, через кото-

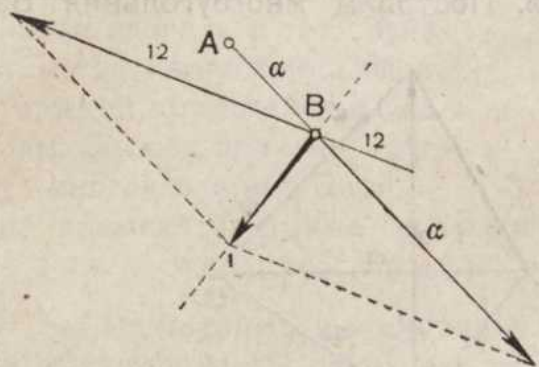


Черт. 75.

рую проходит прямая действия этой силы  $R$ . Для решения этой последней задачи возьмем произвольную точку плоскости  $O$ , которую назовем полюсом. Соединим полюс  $O$  с вершинами ломаной линии (1, 2, 3, 4). Будем называть эти прямые лучами, причем первый и последний луч обозначим первою и последнею буквами  $\alpha$  и  $\omega$  греческого алфавита, а промежуточные лучи двумя цифрами тех сторон ломаной линии, в точку пересечения которых проведен данный луч. Таким образом будем иметь луч 12, проведенный в точку пересечения сторон 1 и 2; луч 23, проведенный в точку пересечения сторон 2 и 3, и т. д. Как и прежде, будем называть этот многоугольник (1, 2, 3, 4) многоугольником сил. Посмотрим теперь второй многоугольник, представленный на левой части чертежа 75. Возьмем произвольную точку  $A$  плоскости и проведем через нее прямую  $AB$  параллельно лучу  $\alpha$  до встречи в точке  $B$  с силою 1, как это показано на левой части чертежа 75. Через точку  $B$  проведем прямую  $BC$  параллельно лучу 12 до встречи в точке  $C$  с силою 2, и т. д. Наконец, через точку  $E$  проведем прямую  $EF$  параллельно лучу  $\omega$ . Таким образом мы получим многоугольную линию  $ABCDEF$ , стороны которой будем отмечать теми же обозначениями, как параллельные им лучи. Эту многоугольную линию ( $\alpha$ , 12, 23, 34,  $\omega$ ) мы назовем многоугольником Вариньона, веревочным или шарнирным многоугольником. Обратим внимание на следующую связь между обоими фигурами, представленными на чертеже 75. Стороны обеих фигур соответственно параллельны; каждому треугольнику одной фигуры соответствуют три пересекающиеся прямые другой фигуры, и обратно. В самом деле, рассмотрим, например, треугольник, образованный прямыми 1,  $\alpha$ , 12 на многоугольнике сил. На многоугольнике Вариньона соответствующие прямые пересекаются в точке  $B$ . Треугольнику, образован-

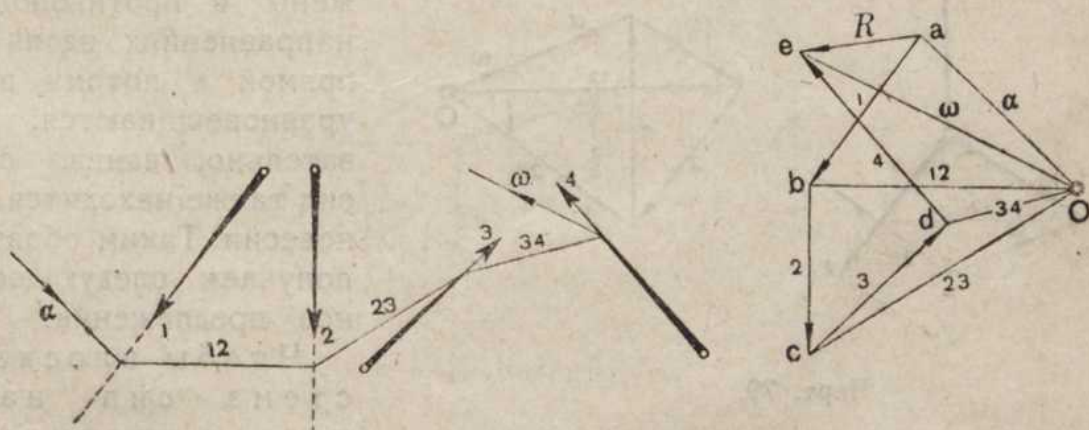


ному в многоугольнике Вариньона прямую 12 и продолжением прямых 1 и 2, на многоугольнике сил соответствуют прямые 1, 2, 12, пересекающиеся в одной точке. Такое соответствие двух фигур называется взаимным, а самые фигуры — взаимными. Пользуясь построениями лучей на многоугольнике сил, силу 1 можно разложить на две силы  $\alpha$  и 12, равные и параллельные этим лучам. Сила  $\alpha$  направлена к точке  $O$ , сила 12 — от точки  $O$ . Перенеся силы 1,  $\alpha$  и 12 в точку  $B$ , мы видим, что в сущности мы произвели таким образом разложение силы 1 на две силы, параллельные лучам  $\alpha$  и 12, по правилу параллелограмма (черт. 76), причем вычерчивать этот параллелограмм нет никакой необходимости, так как искомые силы  $\alpha$  и 12 уже непосредственно даны на чертеже при многоугольнике сил. Точно так же, силу 2 можно разложить на две силы 12 и 23, причем первая направлена к точке  $O$ , а вторая от точки  $O$ . Перенеся эти силы на многоугольник Вариньона, мы видим, что вдоль его стороны 12 расположены две силы, равные лучу 12, но направленные в противоположные стороны. Продолжая это построение, мы найдем, что данную систему сил 1, 2, 3 можно заме-



Черт. 76.

нить силами, идущими вдоль сторон многоугольника Вариньона. Вдоль каждой из промежуточных сторон 12, 23, 34 направлены по две силы, прямо противоположные и равные соответственно лучам 12, 23, 34; следовательно, эти силы взаимно уравниваются. Остаются неуравновешенными две силы, направленные вдоль сторон  $\alpha$  и  $\omega$  — и равные соответственно лучам  $\alpha$  и  $\omega$ . Сила  $\alpha$  имеет направление  $aO$ , а сила  $\omega$  — направление  $Oe$ . Таким образом, данная система сил 1, 2, 3, 4 приведена нами только к двум пересекающимся силам  $\alpha$  и  $\omega$ . Продолжая их направление, мы получим точку  $K$ , через которую должна пройти их равнодействующая  $R$ ; величина же и направление равнодействующей  $R = ae$  известны из многоугольника сил. Проведя через точку  $K$  прямую, параллельную  $ae$ , и отложив на ней силу  $R$ , мы получим полное решение рассматриваемой задачи.



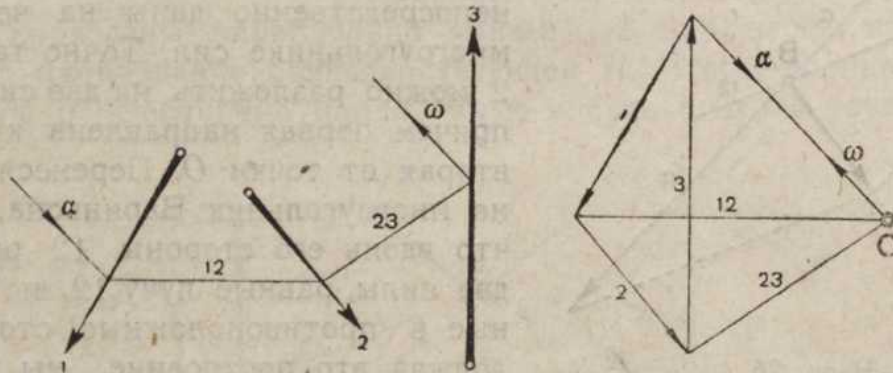
Черт. 77.

Очевидно, что этот прием применим для любого числа сил, как бы силы ни были расположены, и в каком бы порядке мы их ни брали. Следует только помнить, что сила есть вектор скользящий, и потому стороны многоугольника Вариньона могут быть ограничены как самими силами, так и их прямыми действиями. На чертеже 77 дано построение для другого расположения четырех сил 1, 2, 3, 4. И здесь эти четыре силы могут быть заменены двумя силами  $\alpha$  и  $\omega$ , идущими в направлениях, указанных стрел-



ками; силы же  $\alpha$  и  $\omega$  можно заменить одною равнодействующею  $R$ , проходящею через точку пересечения сторон  $\alpha$  и  $\omega$  многоугольника Вариньона.

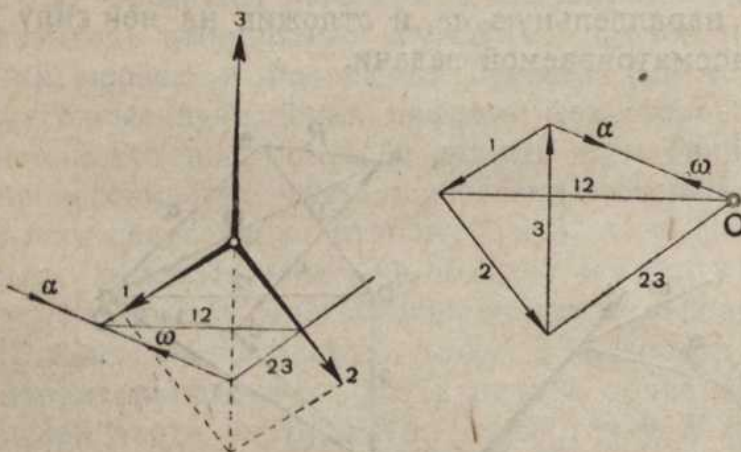
Предположим теперь, что многоугольник сил будет замкнутый. В этом случае равнодействующая равна нулю, и система сил или приводится к паре, или уравнивается. Рассмотрим случай трех сил 1, 2, 3 (черт. 78). Построив многоугольник сил, мы видим, что он замкнутый. Возьмем полюс  $O$  и проведем лучи  $\alpha$ , 12, 23,  $\omega$ . Так как начальная и конечная точки многоугольника сил совпадают, то лучи  $\alpha$  и  $\omega$  сливаются между собою. Следовательно, систему трех сил 1, 2, 3 можно привести к двум равным и противоположно направленным силам  $\alpha$  и  $\omega$ . Построим многоугольник Ва-



Черт. 78.

риньона. Его стороны  $\alpha$  и  $\omega$  будут параллельны друг другу, так как они должны быть параллельны слившимся лучам  $\alpha$  и  $\omega$ ; сверх того мы видим, что эти стороны не располагаются вдоль одной прямой. Следовательно, данная система сил приводится к паре ( $\alpha$ ,  $\omega$ ) и мы легко найдем момент этой пары, измерив на многоугольнике сил вектор  $\alpha = \omega$ , а на многоугольнике Вариньона — расстояние между сторонами  $\alpha$  и  $\omega$ , представляющее плечо пары.

Предположим, наконец, что не только многоугольник сил, но и многоугольник Вариньона будет замкнутый, как это показано на чертеже 79. В этом слу-



Черт. 79.

чае равные силы  $\alpha$  и  $\omega$ , к которым приводится данная система сил, будут расположены в противоположных направлениях вдоль одной прямой и потому взаимно уравниваются. Следовательно, данная система сил также находится в равновесии. Таким образом, мы получаем следующее важное предложение:

Чтобы плоская система сил находилась в равновесии,

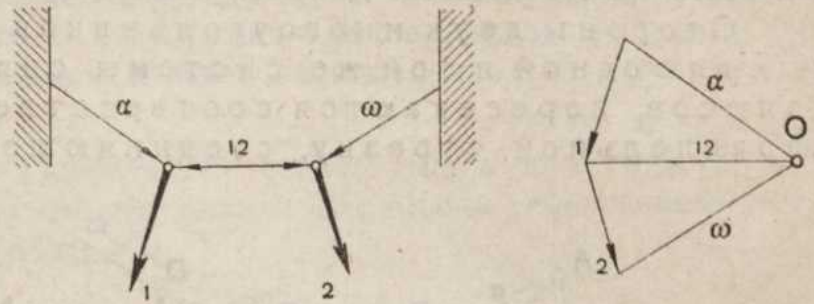
необходимо и достаточно, чтобы многоугольник сил и многоугольник Вариньона оба были замкнутыми.

Рассмотрим две силы 1 и 2 (черт. 80). Построим для них многоугольник сил и многоугольник Вариньона. Если мы вообразим, что стороны многоугольника Вариньона осуществлены материально при помощи стержней, скрепленных друг с другом шарнирами, то такой шарнирный многоугольник под действием данных сил 1 и 2, приложенных в его узлах, будет в равновесии. В самом деле, силы 1 и 2 могут быть заменены напряжениями  $\alpha$ , 12,  $\omega$ ,



действующими вдоль стержней. Пренебрегая малыми изменениями длин стержней под действием этих напряжений, мы видим, что эти напряжения уничтожаются противодействиями стержней и двух точек закрепления. Для случая, представленного на чертеже 80, все напряжения сводятся к растяжениям, как в этом нетрудно

убедиться, рассматривая направление сил  $\alpha$ , 12,  $\omega$ . Поэтому стержни могут быть заменены цепями или веревками. Этого, конечно, нельзя сделать в тех случаях, когда напряжения вдоль стержней приводятся к сжатиям. Отсюда понятно, почему многоугольник Вариньона называется также шарнирным многоугольником, или веревочным многоугольником.



Черт. 80.

Рассмотрим еще случай шарнирного многоугольника, представленный на чертеже 81. В узлах его приложены равные и параллельные силы  $p$ . Из многоугольника сил находим

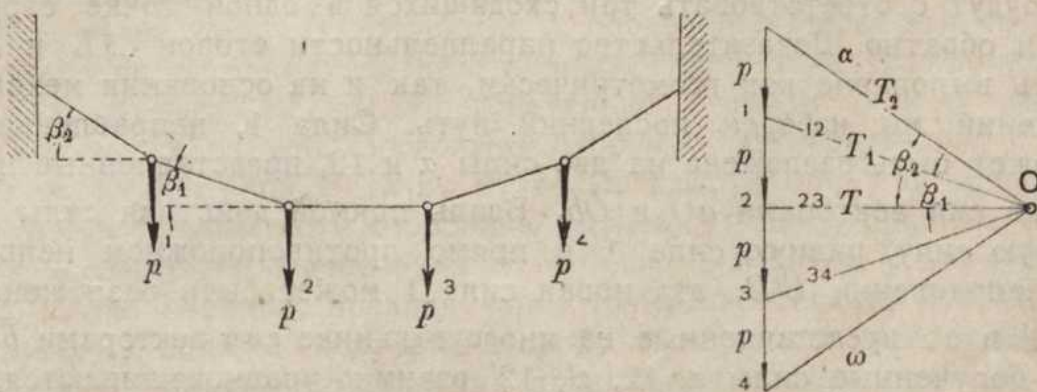
$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{2p}{h'}; \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{p}{h},$$

где  $h$  есть полюсное расстояние. Или

$$\operatorname{tg} \beta_2 = 2 \operatorname{tg} \beta_1; \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{2}.$$

Вообще, будем иметь для любого числа стержней

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{3} = \dots = \frac{\operatorname{tg} \beta_n}{n}.$$



Черт. 81.

Что касается напряжений вдоль стержней, которые для симметрии обозначений мы представим через  $T, T_1, T_2, \dots$ , то из соответствующих треугольников многоугольника сил будем иметь

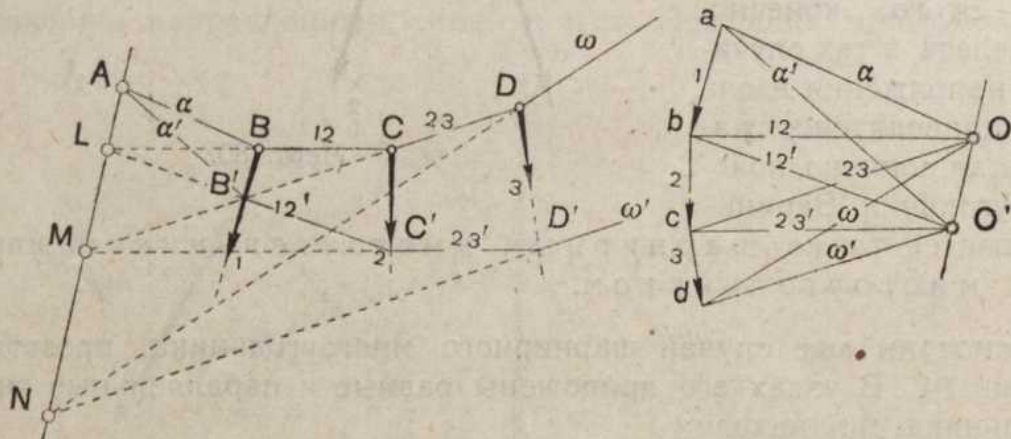
$$T = \frac{T_1}{\cos \beta_1} = \frac{T_2}{\cos \beta_2} = \dots = \frac{T_n}{\cos \beta_n}.$$

Мы видим, что здесь напряжения также сводятся к растяжениям и возрастают при переходе от среднего стержня к крайним.



Пусть будет дана какая-нибудь плоская система сил, например, трех сил 1, 2, 3 (черт. 82). Построим многоугольник сил и многоугольник Вариньона для некоторого произвольно взятого полюса  $O$ . Возьмем затем полюс в какой-нибудь другой точке  $O'$  и построим многоугольник Вариньона для этого нового полюса. Докажем следующую теорему:

Стороны двух многоугольников Вариньона, построенных для одной и той же системы сил для двух различных полюсов, пересекаются соответственно на одной прямой, параллельной отрезку, соединяющему полюсы.



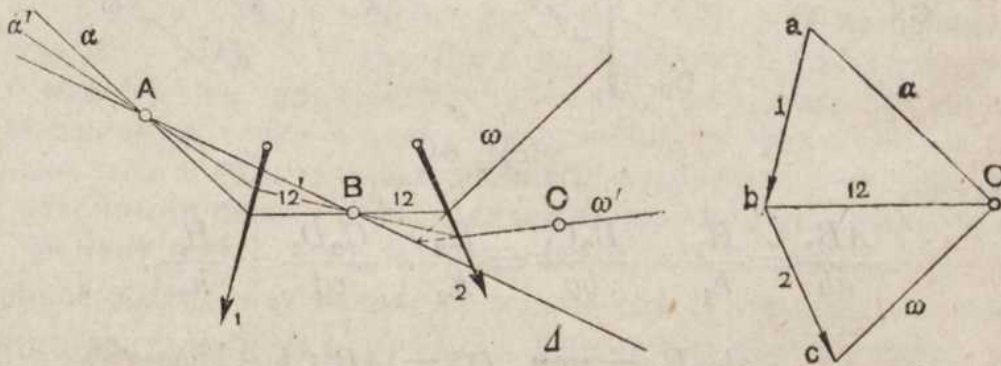
Черт. 82.

Рассмотрим два многоугольника Вариньона  $(\alpha, 12, 23, \omega)$  и  $(\alpha', 12', 23', \omega')$ . Продолжим стороны  $\alpha$  и  $\alpha'$  до их пересечения в точке  $A$ , стороны  $12$  и  $12'$  до их пересечения в точке  $L$ , и соединим точки  $A$  и  $L$ . Мы получим четырехугольник  $ABB'L$  с двумя диагоналями. На многоугольнике сил ему будет соответствовать четырехугольник  $aOO'b$ . Будем называть стороны и диагонали, вообще, сторонами. Мы видим, что пять сторон первого четырехугольника соответственно параллельны пяти сторонам второго; остается доказать, что шестые стороны, именно  $AL$  и  $OO'$ , будут параллельны между собою. Заметим, что четырехугольники  $ABB'L$  и  $aOO'b$  не будут подобными; в самом деле, они будут взимными, так как треугольнику на одной фигуре будут соответствовать три сходящихся в одной точке стороны на другой, и обратно. Доказательство параллельности сторон  $AL$  и  $OO'$  может быть выполнено как геометрически, так и на основании механических соображений; мы изберем последний путь. Сила 1, направленная вдоль  $BB'$ , может быть разложена на две силы  $\alpha$  и  $12$ , представленные на многоугольнике сил векторами  $\overline{aO}$  и  $\overline{Ob}$ . Вдоль прямой действия силы 1 направим новую силу, равную силе 1 в прямо противоположном направлении, т.-е. в направлении  $B'B$ ; эта новая сила 1 может быть разложена на две силы  $12'$  и  $\alpha'$ , представленные на многоугольнике сил векторами  $\overline{bO'}$  и  $\overline{O'a}$ . Четыре полученные силы  $\alpha, 12, \alpha', 12'$  взаимно уравниваются, так как они равносильны двум равным силам 1, действующим в прямо противоположных направлениях  $BB'$  и  $B'B$ . Эти четыре силы можно группировать попарно еще иначе. Именно, рассмотрим силы  $\alpha', \alpha$  и силы  $12', 12$ . Из многоугольника сил мы заключаем, что силы  $\alpha'$  и  $\alpha$  имеют равнодействующую, равную и параллельную вектору  $\overline{O'O}$ , а силы  $12'$  и  $12$  имеют равнодействующую, равную и параллельную вектору  $\overline{OO'}$ . Из многоугольника Вариньона видим, что равнодействующая сил  $\alpha'$  и  $\alpha$  должна пройти через точку  $A$  их схода, а равнодействующая сил  $12'$  и  $12$  должна пройти через точку  $L$  их схода. Так как эти равнодействующие соответственно равны и параллельны векторам  $\overline{O'O}$  и  $\overline{OO'}$ , то отсюда заключаем, что через точки  $A$  и  $L$  проходят две равные, параллельные и противоположно направленные



силы, эти силы могут образовать или пару, или взаимно уравновеситься; в последнем случае они должны быть расположены вдоль прямой  $AL$ , и, следовательно, прямая  $AL$  должна быть параллельна  $OO'$ . Но здесь как раз и имеет место последний случай, так как рассматриваемая нами система сил находится в равновесии. Направляя вдоль  $CC'$  и  $C'C$  силы, равные силе 2, мы таким же образом убедимся, что прямая  $LM$  параллельна прямой  $OO'$ , и т. д. Следовательно, вся прямая  $\Delta$  будет параллельна  $OO'$ , и теорема доказана.

Применим эту теорию к следующей задаче. Даны две силы 1 и 2; требуется построить для них многоугольник Вариньона, проходящий через три данные точки  $A, B, C$  (черт. 83).



Черт. 83.

Проведем произвольно через точку  $A$  сторону  $\alpha$  многоугольника Вариньона до встречи ее с силою 2; проведем далее через эту точку встречи и через точку  $B$  сторону 12. Эти две стороны определяют направление лучей  $\alpha$  и 12 на многоугольнике сил и тем самым полюс  $O$ . Соединяя точку  $c$  с точкою  $O$ , получим луч  $\omega$ ; проведя сторону  $\omega$ , мы, вообще, найдем, что она не пройдет через третью данную точку  $C$ . Следовательно, многоугольник Вариньона ( $\alpha, 12, \omega$ ) не представляет решения задачи, и надо искать другой многоугольник ( $\alpha', 12', \omega'$ ), дающий решение задачи, изменив положение полюса. Так как сторона  $\alpha'$  должна пройти через точку  $A$ , а сторона  $12'$  — через точку  $B$ , то прямая  $\Delta$ , проходящая через эти точки  $A$  и  $B$ , есть прямая пересечения соответственных сторон многоугольников Вариньона ( $\alpha, 12, \omega$ ) и ( $\alpha', 12', \omega'$ ). Следовательно, стороны  $\omega$  и  $\omega'$  должны пересекаться также на ней. Продолжим сторону  $\omega$  до пересечения с прямой  $\Delta$ ; проведя через полученную точку и третью данную точку  $C$  прямую, заключаем, что эта прямая есть сторона  $\omega'$  искомого многоугольника Вариньона. Проведя через точку пересечения  $\omega'$  с силою 2 и точку  $B$  прямую, получим сторону  $12'$ , и, наконец, проведя через точку пересечения  $12'$  с силою 1 и через точку  $A$  прямую, получим сторону  $\alpha'$  искомого многоугольника Вариньона, представляющего решение предложенной задачи.

Перейдем теперь к графическому изображению статических моментов сил. Пусть будут, например, даны три силы 1, 2, 3. — Требуется найти их моменты относительно какой-нибудь точки  $K$  (черт. 84). Проведем через точку  $K$  прямые, параллельные силам. Расстояния  $H_1, H_2, H_3$  этих прямых от сил 1, 2, 3 представляют плечи, и, умножая эти плечи соответственно на силы 1, 2, 3, получим моменты этих сил. Построим многоугольник сил и многоугольник Вариньона для некоторого полюса  $O$ . Продолжим стороны многоугольника Вариньона, пересекающиеся на любой силе, до пересечения с прямой, проходящей через точку  $K$  параллельно этой силе. Мы получим треугольники  $ABB_1, B_2CC_1, C_3DD_1$ , с высотами  $H_1, H_2, H_3$ . На многоугольнике сил им будут соответствовать подобные по параллельности







от этой прямой на расстояние  $h$ . Построим далее многоугольник Вариньона. Найдем момент каждой силы относительно точки  $K_1$ . Мы будем иметь согласно предыдущему

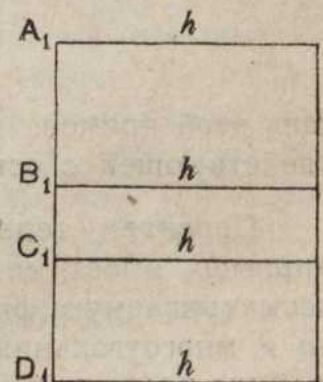
$$\text{мом}_{K_1} (1) = A_1 B_1 \cdot h;$$

$$\text{мом}_{K_1} (2) = B_1 C_1 \cdot h;$$

$$\text{мом}_{K_1} (3) = C_1 D_1 \cdot h.$$

Так как у всех моментов плечо  $h$  общее, то они будут пропорциональны отрезкам  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$ ,  $C_1 D_1$ , которые и можно принять за графическое изображение моментов. Относительно точки  $K_1$  моменты всех сил положительны, и мы видим, что непосредственно на чертеже мы получаем общий момент системы сил. Так, общий момент системы сил 1 и 2 изобразится отрезком  $A_1 C_1 = A_1 B_1 + B_1 C_1$ ; общий момент системы сил 1, 2, 3 изобразится отрезком  $A_1 D_1 = A_1 B_1 + B_1 C_1 + C_1 D_1$ . Если за начальную точку отрезка, изображающего момент, мы примем точку пересечения прямой с предыдущим лучом, а за конечную точку — точку пересечения с последующим лучом, то мы заключаем, что положительные моменты изобразятся на чертеже векторами, направленными сверху вниз. Найдем теперь моменты сил относительно точки  $K_2$ . Момент силы 1 будет отрицательным и изобразится вектором  $A_2 B_2$ , направленным снизу вверх; моменты сил 2 и 3 будут положительны и изобразятся векторами  $B_2 C_2$  и  $C_2 D_2$ . Общий момент системы всех трех сил изобразится вектором  $A_2 D_2$ , направленным вниз, и, следовательно, будет положительным. Найдем далее момент сил относительно точки  $K_3$ . Моменты сил 1 и 2 будут отрицательны и изобразятся векторами  $A_3 B_3$ ,  $B_3 C_3$ ; момент силы 3 будет положителен и изобразится вектором  $C_3 D_3$ ; общий момент системы изобразится вектором  $A_3 D_3$  и будет отрицателен. Наконец, для точки  $K_4$  все моменты будут отрицательны, и общий момент изобразится вектором  $A_4 D_4$ . Мы видим, что при перемещении точки  $K$  слева направо момент сначала положителен, но уменьшается, затем делается отрицательным и возрастает по абсолютному значению. По закону непрерывности должно быть такое положение точки  $K$ , для которого момент равен нулю. Нетрудно сообразить, что в этом случае точка  $K$  лежит на направлении равнодействующей. В самом деле, из теоремы Вариньона мы знаем, что общий момент системы параллельных сил равен моменту равнодействующей; последний же очевидно будет равен нулю, если направление равнодействующей проходит через точку, для которой определяется момент.

Необходимо однако помнить, что при вычислении момента надо вектор, представляющий момент, умножить на плечо  $h$ . Геометрически это равносильно вычислению площади прямоугольника, у которого одна сторона равна  $h$ , а другая вектору, представляющему момент. Очевидно, что только вследствие одинаковости сторон  $h$ , сложение и вычитание моментов приводится к алгебраическому сложению векторов, изображающих моменты, как это видно из чертежа 86, представляющего в виде площадей моменты сил 1, 2 и 3 для точки  $K_1$ . Для случая же, изображенного на чертеже 84, все плечи  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  различны, и прямоугольники, представляющие моменты, имеют все стороны разные. Очевидно также, что измеряя вектор, представляющий момент, масштабом сил, мы должны плечо  $h$  измерять масштабом длин; можно сделать и обратное условие.



Черт. 86.



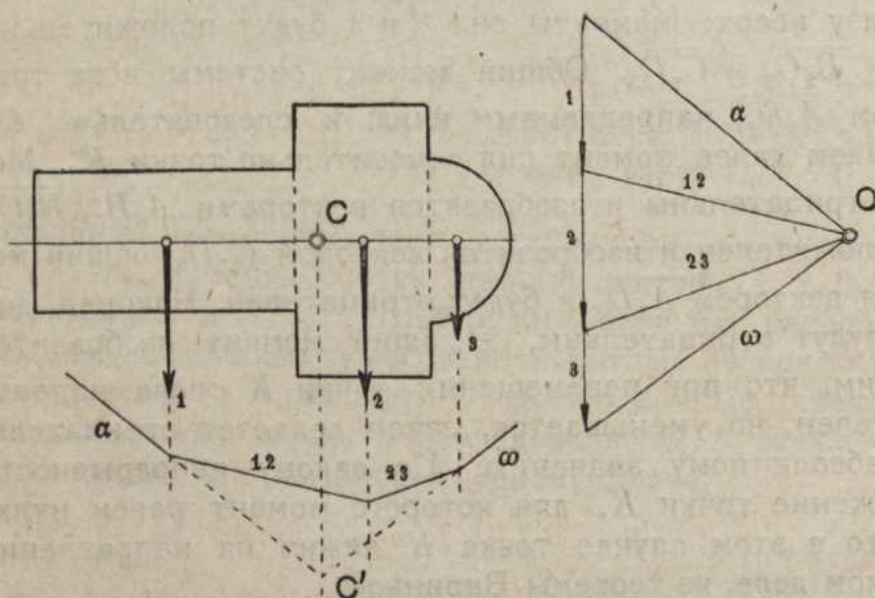
## ГЛАВА IX.

### НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

• Займемся теперь практическим применением вышеуказанных построений к некоторым задачам. Рассмотрим прежде всего задачу графического определения центра тяжести плоских фигур.

#### Центр тяжести.

Мы будем различать два случая, когда плоская фигура имеет ось симметрии, и когда этой оси симметрии нет. Предположим сначала, что фигура имеет ось симметрии. Мы знаем, что центр тяжести должен лежать на этой оси. Допустим, что мы можем разбить фигуру на отдельные части, центры тяжести которых и веса нам известны, как это, например, имеет место для случая, представленного на чертеже 87. Если плоская фигура — однородная, то веса пропорциональны площадям, и достаточно произвести из-



Черт. 87.

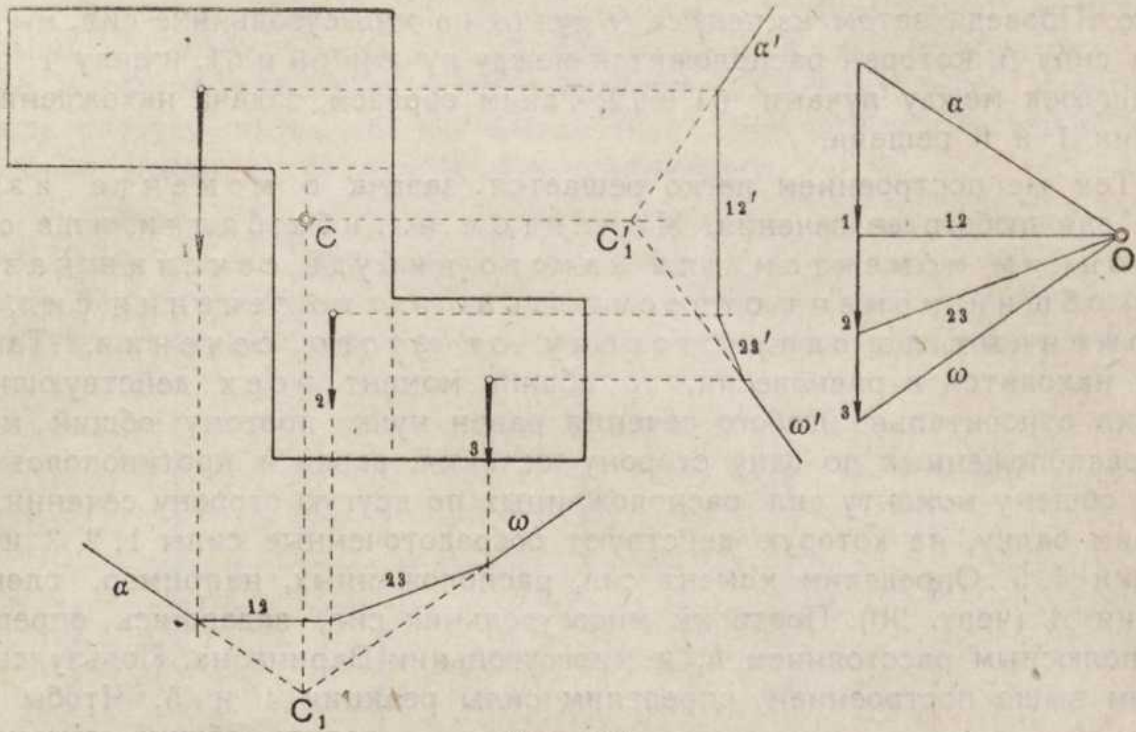
мерение площадей отдельных частей, например, планиметром, чтобы построить векторы, пропорциональные весам. Построим для полученной системы сил многоугольник сил и многоугольник Вариньона. Крайние стороны  $\alpha$  и  $\omega$  многоугольника Вариньона пересекаются в точке  $C'$ . Проведя прямую  $C'C$ , параллельную силам, заключаем, что равнодействующая должна быть направлена

вдоль этой прямой. Следовательно, точка  $C$  пересечения направления равнодействующей с осью симметрии и есть центр тяжести.

Перейдем теперь к тем случаям, когда оси симметрии нет, как это, например, имеет место для случая, представленного на чертеже 88. Разбив рассматриваемую фигуру на три прямоугольника, построим многоугольник сил и многоугольник Вариньона для системы трех полученных сил 1, 2, 3. Крайние стороны  $\alpha$  и  $\omega$  многоугольника Вариньона пересекаются в точке  $C_1$ . Проведя через эту точку прямую  $C_1C$ , параллельную силам, заключаем, что равнодействующая должна быть направлена вдоль этой прямой  $C_1C$ , и центр тяжести должен лежать на этой прямой. Мы знаем (глава III), что центр параллельных сил не изменится, если все силы повернуть на один и тот же угол. Повернем силы 1, 2, 3, например, на прямой угол и построим для этого нового расположения сил многоугольник Вариньона ( $\alpha', 12', 23', \omega'$ ). Очевидно, что стороны нового многоугольника Вариньона будут соответственно перпендикулярны сторонам первого многоугольника Вариньона ( $\alpha, 12, 23, \omega$ ); поэтому построение многоугольника ( $\alpha', 12', 23', \omega'$ ) элементарно и сводится к проведению через данные точки прямых, перпендикулярных сторонам  $\alpha, 12, 23, \omega$ . Проведя через точку пересечения  $C'_1$  крайних сторон  $\alpha'$  и  $\omega'$



нового многоугольника Вариньона прямую  $C'_1C$ , перпендикулярную к прямой  $C_1C$ , мы заключаем, что центр тяжести должен лежать и на этой пря-

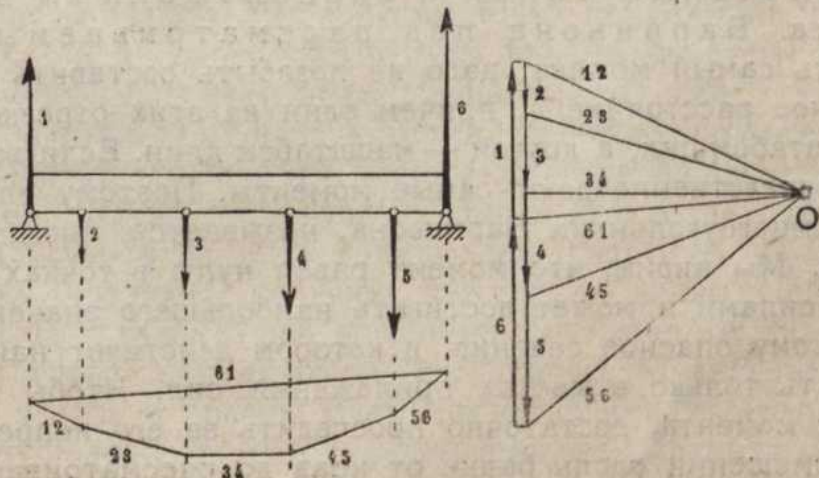


Черт. 88.

мой  $C'_1C$ ; следовательно, центр тяжести лежит в точке пересечения  $C$  обеих прямых  $C_1C$  и  $C'_1C$ .

### Балка на двух опорах.

Предположим, что мы имеем балку, покоящуюся на двух опорах, причем на балку действуют сосредоточенные силы 2, 3, 4, 5; мы пренебрежем пока весом балки (черт. 89). Покажем прежде всего, как можно определить реакции 1 и 6 опор балки. Аналитическое определение этих реакций не представляет никаких затруднений. Так как балка находится в равновесии под действием всех шести сил, то сумма моментов этих сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Взяв сумму моментов относительно каждой из точек опоры, мы получим два уравнения, в каждое из которых войдет по одной неизвестной силе реакции; из этих уравнений легко определить искомые силы реакции. Но едва ли не с большею легкостью эта задача решается графически. Так как все шесть сил находятся в равновесии, то для них многоугольник сил и многоугольник Вариньона оба должны быть замкнутыми. Строим сначала многоугольник сил 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Силы 2, 3, 4, 5 расположатся по одной прямой в одном направлении; силы 6 и 1 расположатся вдоль той же прямой в противоположном направлении. Таким образом, многоугольник сил в этом случае приводится к отрезку, по которому укладываются силы 2, 3, 4, 5 в одном направлении, и силы 6 и 1 — в противоположном. Построим лучи 12, 23, 34, 45, 56 и, пользуясь ими,

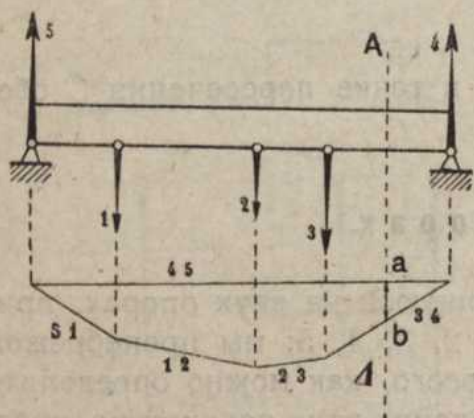


Черт. 89.

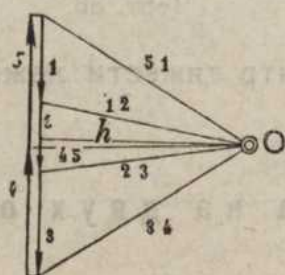


многоугольник Вариньона, который для удобства чертежа мы расположили ниже под балкой. Так как многоугольник Вариньона должен быть замкнутым, то направление луча 61 на многоугольнике Вариньона тем самым определено. Проведя затем из полюса  $O$  луч 61 на многоугольнике сил, мы определим силу 6, которая расположится между лучами 56 и 61, и силу 1, располагающуюся между лучами 61 и 12. Таким образом, задача нахождения сил реакции 1 и 6 решена.

Тем же построением легко решается задача о моменте изгиба балки для любого ее сечения. Моментом изгиба балки, или односторонним моментом, для какого-нибудь сечения называется общий момент относительно этого сечения сил, расположенных по одну сторону от этого сечения. Так как балка находится в равновесии, то общий момент всех действующих на нее сил относительно любого сечения равен нулю; поэтому общий момент сил, расположенных по одну сторону сечения, равен и противоположен по знаку общему моменту сил, расположенных по другую сторону сечения. Рассмотрим балку, на которую действуют сосредоточенные силы 1, 2, 3 и силы реакции 4, 5. Определим момент сил, расположенных, например, слева от сечения  $A$  (черт. 90). Построим многоугольник сил, задавшись определенным полюсным расстоянием  $h$ , и многоугольник Вариньона. Пользуясь указанным выше построением, определим силы реакции 4 и 5. Чтобы определить общий момент сил



Черт. 90.



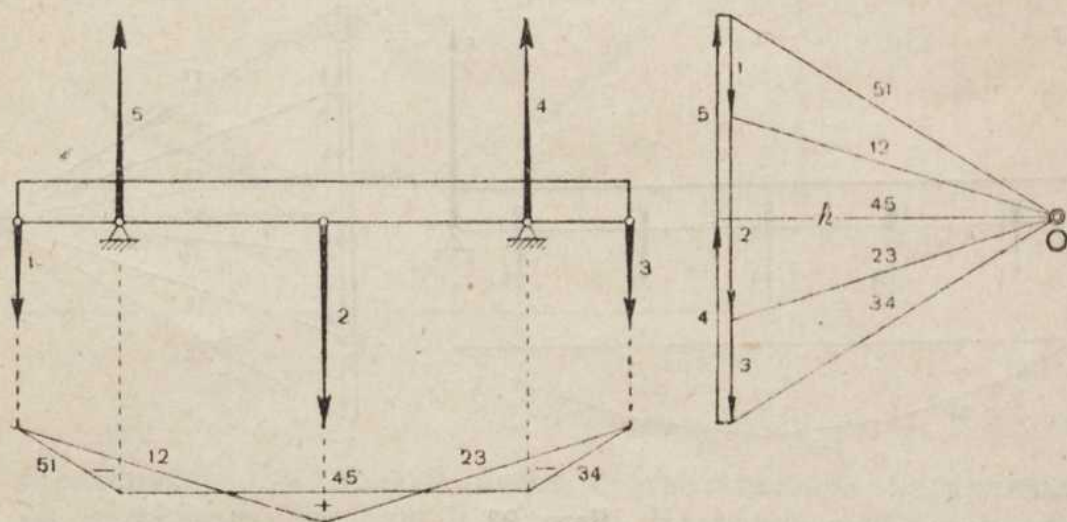
определить общий момент сил 5, 1, 2, 3 относительно сечения  $A$ , воспользуемся графическим изображением моментов через векторы. Проведем через  $A$  прямую  $\Delta$ , параллельную силам. Момент силы 5 положителен и изображается отрезком, отсекаемым на  $\Delta$  лучами 45 и 51. Момент силы 1 отрицателен и изображается отрезком, отсе-

каемым на  $\Delta$  лучами 51 и 12; следовательно, общий момент сил 5 и 1 изображается отрезком, отсекаемым на  $\Delta$  лучами 45 и 12. Продолжая те же рассуждения, нетрудно убедиться, что общий момент сил 5, 1, 2, 3 изобразится отрезком  $ab$ , отсекаемым на  $\Delta$  лучами 45 и 34, т.-е. крайними лучами для рассматриваемой системы четырех сил. Общий момент сил, расположенных справа от сечения  $A$ , изобразится тем же отрезком, но будет противоположен по знаку. Таким образом, момент изгиба для какого-нибудь сечения изображается отрезком, параллельным силам и расположенным внутри многоугольника Вариньона под рассматриваемым сечением. Чтобы иметь самый момент, надо не позабыть составить произведение  $ab$  на полюсное расстояние  $h$ , причем один из этих отрезков должен быть измерен масштабом сил, а другой — масштабом длин. Если взято  $h = 1$ , то отрезки  $ab$  непосредственно дают самые моменты. Поэтому площадь, заключенная внутри многоугольника Вариньона, называется иногда площадью моментов. Мы видим, что момент равен нулю в точках опоры, резко изменяется под силами и может достигать наибольшего значения только под силами. Поэтому опасное сечение, в котором действует наибольший момент, можно искать только в местах приложения сил. Чтобы безошибочно определить знак момента, достаточно проследить за его непрерывным изменением при перемещении вдоль балки от края до рассматриваемого сечения. В самом



деле, отойдем немного вправо от левого конца балки. Слева будет расположена только сила 5, момент которой положителен и изобразится отрезком внутри многоугольника Вариньона. При дальнейшем перемещении вправо этот отрезок нигде в нуль не обращается; следовательно, по закону непрерывности, момент остается положительным, и, таким образом, для сечения  $A$  общий момент сил, расположенных слева от него, положителен. Отсюда следует, на основании предыдущего замечания, что общий момент сил, расположенных вправо от  $A$ , — отрицателен.

Рассмотрим еще случай балки, представленный на чертеже 91, когда изгибающий момент при переходе от сечения к сечению меняет знак. К концам балки приложены силы 1 и 3, к середине — сила 2; в точках опоры действуют силы реакции 4 и 5, которые определим указанным выше спо-



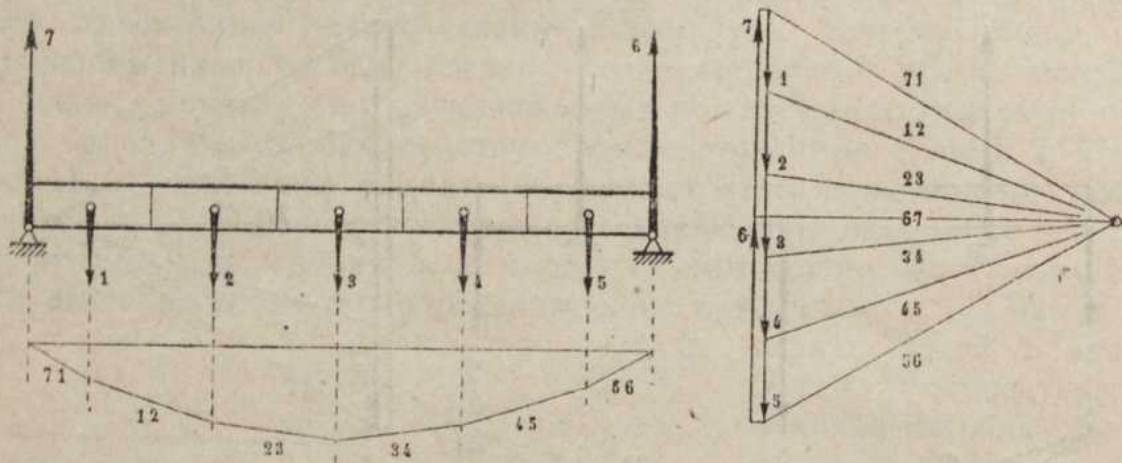
Черт. 91.

собом. В рассматриваемом случае стороны многоугольника Вариньона 12, 45 и 23, 45 перекрещиваются, и для точек их пересечения изгибающий момент равен нулю. Проследим за изменением изгибающего момента при перемещении сечения от левого конца к правому. Если мы возьмем сечение достаточно близким к левому концу балки, то слева от этого сечения будет расположена только одна сила 1, момент которой относительно этого сечения отрицателен. Под силой 5 отрицательный момент достигает своего наибольшего абсолютного значения, затем убывает по абсолютной величине и обращается в нуль для точки пересечения сторон 12 и 45. Нетрудно понять, почему это может быть. Силы 1 и 5 имеют равнодействующую, параллельную силе 5, направленную одинаково с силою 5 и лежащую справа от силы 5. Так как, по теореме Вариньона, общий момент сил 1 и 5 равен моменту их равнодействующей, то очевидно, что общий момент будет равен нулю в точке приложения равнодействующей. Отсюда следует, что, проведя через точку пересечения сторон 12 и 45 прямую, параллельную силам, до пересечения ее с балкою, мы получим точку приложения равнодействующей сил 1 и 5. Перемещаясь еще дальше вправо, мы будем иметь уже положительные моменты. В самом деле, общий момент сил 1 и 5 будет равен моменту их равнодействующей, который, очевидно, положителен. Этот момент будет возрастать до сечения у силы 2, затем начнет убывать и обратится в нуль под точкой пересечения сторон 23 и 45. Проведя через точку пересечения сторон 23 и 45 прямую, параллельную силам, до встречи ее с балкою, мы, очевидно, получим точку приложения равнодействующей сил 1, 5 и 2. При дальнейшем продвижении вправо момент делается отрицательным, достигает наименьшего алгебраического значения под силою 4 и обращается в нуль в правом конце балки. Знаки, поставленные на чертеже 91 в многоугольнике моментов, указывают знак момента изгиба.



Мы видим, что и в этом более сложном случае можно без труда определить знак одностороннего момента для любого сечения, следя за непрерывным изменением момента при перемещениях сечения от края балки.

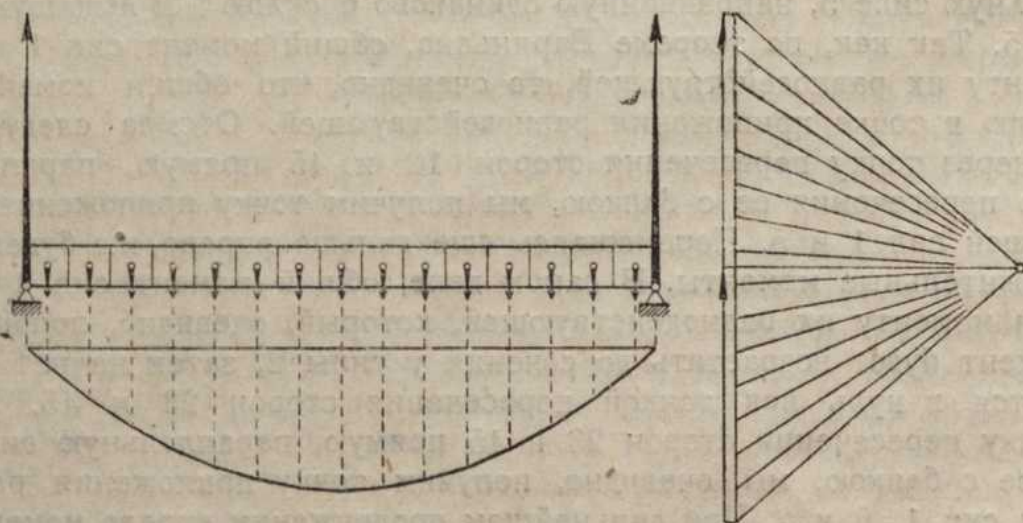
До сих пор мы пренебрегали весом балки и рассматривали только случай сосредоточенных сил, действующих на балку. Предположим теперь, что балка весома и нагружена непрерывно вдоль всей своей длины. Разобьем балку на отдельные участки и определим вес каждого участка, слагающегося из веса взятой части балки и соответствующей части груза. Предположим, например, что мы разбили балку на пять участков с весами 1, 2, 3, 4, 5 (черт. 92). Построив указанным выше способом многоугольник сил и многоугольник Вариньона для этих пяти сил 1, 2, 3, 4, 5, мы определим как силы реакции 6 и 7, так и момент изгиба для любого сечения балки.



Черт. 92.

Очевидно, что указанное построение будет давать тем более точное решение, чем на большее число частей будет разбита балка. В пределе многоугольник Вариньона обратится в дугу кривой с замыкающей ее хордой, причем направление лучей 71, 12, 23, и т. д. дает направление касательных к этой кривой.

Рассмотрим подробнее тот важный частный случай, когда балка однородна и одинаково нагружена непрерывной нагрузкой вдоль всей своей длины. Разбивая балку на весьма большое число весьма малых равных участков и определив их веса, мы, очевидно, будем иметь весьма большое число равных сил, действующих на балку (черт. 93). Их сумма дает вес

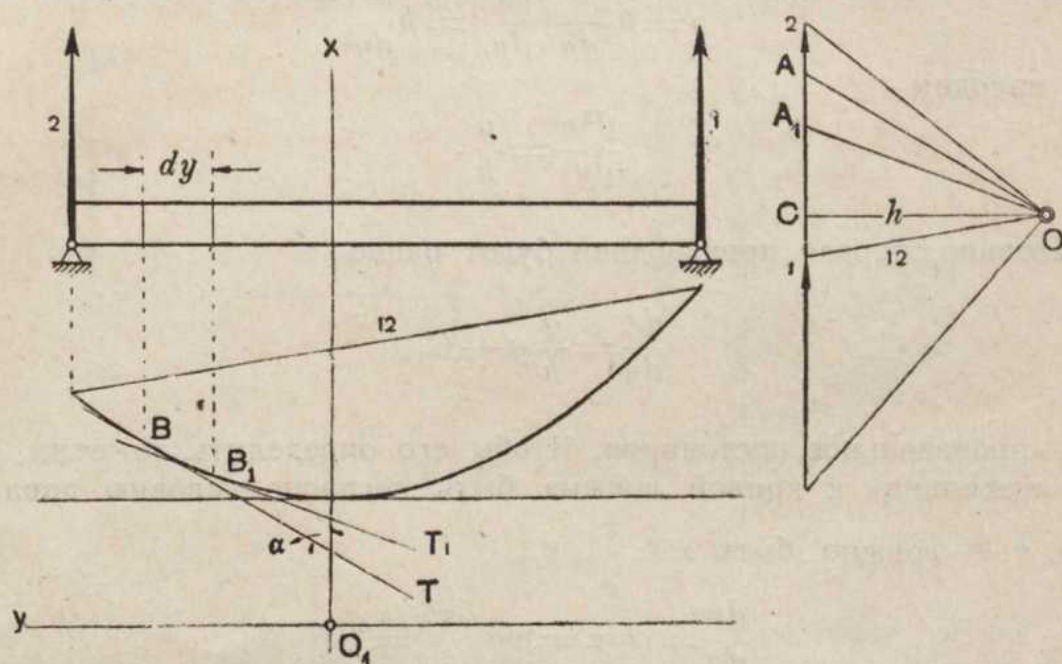


Черт. 93.

всей балки с ее общей нагрузкой. Взяв полюс  $O$  и проведя лучи, мы можем построить многоугольник Вариньона, в пределе обращающийся в дугу



кривой. Замыкая ее, найдем тот луч, который определяет на многоугольнике сил силы реакции. Покажем, что в рассматриваемом случае кривая есть парабола. Для этого обратимся к чертежу 94. Обозначим вес единицы длины балки через  $q$ . Тогда вес элемента длины  $dy$  будет равен  $qdy$ .



Черт. 94.

Каждой касательной  $T$  к кривой будет соответствовать параллельный ей луч  $OA$  на многоугольнике сил, и обратно. Направим ось  $Oy$  параллельно длине балки, а ось  $Ox$  — через ту точку кривой, касательная к которой параллельна оси  $Oy$ . Рассмотрим какую-нибудь касательную  $T$ , проведенную к кривой в точке  $B$  и образующую с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ . Если  $y = f(x)$  есть уравнение искомой кривой, то, как известно, будет

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{dx}{dy}.$$

Обозначим полюсное расстояние  $CO$  на многоугольнике сил через  $h$ . Так как  $AO \parallel T$ , то  $\angle CAO = \alpha$ , и мы имеем

$$AC = h \operatorname{ctg} \alpha = h \frac{dx}{dy}.$$

Переместимся теперь вдоль балки на элемент ее длины  $dy$ . Мы получим новую касательную  $T_1$  в точке  $B_1$  и новый луч  $OA_1 \parallel T_1$ , образующий с  $Ox$  угол  $\alpha_1$ ; следовательно, мы будем иметь

$$A_1C = h \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$AC - A_1C = h(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha_1),$$

или, переходя к дифференциалам,

$$d(AC) = h d(\operatorname{ctg} \alpha) = h d\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Так как бесконечно малая часть  $d(AC)$  на многоугольнике сил дает вес бесконечно малого участка балки, то

$$d(AC) = q dy,$$



и мы имеем

$$q dy = h d\left(\frac{dx}{dy}\right),$$

или

$$q = h \frac{d}{dy} \left( \frac{dx}{dy} \right) = h \frac{d^2 x}{dy^2}.$$

Отсюда находим

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{q}{h}.$$

Следовательно, первая производная будет равна

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q}{h} y + C_1,$$

где  $C_1$  — произвольное постоянное. Чтобы его определить, заметим, что при  $y=0$  касательная к кривой должна быть согласно условию параллельна оси  $Oy$ , т.-е. должно быть  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , и

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Поэтому, полагая в предыдущем равенстве  $y=0$ , найдем, что  $C_1=0$ . Следовательно, мы будем иметь

$$\frac{dx}{dy} = \frac{q}{h} y;$$

отсюда получим

$$x = \frac{q}{h} \frac{y^2}{2} + C_2.$$

Чтобы определить  $C_2$ , обозначим абсциссу точки пересечения кривой с осью  $Ox$  через  $a$ . Тогда, при  $y=0$ , должно быть

$$a = C_2,$$

и мы имеем

$$x = \frac{q}{h} \frac{y^2}{2} + a,$$

или

$$y^2 = \frac{2h}{q} (x - a).$$

Таким образом, мы получили уравнение параболы с параметром  $p = \frac{h}{q}$ .

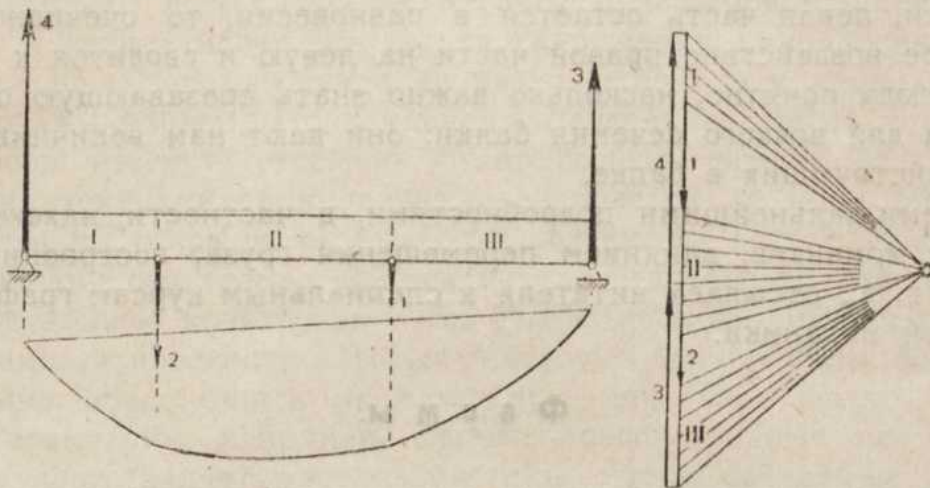
Если мы переместим ось  $Oy$  параллельно самой себе до соприкосновения с параболою, то будет  $a=0$ , и мы получим уравнение в виде

$$y^2 = \frac{2h}{q} x.$$

Усложним только что рассмотренную задачу предположением, что на балку действуют еще сосредоточенные силы, например, две силы 1 и 2 (черт. 95). Эти силы разобьют балку на три участка I, II и III. Вес первого участка изобразится на многоугольнике сил прямолинейным отрезком I; ему будет соответствовать бесконечное множество лучей. Многоугольник Вариньона для



участка I обратится по только что доказанному в дугу параболы, касательные в крайних точках которой будут параллельны крайним лучам, проведенным к отрезку I на многоугольнике сил. Далее, на многоугольнике сил надо отложить силу 1, а затем вес участка II; отрезку II будет соответствовать бесконечное множество лучей. Многоугольник Вариньона для участ-



Черт. 95.

ка II обратится в дугу параболы, касательные в крайних точках которой будут параллельны крайним лучам, проведенным к отрезку II на многоугольнике сил. Наконец, отложим на многоугольнике сил силу 2 и вес участка III.

Участку III также будет соответствовать дуга параболы, касательные в крайних точках которой параллельны крайним лучам, проведенным к отрезку III на многоугольнике сил. Как и выше, замыкающая хорда даст направление луча, определяющего силы реакции 3 и 4. Мы видим, что в рассматриваемом случае многоугольник моментов приводится к трем дугам парабол, образующим в точках соединения угловые точки, и к замыкающей хорде. Касательные в конечных точках этих дуг парабол параллельны крайним лучам заштрихованных областей на многоугольнике сил.

Вернемся к чертежу 90. Проведем в балке разрез A и отбросим правую часть балки. На левую часть действуют силы 5, 1, 2, 3.

Выберем точку приведения на разрезе A и перенесем туда все силы 5, 1, 2, 3. Если мы примем за положительное направление направление силы 5, то получим результирующую R

$$R = \text{сил. 5} - \text{сил. 1} - \text{сил. 2} - \text{сил. 3}.$$

Эта результирующая R называется срезывающей силой. Мы видим, что срезывающая сила для какого-нибудь сечения равна результирующей всех сил, приложенных к балке слева от рассматриваемого сечения. На многоугольнике сил сила R изобразится отрезком, располагающимся между лучами 34 и 45; эти же обозначения имеют стороны многоугольника Вариньона, пересекаемые прямою Δ. Отсюда получаем следующее правило:

Чтобы найти срезывающую силу для какого-нибудь сечения, надо взять на прямой сил отрезок между лучами, параллельными тем сторонам многоугольника моментов, которые пересекаются прямою, проведенною через данное сечение балки параллельно действующим на балку силам.

Помимо результирующей R мы получим еще систему дополнительных пар. Как мы знаем, все эти пары можно сложить, причем момент результирующей пары будет равен общему моменту сил 5, 1, 2 и 3 относительно сечения



$A$ , т.-е. моменту изгиба  $N = ab \times h$ . Мы видим, что одна левая часть балки без правой находится под действием силы  $R$ , приложенной в сечении  $A$ , и пары, момент которой равен моменту изгиба  $N$ . Чтобы одна левая часть без правой осталась в равновесии, необходимо в сечении  $A$  приложить к ней силу, равную и противоположную срезающей силе, и пару, момент которой равен и противоположен моменту изгиба  $N$ . Так как при наличии правой части, левая часть остается в равновесии, то очевидно, что все механическое воздействие правой части на левую и сводится к этим силе и паре. Отсюда понятно, насколько важно знать срезающую силу и момент изгиба для всякого сечения балки; они дают нам величины внутренних сил, действующих в балке.

За всеми дальнейшими подробностями, в частности, нахождением максимальных моментов, влиянием перемещения груза, построениями линий влияния, и т. д., отсылаем читателя к специальным курсам графостатики и строительной механики.

### Ф е р м ы.

Всякая покоящаяся на опорах конструкция под действием приложенных к ней сил деформируется; развивающиеся при этом упругие силы уравновешивают систему приложенных сил. Деформации некоторых частей конструкции могут приводиться только к сжатиям и растяжениям, тогда как другие части могут, например, еще изгибаться. Уравновешивание приложенных сил при помощи изгиба не является, вообще, выгодным, так как материал вследствие существования нейтрального слоя не используется полностью, и его приходится брать достаточно массивным; сверх того, расчет внутренних сил не может быть при этом произведен элементарным статическим путем, а требует знания размеров частей и свойств материала, т.-е. должен опираться на учение о сопротивлении материалов. Поэтому очень часто стремятся по возможности уничтожить изгиб, заменив его сжатием или растяжением. Например, при установке больших мачт для радиотелеграфии их подтягивают еще канатами, чтобы уравновесить давление ветра главным образом натяжением канатов, а не упругими силами изгиба самой мачты. Балкон подпирают раскосами, упирающимися в стену здания и балки, поддерживающие балкон, чтобы уравновесить нагрузку балкона главным образом сжатием раскосов, а не упругими силами изгиба сделанных в стену балок, на которых балкон покоится. Конструкции, состоящие из сочлененных между собою стержней, работающих только на растяжение и сжатие, называются фермами. Вследствие указанных выше преимуществ уравновешивания приложенных сил помощью только растяжений и сжатий, фермы являются одними из наиболее распространенных конструкций.

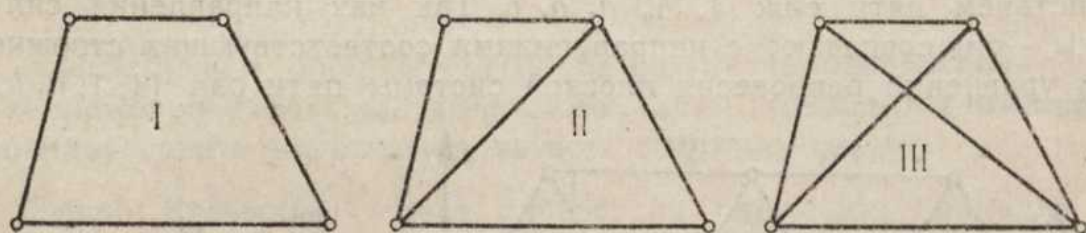
Чтобы отдельные стержни фермы работали только на растяжение и сжатие, должны быть соблюдены следующие условия:

- 1) Стержни должны быть прямолинейными и соединены между собою своими концами (узлы фермы).
- 2) Соединения должны быть шарнирные без трения.
- 3) Силы должны быть приложены только к узлам фермы.

В самом деле, предположим, что в узлах фермы приложены силы. Под действием их ферма начнет деформироваться; эта деформация прекратится тогда, когда упругие силы деформации возрастут настолько, чтобы уравновесить приложенные силы. Очевидно, что если в узлах трения нет, то при деформации всякий стержень займет такое положение, чтобы равнодействующие всех сил, приложенных к его концам, были направлены вдоль его



длины, т.-е. приводились только или к силам сжатия, или силам растяжения. Заметим, что эти деформации фермы бывают, вообще, всегда незначительными. Практически шарнирное соединение стержней неудобно в конструктивном отношении и не достигает цели, так как вследствие появления ржавчины стержни в шарнирах начинает заедать. Поэтому в настоящее время стержни скрепляют друг с другом наглухо при помощи заклепок. Вследствие этого в фермах могут появляться напряжения, направленные не вдоль длины стержней. Разложив такое напряжение по оси и перпендикулярно к оси стержня, мы найдем, что компонент, перпендикулярный к оси стержня и стремящийся изогнуть стержень, будет, вообще, невелик. Вследствие этого изгибающими усилиями обыкновенно пренебрегают и ведут расчет ферм так, как если бы стержни фермы были соединены друг с другом идеальными шарнирами без трения. Фермы могут представлять как плоские, так и пространственные конструкции. Мы будем здесь заниматься только плоскими фермами, в плоскости которых действуют данные силы. Очевидно, что ферма должна представлять неизменяемую или, как говорят, жесткую систему. Рассмотрим, например, фермы, представленные на чертеже 96. Ферма I не представляет жесткой системы. Чтобы сделать ее жесткою, достаточно соединить противоположные узлы фермы стержнем по диагонали, как показано на чертеже 96 (II). Соединение вторым стержнем еще двух других узлов [черт. 96 (III)] является с точки зрения неизменяемости фермы уже излишним. Нетрудно установить связь между числом стержней  $T$  и



Черт. 96.

числом узлов  $N$  жесткой фермы без лишних стержней. В самом деле, для определения трех первых узлов необходимы три стержня; каждый следующий из  $N-3$  узлов определится, как место пересечения двух стержней. Следовательно,

$$T = 3 + (N - 3) \cdot 2 = 2N - 3.$$

Если  $T < 2N - 3$ , то ферма будет изменяемой, и непригодна для построек. Если  $T > 2N - 3$ , то ферма имеет лишние стержни. Такие фермы употребляются на практике, но расчет напряжений в стержнях таких ферм приводит к статически неопределимой задаче и может быть выполнен лишь с помощью учения о сопротивлении материалов.

Чтобы плоская система сил была в равновесии, должны удовлетворяться три уравнения равновесия (стр. 53); поэтому опоры фермы должны быть таковы, чтобы их реакции приводили не более, чем к трем неизвестным. Далее, каждый узел фермы должен также быть в равновесии. Так как на узел действуют сходящиеся силы, то число уравнений равновесия узла будет равно двум; следовательно, для всех узлов число уравнений равно  $2N$ . Комбинациями этих уравнений будут 3 уравнения равновесия всей фермы, как целого, которые мы должны использовать для определения реакций опор. Поэтому независимых уравнений для определения внутренних сил напряжений в стержнях остается  $2N - 3$ . Таким образом, чтобы ферма была статически определимою, число стержней  $T$  должно равняться  $2N - 3$ ,

$$T = 2N - 3,$$

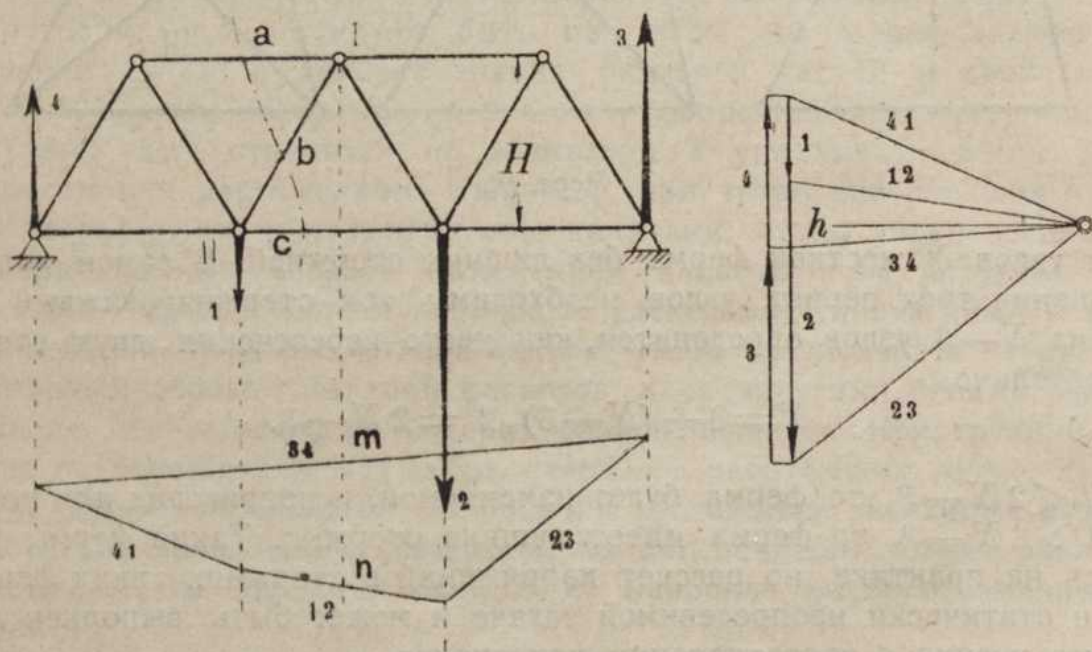


т.-е. жесткая ферма без лишних стержней является вместе с тем и статически определимою.

Совокупность стержней, ограничивающих ферму сверху и снизу, называется верхним и нижним поясами; часть пояса между смежными узлами называется панелью; наконец, стержни между поясами, образующие решетку фермы, называются промежуточными стержнями, стойками, раскосами, диагоналями, и т. п.

Произвести расчет фермы—это значит определить как опорные реакции, так и напряжения всех стержней фермы, находящейся под действием данных сил. Из предложенных методов мы остановимся только на тех, которые дали Риттер, Кульман, и Кремона и Максвелл.

**Способ Риттера.**—Способ Риттера применим к таким фермам, разрезая которые поперечным разрезом на две части, мы встречаем не более трех стержней, напряжения которых неизвестны. Рассмотрим, например, ферму, представленную на черт. 97, в узлах которой приложены силы 1 и 2. Построив многоугольник сил с полюсным расстоянием  $h$  и многоугольник Вариньона, определим прежде всего, как, было указано выше (стр. 79), силы реакции 3 и 4. Проведем поперечный разрез, пересекающий стержни в  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Напряжения в этих стержнях обозначим теми же буквами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Силы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть те силы, с которыми правая часть фермы действовала на левую. Очевидно, что левая часть фермы должна находиться в равновесии под действием пяти сил: 4, 1,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Так как направления сил  $a$ ,  $b$ ,  $c$  известны,—они совпадают с направлениями соответствующих стержней,—то из трех уравнений равновесия плоской системы пяти сил ( $4, 1, a, b, c$ ) мы



Черт. 97.

сможем определить величины трех неизвестных сил  $a$ ,  $b$ ,  $c$  одним из указанных на стр. 53 способов. Конечно, выгоднее всего составлять уравнения таким образом, чтобы в каждое из них вошло только по одной из неизвестных сил  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; этого можно достигнуть, руководясь указаниями примечания на стр. 54. Предположим, например, что мы хотим определить силу  $c$ ; для этого приравняем нулю общий момент всех пяти сил 4, 1,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  относительно точки I пересечения стержней  $a$  и  $b$ . Очевидно, что моменты сил  $a$  и  $b$  будут при этом тождественно равны нулю, и мы получим одно уравнение с одной неизвестною силою  $c$ . Если бы мы захотели найти силу  $a$ , то надо было бы приравнять нулю общий момент сил 4, 1,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  относительно точки II пересечения стержней  $b$  и  $c$ ; отсюда мы получили бы



одно уравнение для определения одного неизвестного  $a$ . Если бы стержни  $a$  и  $c$  не были параллельны между собою, то приравняв нулю момент тех же пяти сил относительно точки пересечения направлений  $a$  и  $c$ , мы получили бы одно уравнение для определения одного неизвестного  $b$ . В случае параллельности стержней  $a$  и  $c$ , как это имеет место на чертеже 97, этот способ определения силы  $b$  не применим, так как точка пересечения стержней  $a$  и  $c$  — бесконечно удаленная. Однако определение силы  $b$  не представляет никаких затруднений, мы получим ее, например, приравнявая нулю сумму проекций всех сил 4, 1,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  на направление, параллельное силе 4. Метод Риттера и заключается в выборе указанных точек; сами эти точки называются точками Риттера. Применение известных нам результатов графической статики позволяет еще более упростить задачу. Момент сил 4 и 1 относительно точки  $I$  есть односторонний момент; мы знаем, что он равен произведению отрезка  $mn$ , лежащего внутри многоугольника моментов, на полюсное расстояние  $h$ , и для рассматриваемого случая положителен (стр. 81). Если мы обозначим высоту фермы через  $H$ , то момент силы  $c$  должен быть отрицательным и будет равен  $-Hc$ . Поэтому искомое уравнение равновесия принимает вид

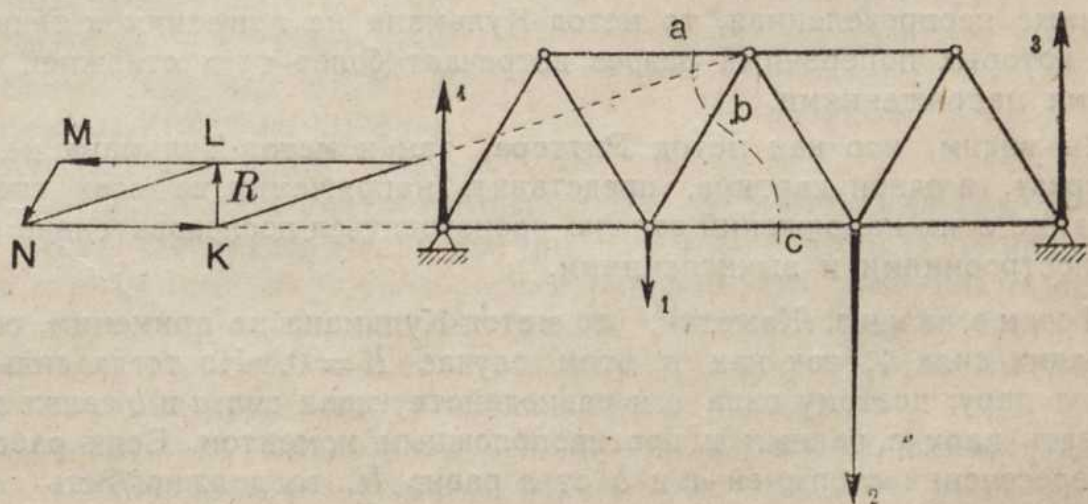
$$-cH + mn \cdot h = 0,$$

или

$$c = mn \cdot \frac{h}{H};$$

сила  $c$  должна быть направлена от разреза  $c$  по направлению к силе 2, т.е. напряжение  $c$  есть растягивающее. Таким приемом мы последовательно сможем определить напряжения во всех стержнях фермы.

**Способ Кульмана.** — Этот способ, по прежнему, применим к таким фермам, в которых поперечный разрез встречает не более трех стержней с неизвестными напряжениями. Пусть будет дана ферма, в узлах которой приложены силы 1 и 2 (черт. 98). Построив многоугольник сил и многоугольник Вариньона, мы обычным путем определим реакции 3 и 4 опор.



Черт. 98.

ведем разрез, который пересечет стержни фермы в  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найдем равнодействующую  $R$  сил 4 и 1. Мы определим ее величину из многоугольника сил, и получим точку, через которую она проходит, продолжив до их пересечения стороны 34 и 12 многоугольника Вариньона (чтобы не усложнять чертежа, эти построения на чертеже 98 не приведены).

Перенесем силу  $R$  в точку  $K$  пересечения ее направления с направлением стержня  $c$  и соединим точку  $K$  с точкой пересечения обоих



остальных стержней  $a$  и  $b$ . Четыре силы  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $R$  должны быть в равновесии; но силы  $a$  и  $b$  имеют равнодействующую, проходящую через точку пересечения стержней  $a$  и  $b$ . Поэтому сила  $R$  должна быть в равновесии с этою равнодействующею и силою  $c$ , т.-е. эти три силы должны быть сходящимися, и равнодействующая сил  $a$  и  $b$  должна пройти также и через точку  $K$ . Таким образом, мы нашли направление равнодействующей сил  $a$  и  $b$ . Отсюда уже нетрудно найти и эту равнодействующую, и силу  $c$  из условия, что эти две силы с силою  $R$  находятся в равновесии; для этого надо только построить при  $R$  треугольник по данным направлениям искомых сил. Это будет треугольник  $LNK$ . Так как  $LN$  есть равнодействующая сил  $a$  и  $b$ , то мы их найдем, разложив  $LN$  по двум направлениям, параллельным  $a$  и  $b$ . Для этого при  $LN$  надо построить треугольник  $LMN$ , стороны которого  $LM$  и  $MN$  были бы соответственно параллельны стержням  $a$  и  $b$ . Таким образом мы получили все три искомые силы

$$a = \overline{LM}, \quad b = \overline{MN}, \quad c = \overline{NK}.$$

Направление сил  $a$ ,  $b$ ,  $c$  устанавливается обходом четырехугольника  $KLMNK$  в направлении, указываемом силою  $R$ . Мы видим, что стержни  $a$  и  $b$  сжаты, а стержень  $c$  растянут.

Нетрудно заметить, что метод Кульмана в сущности равносителен решению следующей задачи: разложить данную силу  $R$  на три данных направления  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . В самом деле, чтобы левая часть фермы была в равновесии, искомые три слагающие силы  $R$  должны быть уравновешены тремя найденными воздействиями  $(\overline{LM}, \overline{MN}, \overline{NK})$  правой части фермы на левую, приложенными в разрезах  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Поэтому три компонента силы  $R$  по направлениям стержней  $a$ ,  $b$ ,  $c$  должны быть равны и противоположны силам  $\overline{LM}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{NK}$ , т.-е. представятся теми же векторами, но с обратными направлениями, а именно векторами  $\overline{ML}$ ,  $\overline{NM}$ ,  $\overline{KN}$ . Из приведенного построения следует, что эта задача имеет одно и только одно решение. Исключение представляет случай, когда три направления  $a$ ,  $b$ ,  $c$  проходят через одну точку; тогда задача будет, очевидно, неопределенною. Так как задача разложения силы на четыре и более данных направлений есть также неопределенная, то метод Кульмана не применим к таким фермам, в которых поперечный разрез встречается более трех стержней с неизвестными напряжениями.

Мы видим, что как метод Риттера, так и метод Кульмана не позволяют сразу, в одной картине, представить напряжения во всех стержнях; разыскание этих напряжений должно производиться последовательно отдельными построениями и вычислениями.

**Примечание.** Кажется, что метод Кульмана не применим, если сила 4 равна силе 1, так как в этом случае  $R=0$ . Но тогда силы 4 и 1 образуют пару; поэтому сила  $c$  и равнодействующая сил  $a$  и  $b$  также должны образовать пару с равным и противоположным моментом. Если расстояние узла пересечения стержней  $a$  и  $b$  от  $c$  равно  $H$ , то должно быть

$$c \cdot H = \text{мом. пары } (4, 1);$$

отсюда найдем силу  $c$ , а затем и силы  $a$  и  $b$ . Если при этом стержни  $a$  и  $c$  параллельны, то очевидно, что сила  $b=0$ , и  $a=c$ .

**Способ Кремона - Максвелля.** — В отличие от двух предыдущих, этот способ позволяет в одной компактной картине представить напряжения всех стержней фермы. Теория его, основанная на учении о взаимных фигурах, дана знаменитым английским физиком Клэрком - Максвеллем и независимо от него другим путем итальянским математиком Кремона.



Будем по прежнему (стр. 74) называть все прямые плоской фигуры ее сторонами. Дадим определение взаимных фигур.

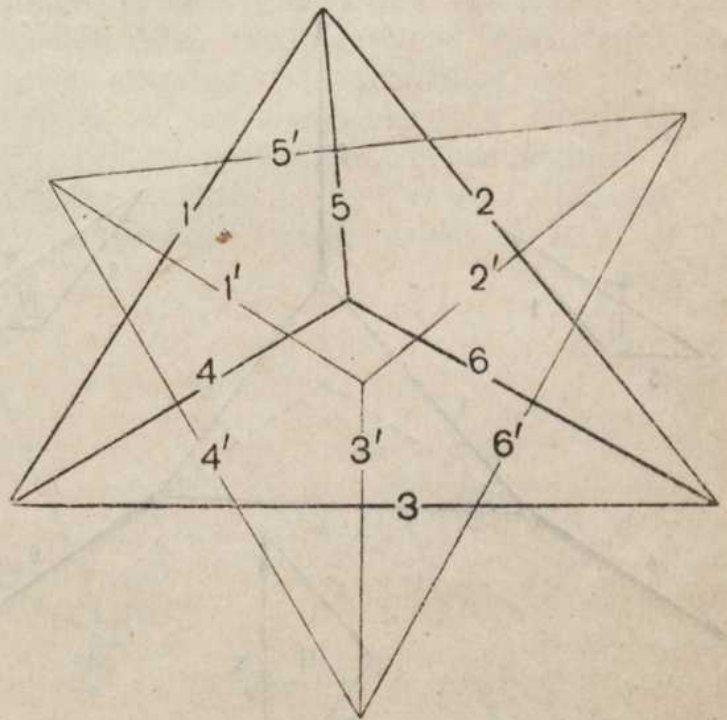
Две фигуры называются взаимными, если:

1. Число сторон у обоих фигур одно и тоже.
2. Стороны обоих фигур попарно параллельны (или перпендикулярны, что приводится к тому же).

3. Сходящимся в одной точке сторонам одной фигуры соответствуют на другой фигуре параллельные стороны, образующие замкнутый многоугольник, и обратно.

Мы видели пример таких взаимных фигур на многоугольниках сил и многоугольниках Вариньона, построенных для двух различных полюсов (черт. 82). Дадим еще другой пример. Рассмотрим шестиугольник, образуемый сторонами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (черт. 99). Найдем центр описанных окружностей для треугольников (1, 2, 3), (1, 5, 4), (5, 2, 6), (6, 3, 4). Соединив эти четыре центра прямыми, получим новый шестиугольник со сторонами 1', 2', 3', 4', 5', 6'. Докажем, что полученный шестиугольник будет взаимный с данным. Первое усло-

вие, очевидно, удовлетворяется. Покажем теперь, что стороны 1 и 1', 2 и 2', 3 и 3', и т. д. взаимно перпендикулярны. В самом деле, прямая 1' соединяет центры окружностей, описанных вокруг треугольников (1, 2, 3) и (1, 5, 4), у которых сторона 1 служит общей хордой; а известно, что прямая, соединяющая центры двух пересекающихся окружностей, перпендикулярна к их общей хорде и делит ее пополам. То же доказательство для остальных пар сторон. Таким образом, второе условие также удовлетворяется. Перейдем, наконец, к третьему условию. Стороны 1, 2, 3 образуют треугольник; стороны 1', 2', 3' сходятся в одной точке. Стороны 1, 5, 2 сходятся в одной точке;



Черт. 99.

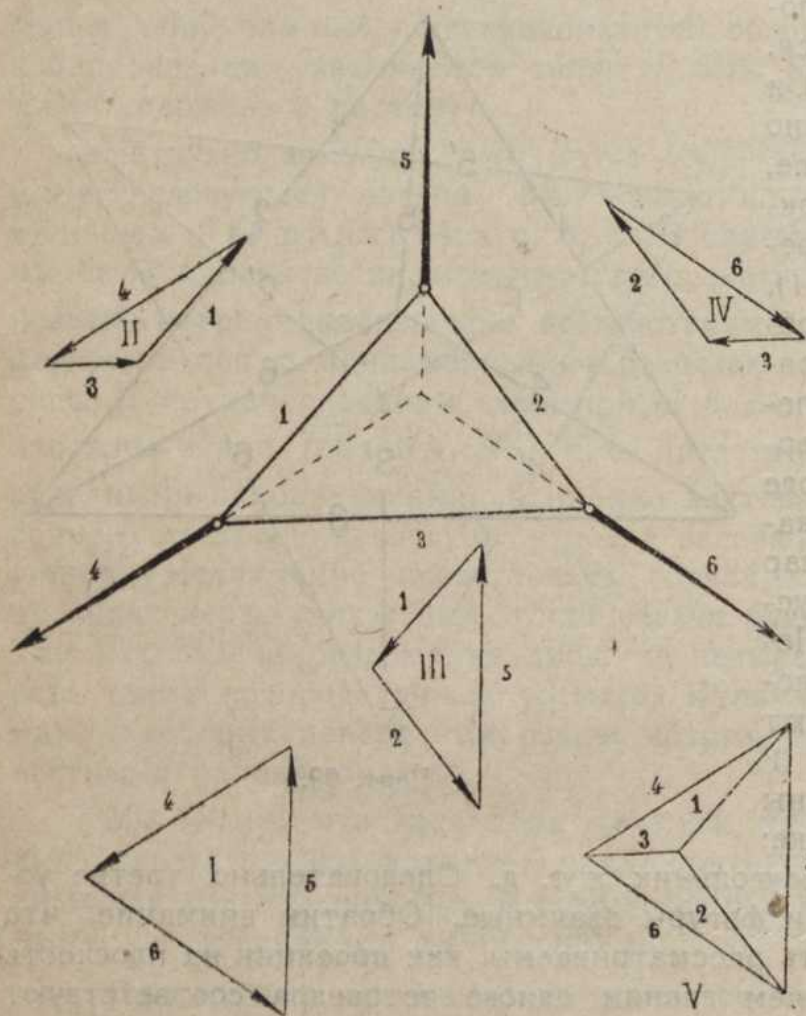
стороны 1', 5', 2' образуют треугольник, и т. д. Следовательно, третье условие также удовлетворено, и фигуры взаимные. Обратим внимание, что оба шестиугольника могут быть рассматриваемы, как проекции на плоскость чертежа двух тетраэдров, причем граням одного тетраэдра соответствуют вершины другого, и обратно, если соответствующими ребрами мы будем считать те, которые друг к другу перпендикулярны.

В дальнейших построениях мы будем называть сторонами фигур как прямые, представляющие стержни фермы, так и прямые действия данных сил и сил реакций опор. Мы будем перенумеровывать эти стороны цифрами; те же цифры будут служить для изображения сил, действующих вдоль этих прямых.

Рассмотрим случай треугольной фермы, в вершинах которой приложены силы 4, 5, 6 (черт. 100). Стержни фермы обозначим цифрами 1, 2, 3. Прежде всего, данные силы 4, 5, 6 должны быть в равновесии; для этого они должны быть сходящимися, и многоугольник сил для них должен быть замкнутым, т. е. быть треугольником. Этот треугольник построен на чертеже 100 (I). Продолжая направления сил 4, 5, 6 до точки их схода, мы мо-



жем рассматривать получившуюся фигуру, как проекцию на плоскость чертежа тетраэдра с боковыми ребрами 4, 5, 6 и с основанием, образованным сторонами 1, 2, 3. Если вся ферма находится в равновесии, то каждый ее узел должен также быть в равновесии. Рассмотрим, например, узел, в котором сходятся стороны 4, 1, 3. Он должен быть в равновесии под действием данной силы 4 и напряжений стержней 1 и 3. Эти три силы должны образовать треугольник, представленный на чертеже 100 (II), причем построение этого треугольника элементарно, так как дана одна его сторона 4 и направления двух других сторон 3 и 1; отсюда определяем величину сил 1 и 3, направление же их вдоль их прямых действия устанавливается данным направлением силы 4 на этом треугольнике. Переносим силы 1 и 3 к углу, мы заключаем, что для образования этих сил стержни 1 и 3 оба должны быть растянутыми. Узел, в котором сходятся стороны 1, 5, 2, также должен быть в равновесии; следовательно, силы 1, 5, 2 должны составлять треугольник, изображенный на чертеже 100 (III). Направление сил 1 и 2 определяется данным направлением силы 5. Переносим силы 1 и 2 заключаем,



Черт. 100.

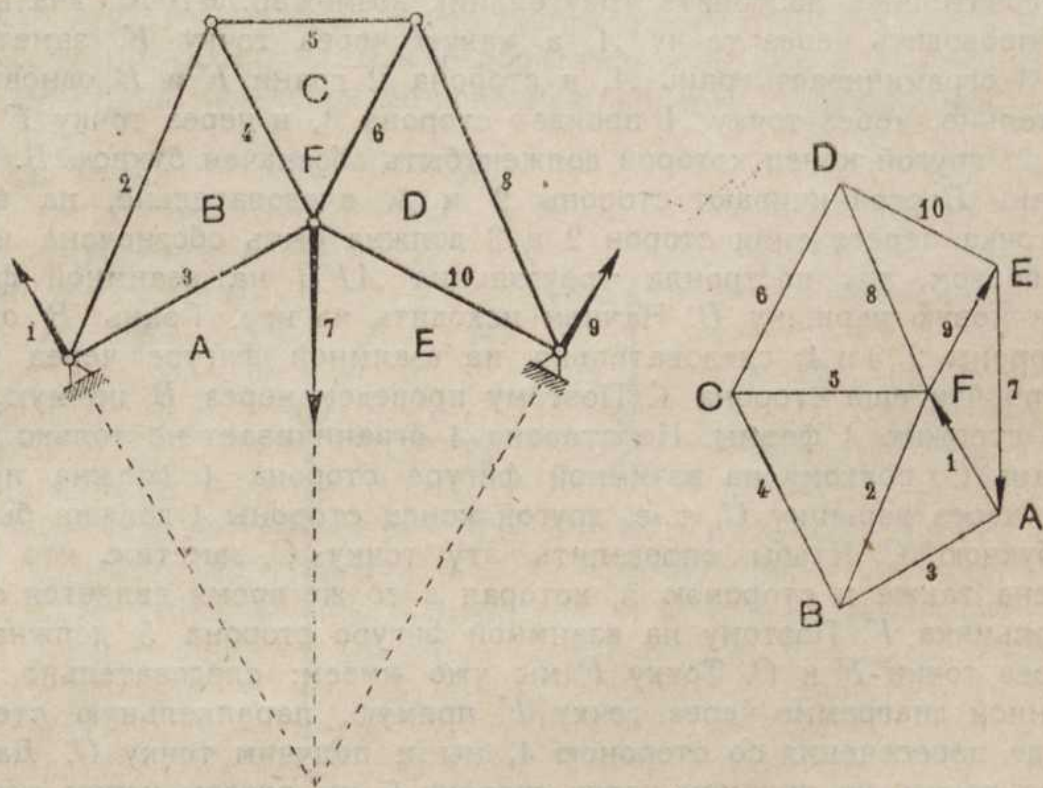
что стержни 1 и 2 оба должны быть растянутыми. Следует обратить внимание, что сила 1 встретила нас дважды: на треугольнике II и на треугольнике III; она имеет на этих треугольниках противоположные направления. Это очевидно, так как растянутый стержень 1 стремится стянуть два своих концевых узла с равными, но противоположно направленными силами. Переходя к узлу, образуемому сторонами 6, 3, 2, мы построим треугольник IV, из которого сможем определить силы 2 и 3. Это построение является даже излишним, так как силы 2 и 3 уже были нами найдены из треугольников III и II. Конечно, силы 2 и 3 на треугольнике IV будут иметь направления, противоположные направлениям сил 2 и 3 на треугольниках III и II. Причина этого была

нами только что выяснена. Заметим, что при построениях треугольников II, III и IV данные силы 4, 5, 6 встречались по одному разу, а силы напряжений стержней 1, 2, 3 — по два раза. Этот прием можно распространить и на более сложные фермы: сначала ищем равновесие данных сил и сил реакций опор, строя для них многоугольник, а затем переходим к равновесиям отдельных узлов фермы. Однако, если ферма сложна, то число таких отдельных построений будет весьма значительным, причем стороны, представляющие напряжения стержней, придется прочерчивать по два раза. Нетрудно подметить, что построение может быть упрощено. Очевидно, что треугольники II, III и IV можно вложить в треугольник I, как это показано на чертеже 100 (V). Фигура



V в компактном построении дает сразу общую картину всех напряжений и заменяет собою фигуры I, II, III и IV. Фигура V и фигура, представляющая ферму с приложенными к ней силами, являются взаимными. В самом деле, число сторон у обеих фигур одинаково; стороны попарно параллельны; наконец, стороны одной фигуры, параллельные сходящимся сторонам другой фигуры, образуют на первой фигуре треугольник, и обратно, как, например, стороны 1, 2, 3. Таким образом, метод Максвелля-Кремона сводится к построению фигуры взаимной с данной, представляющей ферму с приложенными к ней силами. Эти обе взаимные фигуры называются взаимными диаграммами; отсюда самый метод называется еще методом взаимных диаграмм. Построение взаимной диаграммы требует соблюдения некоторых правил, без чего построение может не удасться без ряда ошибочных проб. Мы выясним эти правила лишь для простейших случаев, когда силы, приложенные к ферме, и силы реакции опор — сходящиеся или параллельные.

Рассмотрим ферму, представленную на чертеже 101. На нее действует сила 7, и в опорах развиваются силы реакции 1 и 9. Эти три силы 1, 7, 9, как находящиеся в равновесии, должны быть сходящимися. Продолжим их до их точки схода и перенумеруем все стороны получившейся фигуры. Мы можем рассматривать ее, как проекцию на плоскость чертежа пятигранной пирамиды, у которой основанием служит пятиугольник, образованный сторонами 1, 2, 5, 8, 9, а боковыми ребрами — стороны 3, 4, 6, 10, 7. Обозначим основание этой пирамиды через  $F$ , а боковые грани через  $A, B, C, D, E$ .



Черт. 101.

Задача состоит в том, чтобы построить фигуру, взаимную с данной. Эта взаимная фигура может быть рассматриваема также, как проекция на плоскость чертежа некоторого многоугольника, вершины которого будут соответствовать граням данного, и обратно. Другими словами, например, грань  $A$  образуют стороны 1, 3, 7; на взаимной фигуре в вершине  $A$  должны сойтись параллельные им стороны 1, 3, 7. Грань  $F$  образуют стороны 1, 2, 5, 8, 9; на взаимной фигуре параллельные им стороны 1, 2, 5, 8, 9 должны сойтись в вершине  $F$ . Таким образом, для построения диаграммы прежде всего надо представить, проекцией какого многоуголь-



ника на плоскость чертежа является данная фигура, и разметить его грани буквами. Теми же буквами надо будет размечать вершины взаимной фигуры, в которых сходятся стороны с теми же цифрами.

Далее, надо построить многоугольник данных сил и сил реакции и разметить его вершины буквами, как только что указано, обходя всю фигуру в определенном направлении, например, по стрелке часов. Если мы будем обходить фигуру, представленную на левом чертеже 101 по стрелке часов, то после силы реакции 1 мы встретим силу реакции 9, а затем данную силу 7. Построим же из этих сил треугольник. Чтобы обозначить буквами его вершины, заметим, что стороны 7 и 9 ограничивают грань  $E$ ; поэтому на взаимной фигуре точка пересечения сторон 7 и 9 должна быть обозначена через  $E$ . На данной фигуре стороны 1 и 7 ограничивают грань  $A$ ; поэтому на взаимной фигуре точка пересечения сторон 1 и 7 должна быть обозначена через  $A$ . Наконец, 9 и 1 ограничивают грань  $F$ ; поэтому на взаимной фигуре последняя вершина треугольника должна быть обозначена через  $F$ .

Затем, переходим к тому узлу фермы, где сходятся не более двух стержней с неизвестными напряжениями. Возьмем, например, узел, образуемый сторонами 1, 2, 3. На взаимной фигуре эти три стороны должны образовать треугольник. Одна сторона этого треугольника, именно, сторона 1 известна; известны направления двух других сторон; следовательно, построить треугольник возможно. Чтобы знать, какую сторону проводить через точку  $A$ , а какую через точку  $F$ , заметим, что сторона 3 ограничивает грань  $A$ , и сторона 2 грани  $F$  и  $B$  одновременно. Следовательно, через точку  $A$  пройдет сторона 3, и через точку  $F$  пройдет сторона 2, другой конец которой должен быть обозначен буквою  $B$ . В самом деле, грань  $B$  ограничивают стороны 2 и 3; следовательно, на взаимной фигуре точка пересечения сторон 2 и 3 должна быть обозначена через  $B$ . Таким образом, мы построили треугольник  $AFB$  на взаимной фигуре и получили новую вершину  $B$ . Начнем исходить из нее. Грань  $B$  ограничивают стороны 2, 3 и 4; следовательно, на взаимной фигуре через точку  $B$  должна пройти еще сторона 4. Поэтому проведем через  $B$  прямую, параллельную стержню 4 фермы. Но сторона 4 ограничивает не только грань  $B$ , но и грань  $C$ ; поэтому на взаимной фигуре сторона 4 должна проходить также и через вершину  $C$ , т.-е. другой конец стороны 4 должен быть обозначен буквою  $C$ . Чтобы определить эту точку  $C$ , заметим, что грань  $C$  ограничена также и стороною 5, которая в то же время является стороною многоугольника  $F$ . Поэтому на взаимной фигуре сторона 5 должна проходить через точки  $F$  и  $C$ . Точку  $F$  мы уже имеем; следовательно, проведя на взаимной диаграмме через точку  $F$  прямую, параллельную стержню 5 фермы, до пересечения со стороною 4, мы и получим точку  $C$ . Далее, совершенно таким же приемом через сторону 6 мы введем новую точку  $D$ , а затем придем к точке  $E$ , т.-е. закончим все построение, выполнив его в определенном круговом порядке. Таким образом, исходя из первой взятой вершины на многоугольнике сил (в данном примере из вершины  $A$ ), мы, обходя ферму в определенном круговом порядке, строили дальнейшие многоугольники сил.

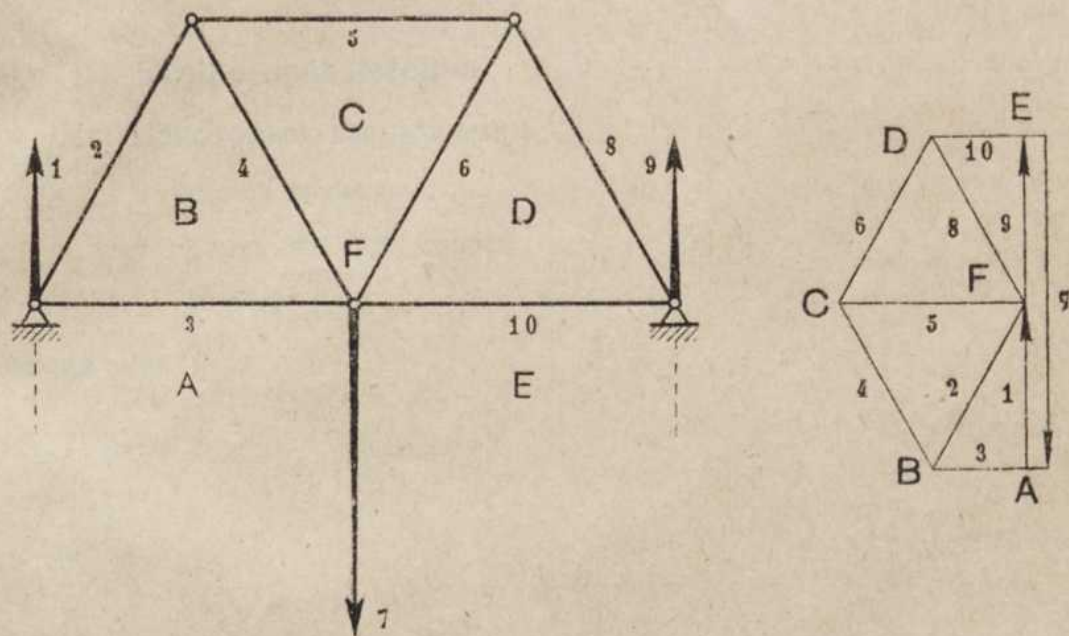
Полученная взаимная диаграмма также представляет проекцию на плоскость чертежа пирамиды с вершиною  $F$  и с основанием  $ABCDE$ .

Величины напряжений всех стержней фермы даны величинами сторон этой диаграммы в том масштабе, который был взят для изображения данной силы 7. Остается определить направления напряжений. Для этого начинаем



с того узла фермы, к которому приложена известная сила, например, сила 1. Из треугольника  $AFB$  заключаем, что сила 2 имеет направление от  $F$  к  $B$ , а сила 3 от  $B$  к  $A$ , т.-е. стержень 2 толкает узел, и потому он сжат, а стержень 3 тянет узел, и потому он растянут. Чтобы определить направления сил 4 и 5, обратимся к узлу, где сходятся стержни 2, 4, 5. Так как на этом своем конце стержень 2 давит на рассматриваемый узел с силой, равной, но противоположной его давлению на первый узел, то изменяя в  $\triangle BCF$  направление силы 2 на обратное, т.-е. на направление от  $B$  к  $F$ , определим направление силы 5 от  $F$  к  $C$  и силы 4 от  $C$  к  $B$ ; следовательно, стержень 5 будет сжат, а стержень 4 растянут. Изменяя направление силы 5 для треугольника  $CFD$  на обратное, т.-е. на направление от  $C$  к  $F$ , мы получим направление силы 8 от  $F$  к  $D$  и силы 6 от  $D$  к  $C$ , т.-е. стержень 8 будет сжат, а стержень 6 растянут. Наконец, изменяя направление силы 8 для треугольника  $DFE$  на обратное, т.-е. на направление от  $D$  к  $F$ , получим направление силы 9 от  $F$  к  $E$  и силы 10 от  $E$  к  $D$ . Следовательно, стержень 10 будет растянут; что же касается направления силы 9, то оно нам уже известно, и полученный результат может служить проверкой выполненных рассуждений; мы видим, что полученное направление для силы 9 от  $F$  к  $E$  не противоречит данному.

Случай, когда данные силы и силы реакции опор параллельны между собою, не является принципиально отличным от предыдущего. Надо только вообразить, что точка схода сил удалась в бесконечность. Очевидно, что некоторые грани обратятся при этом в бесконечные полосы. Чтобы представить себе это, деформируем предыдущую ферму в ферму, изображенную на чертеже 102. Тогда грани  $A$  и  $E$  обратятся в бесконечные полосы; точно также, основание  $F$  сделается бесконечною полосой, ограниченной парал-



Черт. 102.

лельными прямыми 1, 9 и отрезками 2, 5, 8. Построение ведется совершенно так же, как прежде, только треугольник сил превратится в прямолинейный отрезок  $AE$ , и точка  $F$  попадет на него между точками  $A$  и  $E$ . Полученную взаимную фигуру можно также рассматривать, как проекцию на плоскость чертежа пятиугольной пирамиды, у которой вершина находится в точке  $F$ , основанием служит пятиугольник  $ABCDEA$ , причем боковая грань, представляющая  $\triangle FAE$ , перпендикулярна к плоскости чертежа, так что она проектируется на нее вдоль основания  $AE$  этого треугольника  $FAE$ .



Предыдущими рассуждениями мы и ограничим изложение метода взаимных диаграмм. Применение его к случаям, когда силы не будут сходящимися или параллельными, и все дальнейшие подробности можно найти в специальных курсах графостатики и строительной механики.

Примечание. — При этих построениях мы пользовались подмеченным нами свойством, что взаимные фигуры могут быть представлены, как проекции на плоскость чертежа двух многогранников, находящихся в таком отношении друг к другу, что граням одного соответствуют вершины другого, и обратно; стороны проекций при этом оказывались попарно параллельными. Как показал Максвелл, это свойство является общим и может быть строго доказано. За большими подробностями отсылаем к уже указанной книге проф. В. Л. Кирпичева: Основания графической статики.





## ОГЛАВЛЕНИЕ.

|                                                 | <i>Стр.</i> |
|-------------------------------------------------|-------------|
| ГЛАВА I. Сила, как вектор . . . . .             | 3           |
| ГЛАВА II. Система сходящихся сил . . . . .      | 11          |
| ГЛАВА III. Система параллельных сил . . . . .   | 14          |
| ГЛАВА IV. Центр тяжести . . . . .               | 24          |
| ГЛАВА V. Теория пар . . . . .                   | 36          |
| ГЛАВА VI. Общий случай приведения сил . . . . . | 39          |
| ГЛАВА VII. Учение о равновесии . . . . .        | 48          |
| Равновесие точки . . . . .                      | 50          |
| Равновесие тел . . . . .                        | 53          |
| Трение . . . . .                                | 63          |

## ГРАФОСТАТИКА.

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| ГЛАВА VIII. Общие предложения . . . . .  | 69 |
| ГЛАВА IX. Некоторые приложения . . . . . | 78 |
| Центр тяжести . . . . .                  | 78 |
| Балка на двух опорах . . . . .           | 79 |
| Фермы . . . . .                          | 86 |
| Оглавление . . . . .                     | 97 |





**ИЗДАТЕЛЬСКАЯ КОМИССИЯ  
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА.**

---

**Находятся в печати:**

**Проф. Н. С. Стрелецкий.** Курс мостов.

**Проф. Н. И. Сушкин.** Центральные электрические станции и их эксплуатация.

**Пр. И. Ф. Маслов и пр. М. В. Носов.** Руководство по техническому черчению.

**Пр. М. А. Перекалин.** Сборник задач по теоретической электротехнике с подробными решениями.

**Готовятся к печати:**

**Проф. А. И. Некрасов.** Теоретическая Механика. Ч. II. Кинематика, динамика и аналитическая статика.

**Проф. В. А. Нашкаров.** Курс водоснабжения.

**Проф. М. А. Великанов.** Курс гидрологии.



---

**СКЛАД ИЗДАНИЯ**

в книжном магазине газеты „Экономическая Жизнь“,  
Москва, Петровка, 16, тел. 1-67-05.