

133300.

НА  
ВЫДА

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦІЯ  
ТЕОРІИ ДВИЖЕНІЯ ПОЛЮСОВЪ  
ВРАЩЕНІЯ ЗЕМЛИ  
ПО ЕЯ ПОВЕРХНОСТИ.

---

Н. Е. Жуковского.

---

Отдѣльный оттискъ изъ XII тома Трудовъ Отдѣленія физическихъ  
Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей  
Естествознанія, Антропологии и Этнографіи.

---

МОСКВА.

Университетская типогр., Страстной бульв.

1904.

7

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦІЯ  
ТЕОРІИ ДВИЖЕНІЯ ПОЛЮСОВЪ  
ВРАЩЕНІЯ ЗЕМЛИ

ПО ЕЯ ПОВЕРХНОСТИ.

133300 ✓  
Прозер. 1935 Н. Е. Жуковскаго.

1962  
Отдѣльный оттискъ изъ XII тома Трудовъ Отдѣленія физическихъ  
Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей  
Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.

МОСКВА.

Университетская типогр., Страстной бульв.  
1904.

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦІЯ ТЕОРІИ ДВИЖЕНІЯ ПОЛЮСОВЪ ВРАЩЕНІЯ ЗЕМЛИ ПО ЕЯ ПОВЕРХНОСТИ.

---

Н. Е. Жуковскаго.

---

§ 1. Теорія движенія полюсовъ вращенія земли по ея поверхности развивалась главнымъ образомъ съ помощію аналитическихъ изслѣдованій. Наиболѣе существенныя стороны этой теоріи разработаны, по моему мнѣнію, Дарвиномъ<sup>1)</sup>, Вольтерра<sup>2)</sup> и Haugh'омъ<sup>3)</sup>. Дарвинъ изслѣдовалъ вліяніе на движеніе полюсовъ земли перемѣщенія ея массъ, измѣняющее ея гираціонный эллипсоидъ, Вольтерра разработалъ вопросъ о перемѣщеніи полюсовъ въ зависимости отъ постоянныхъ циклическихъ (по замкнутымъ траекто-

---

<sup>1)</sup> Darwin, On the Influence of Geological Changes on the Earth's-Axis of Rotation. Philos. Trans. Vol. 167.

<sup>2)</sup> Vollterra, Acta Mathematica 22 : 3, 22 : 4.

<sup>3)</sup> Haugh, The Rotation of an Elastic Spheroid. Philos. Trans. V.

ріямъ) движеній находящихся на землѣ жидкостей, а Naugh объяснилъ эффектомъ упругости земли удлинёніе періода Эйлера въ періодъ Чендлера. Въ прошломъ, 1903 году появилась въ печати третья тетрадь сочиненія Клейна и Зоммерфельда «*Theorie des Kreisels*», въ которой предлагается остроумный геометрическій приёмъ для разъясненія эффекта упругости земли на удлинёніе періода обращенія полюсовъ. Въ томъ же году была напечатана работа П. К. Штернберга <sup>1)</sup>, начало которой представляетъ обширную монографію теоретическихъ изслѣдованій различныхъ авторовъ о перемѣщеніи полюсовъ земли, а конецъ посвященъ обработкѣ наблюденій надъ измѣненіемъ широты Московской Обсерваторіи.

Въ предлагаемой статьѣ я даю однообразную геометрическую методу изложенія всѣхъ вышеупомянутыхъ пунктовъ теоріи движенія полюсовъ земли, опирающуюся на принципъ сохраненія главнаго момента количествъ движенія. При этомъ заслуживаетъ вниманія указаніе на шестилѣтній періодъ, подтверждающееся наблюденіями надъ широтою Московской Обсерваторіи и упрощеніе анализа Naugh'a надъ удлинёніемъ періода Эйлера въ періодъ Чендлера.

§ 2. **Періодъ Эйлера.** Пусть уравненіе

$$\frac{x^2+y^2}{A} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M} \quad (1)$$

представляетъ поверхность гираціоннаго эллипсоида

---

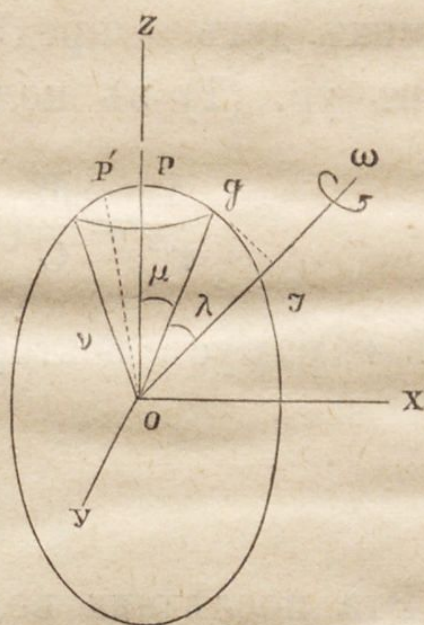
<sup>1)</sup> П. К. Штернбергъ, Широта Московской Обсерваторіи въ связи съ движеніемъ полюсовъ. Москва 1903 г.

земли. Обозначимъ (фиг. 1) чрезъ  $P$ ,  $J$  и  $G$  точки, въ которыхъ эта поверхность пересѣкается: осью  $OZ$ , мгновенною осью вращенія и главнымъ моментомъ количествъ движенія. По извѣстному свойству гираціоннаго эллипсоида, мгновенная ось вращенія  $OJ$  будетъ перпендикулярна къ касательной плоскости, прикасающейся къ гираціонному эллипсоиду въ точкѣ  $G$ , а радіусъ  $OG$  будетъ величиною постоянною во все время движенія. Будучи неподвижной въ пространствѣ, точка  $G$  перемѣщается вдоль поверхности эллипсоида по параллельному кругу радіуса  $OG \sin \mu$  со скоростью  $\omega \cdot OG \sin \lambda$  ( $\omega$  угловая скорость вращенія земли,  $\mu$  и  $\lambda$  суть углы, указанные на фигурѣ) противъ направленія стрѣлки часовъ для наблюдателя, глядящаго отъ сѣвернаго полюса. Время  $T$ , въ которое точка  $G$ , а слѣдовательно и точка  $J$  (по данному построенію  $J$  лежитъ на одномъ меридіанѣ съ  $G$ ) опишетъ кругъ около полюса инерціи  $P$ , будетъ дано формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\sin \mu}{\sin \lambda}. \quad (2)$$

При малой эксцентричности земного эллипсоида

Фиг. 1.



уголъ  $\lambda$  выходитъ весьма малымъ ( $\lambda=0,001''$ ), уголъ  $\mu$ , представляющій отклоненіе точки  $G$  или  $J$  отъ  $P$ , какъ показываютъ наблюденія, есть тоже небольшая величина (непревосходящая  $0,3''$ ), поэтому при опредѣленіи отношенія синусовъ можно взять отношеніе самихъ дугъ. Опредѣлимъ это отношеніе, представивъ ур. (1) въ полярномъ видѣ:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{M}{C}(1 + \epsilon \cos^2 \theta), \quad (3)$$

гдѣ  $r$  радіусъ векторъ,  $\theta$ —широта, а

$$\epsilon = -\frac{C-A}{A}. \quad (4)$$

Эта послѣдняя величина называется сжатіемъ земного сфероида. Такъ какъ

$$A = \frac{M}{5}(a^2 + c^2),$$

$$C = \frac{2M}{5}a^2,$$

гдѣ  $a$  экваторіальный, а  $c$  полярный радіусъ сфероида, то

$$\epsilon = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}$$

или приближенно

$$\epsilon = \frac{a-c}{a}. \quad (4')$$

Формула (3) при маломъ  $\varepsilon$  можетъ быть приближенно представлена въ видѣ:

$$r = \sqrt{\frac{C}{M}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \theta \right]. \quad (3')$$

На фиг. (1) видно, что

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta \sin \theta$$

при  $\theta = \frac{\pi}{2} - \mu$ . Дѣлая эту подстановку, находимъ съ приближеніемъ

$$\frac{\sin \mu}{\operatorname{tg} \lambda} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда по формулѣ (2):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2')$$

Если за единицу времени при опредѣленіи  $T$  возьмемъ звѣздныя сутки, то

$$\frac{2\pi}{\omega} = 1$$

и

$$T = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Сжатіе земли, какъ это слѣдуетъ изъ геодезическихъ измѣреній и изъ вычисленій лунно-солнеч-

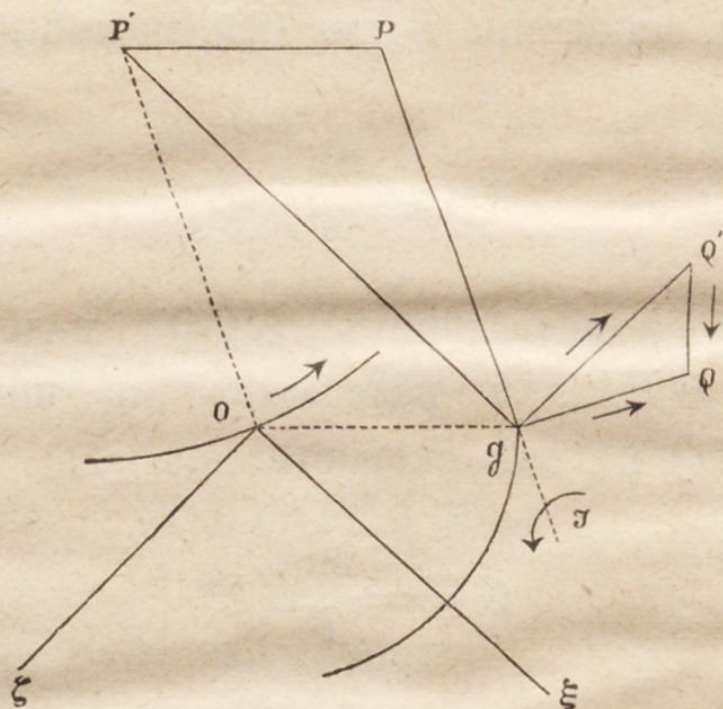
ной прецессии (въ ней фигурируетъ моментъ пары отъ силы притяженія матеріальной точки на землю, зависящій отъ величины  $\epsilon$ ), равняется  $\frac{1}{305}$ , поэтому  $T=305$  суткамъ. Такимъ образомъ, при абсолютной твердости земли мгновенный полюсъ вращенія описывалъ бы около ея оси инерціи маленький кружокъ въ 305 сутокъ. Число 305 называется періодомъ Эйлера.

§ 3. Вліяніе на движеніе мгновеннаго полюса вращенія земли переноса массъ, неизмѣняющаго  $A$  и  $C$ , но измѣняющаго расположеніе оси гираціоннаго эллипсоида относительно части земли, считаеваемой недеформируемой. Предположимъ, что недеформируемая часть земли соединена съ небольшою сравнительно массою, перемѣщающейся относительно недеформируемой части такъ, что  $A$  и  $C$  не измѣняются, но положеніе оси гираціоннаго эллипсоида

$OP$  (фиг. 1) всего вещества земли относительно недеформируемой его части измѣняется. Пусть  $OP'$  будетъ направленіе оси инерціи недеформируемой части земли, относительно которой ось  $OP$  отклоняется на нѣкоторый малый перемѣнный уголъ  $\gamma$ . Движеніе оси  $OP$  относительно твердой части земли можетъ быть или періодическимъ, какъ это имѣетъ мѣсто относительно переноса массъ, связаннаго съ временами года, или совершающимся въ одномъ направленіи, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ геологическихъ процессовъ.

Отмѣтимъ (фиг. 2) на сферѣ радиуса  $c$ , соединенной съ твердою частью земли, мѣсто точекъ  $P'$ ,  $P$ ,  $G$ , и  $J$ , которыя представляютъ пересѣченія выше

Фиг. 2.



упомянутыхъ направленій съ этою сферою и постараемся опредѣлить движеніе на этой сферѣ точки  $G$  (а слѣдовательно и точки  $J$ ) по данному движенію точки  $P$ .

Пусть, для простоты, точка  $P$  движется по дугѣ большого круга, проходящей чрезъ точку  $P'$ .

Такъ какъ точка  $G$  попережнему будетъ неподвижна въ пространствѣ (мы предполагаемъ, что главный моментъ количествъ движенія, въ движеніи относительно твердой части земли есть нуль или очень малая величина, вслѣдствіе медленности переноса массы), то ея относительная скорость  $GQ$  бу-

детъ перпендикулярна къ  $GP$  и будетъ имѣть величину:

$$GQ = \omega GJ = \omega \frac{GJ}{PG} PG = \omega \varepsilon PG,$$

которую, на основаніи форм. (2'), можно представить въ видѣ:

$$GQ = \frac{2\pi}{T} PG.$$

Построимъ треугольникъ  $GQQ'$ , подобный треугольнику  $GRP'$ , и разложимъ съ помощію его скорость  $GQ$  на двѣ скорости:

$$GQ' = \frac{2\pi}{T} GP',$$

$$QQ' = \frac{2\pi}{T} PP'.$$

Первая изъ этихъ скоростей перпендикулярна радіусу  $P'G$  и можетъ быть включена въ равномерное вращеніе съ угловою скоростью  $\frac{2\pi}{T}$  нѣкоторыхъ осей  $\zeta O \xi$  (прямая  $O\xi$  параллельна  $P'G$ ) около точки  $P'$ , вслѣдствіе котораго начало  $O$  этихъ осей описываетъ окружность съ центромъ  $P'$ .

Относительно осей  $\zeta O \xi$  точка  $G$  имѣетъ скорость  $QQ'$ , которая даетъ по направленію этихъ осей компоненты:

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2\pi}{T} PP' \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2\pi}{T} PP' \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \end{aligned} \quad (6)$$

при чемъ предположено, что при  $t=0$  ось  $O\xi$  перпендикулярна къ направленію  $PP'$ , такъ что  $\frac{2\pi t}{T}$  есть уголъ между  $O\xi$  и  $Q'Q$ .

Допуская, что полюсь инерціи  $P$  движется по гармоническому закону, положимъ:

$$PP' = k \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right), \quad (7)$$

гдѣ  $T_1$  есть годичный періодъ.

Урав. (6) дадутъ намъ:

$$\xi = \frac{2\pi k}{T} \int \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) dt + \alpha,$$

$$\zeta = \frac{2\pi k}{T} \int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) dt + \beta$$

и приведутъ насъ, при опредѣленіи постоянныхъ  $\alpha$  и  $\beta$  подѣ условіемъ, что при  $t=0$  имѣемъ:

$$\xi = -k \left\{ \frac{T_1}{T - T_1} + \frac{T_1}{T + T_1} \right\},$$

$$\zeta = 0,$$

къ слѣдующимъ формуламъ:

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{k}{2} \left[ \frac{T_1}{T-T_1} \cos \left( 2\pi t \frac{T-T_1}{TT_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_1}{T+T_1} \cos \left( 2\pi t \frac{T+T_1}{TT_1} \right) \right], \\ \zeta &= \frac{k}{2} \left[ \frac{T_1}{T-T_1} \sin \left( 2\pi t \frac{T-T_1}{TT_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{T_1}{T+T_1} \sin \left( 2\pi t \frac{T+T_1}{TT_1} \right) \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Въ § 2 была дана для  $T$  величина 305 сутокъ, т. е. около 12 мѣсяцевъ; ниже будетъ показано, что вслѣдствіе упругости земли періодъ  $T$  долженъ быть нѣсколько болѣе, что согласно съ наблюденіями, которыя даютъ  $T$  около 14 мѣсяцевъ. Положивъ  $T=14$  мѣс.,  $T_1=12$  мѣс., найдемъ:

$$\frac{T_1}{T-T_1}=6, \quad \frac{T_1}{T+T_1}=0,46.$$

Это показываетъ, что вторые члены въ форм. (8) незначительны, сравнительно съ первыми, и могутъ быть передъ ними отброшены. Сдѣлавъ это, найдемъ, что точка  $G$  описываетъ на подвижныхъ осяхъ  $\xi O \zeta$  около начала  $O$  окружность радіуса

$$\zeta = \frac{k}{2} \frac{T_1}{T-T_1}, \quad (9)$$

вращаясь на нашей фигурѣ по стрѣлкѣ часовъ и совершая оборотъ во время

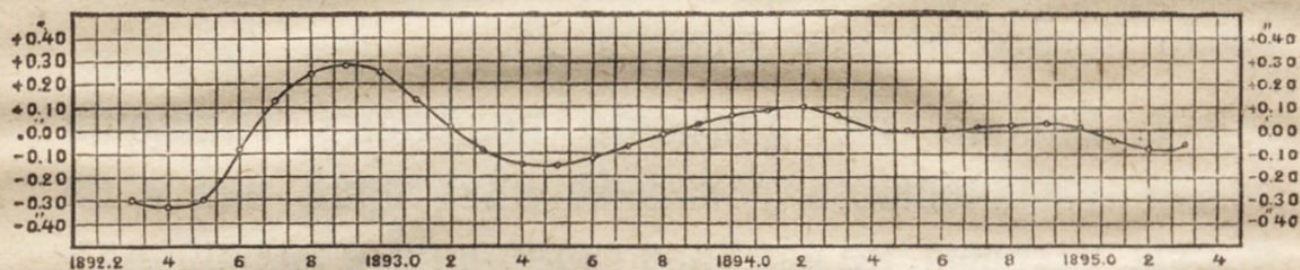
$$T_2 = T \cdot \frac{T_1}{T - T_1}. \quad (10)$$

Любопытно замѣтить, что вслѣдствіе  $T_2 = 6T$  слѣдуетъ ожидать трехлѣтній періодъ, раздѣляющій наибольшія и наименьшія измѣненія широтъ, происходящія отъ движенія полюса.

Это совпадаетъ съ таблицею, данною въ сочиненіи П. К. Штернберга для измѣненія широты Московской обсерваторіи.

Цинкографія этой таблицы дана на фиг. (3).

Фиг. 3.



Переходимъ къ предположенію:

$$PP' = k(1 - e^{-\beta t}), \quad (11)$$

которое соотвѣтствуетъ геологическимъ процессамъ.

Форм. (6) даютъ намъ:

$$\xi = k \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi k}{T} e^{-\beta t} \frac{\beta \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}}{\beta^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

$$\zeta = -k \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi k}{T} e^{-\beta t} \frac{\frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} - \beta \sin \frac{2\pi t}{T}}{\beta^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}. \quad (12)$$

Съ возрастаніемъ времени вторые члены этихъ формулъ приближаются къ нулю и мы получаемъ:

$$\xi = k \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$\zeta = -k \cos \frac{2\pi t}{T}. \quad (12')$$

При  $t$  большомъ форм. (11) даетъ  $PP' = k$ ; форм. (12') показываютъ, что при этомъ (фиг. 2) четырехугольникъ  $P'OGP$  обращается въ параллелограммъ, т. е. движеніе точки  $G$  переходитъ къ вращенію около новаго полюса инерціи  $P$ .

**§ 4. Вліяніе на движеніе полюсовъ вращенія земли циклическихъ движеній нѣкоторой части ея массы, которыя, не измѣняя гираціонный эллипсоидъ земли, даютъ въ относительномъ движеніи нѣкоторый постоянный моментъ количествъ движенія.**

Въ этомъ случаѣ векторъ  $G_1$ , представляющій главный моментъ количествъ движенія всей системы будетъ геометрически слагаться, изъ вектора  $G$ , который представляетъ главный моментъ количествъ движенія твердой и подвижной части земли въ ихъ общемъ движеніи, и изъ вектора  $G_2$ , который представляетъ главный моментъ относительнаго движенія

массъ, движущихся относительно твердой части земли. Предполагая, что передвиженіе массъ имѣетъ циклическій характеръ, т. е. совершается въ замкнутыхъ каналахъ, придемъ къ заключенію, что векторъ  $G_2$  имѣетъ постоянную величину и постоянное направленіе относительно твердой части земли; векторъ  $G_1$  имѣетъ постоянную величину и постоянное направленіе въ пространствѣ; что касается вектора  $G$ , то его величина и направленіе относительно осей  $xuz$ , неизмѣнно связанныхъ съ твердою частью земли, получаютъ нѣкоторыя малыя измѣненія со временемъ. Принимаемъ за оси  $xuz$  тѣ, къ которымъ отнесено ур. (1) и называемъ чрезъ  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  проекціи на эти оси угловой скорости  $\omega$  и чрезъ  $x, y, z$  координаты точки  $G$ , въ которой векторъ  $G$  пересѣкаетъ поверхность гираціоннаго эллипсоида (фиг. 4). Мы можемъ написать:

$$x = \frac{A\omega_1}{G} \cdot OG, \quad y = \frac{A\omega_2}{G} \cdot OG, \quad z = \frac{C\omega_3}{G} \cdot OG.$$

Подставляемъ эти величины въ ур. (1) получаемъ:

$$OG^2[A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C\omega_3^2] = \frac{G^2}{M}, \quad (13)$$

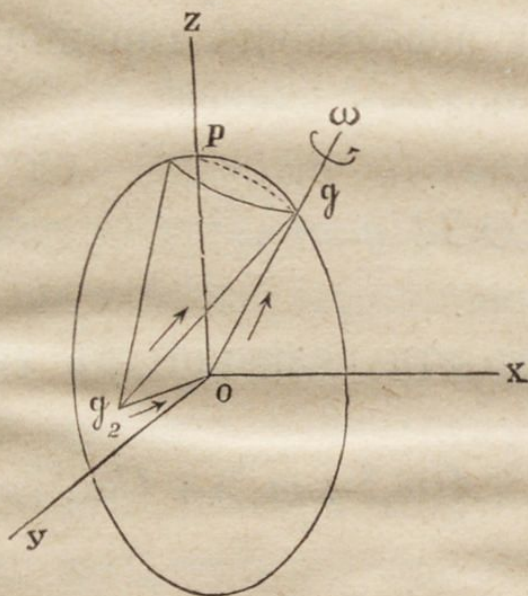
гдѣ  $M$  масса твердой части земли и вещества, участвующаго въ циклическомъ движеніи. Величина, стоящая въ скобкахъ, представляетъ двойную живую силу всей этой массы въ ея вращательномъ движеніи съ угловою скоростью  $\omega$ . Назовемъ эту

двойную живую силу через  $h$ . Въ гидродинамикѣ доказывается, что при циклическомъ движеніи жидкости съ потенціаломъ скоростей вся живая сила системы слгаается изъ  $\frac{h}{2}$  и изъ живой силы жидкости въ ея относительномъ циклическомъ движеніи. При отсутствіи тренія вся живая сила системы постоянна, а также постоянна живая сила относительнаго циклическаго движенія жидкости; вслѣдствіе этого  $h$  постоянно.

Форм. (13) даетъ намъ:

$$OG = \frac{G}{\sqrt{Mh}}. \quad (14)$$

Фиг. 4.



Проведемъ чрезъ точку  $O$  векторъ  $OG_2$ , имѣющій величину

$$OG_2 = \frac{G_2}{\sqrt{Mh}} \quad (14')$$

и направленный въ сторону, прямо противоположную вектору  $G_2$ , и соединимъ точки  $G_2$  и  $G$ . Векторъ  $G_2G$  будетъ, очевидно, направленъ по вектору  $G_1$  и будетъ имѣть такую постоянную величину:

$$G_2G = \frac{G_1}{\sqrt{Mh}}. \quad (14'')$$

Въ силу сказаннаго мы можемъ построить траекторію точки  $G$  (а слѣд. и весьма близкой къ ней точки  $I$ ) такимъ образомъ: проводимъ изъ точки  $G_2$  постояннымъ радіусомъ  $G_2G$  сферу и опредѣляемъ линію ея пересѣченія съ поверхностью гираціоннаго эллипсоида; эта линія пересѣченія и будетъ искомая траекторія точки  $G$ . Эта траекторія будетъ, вообще говоря, имѣть несимметричное расположеніе относительно полюса инерціи  $P$ . Но дѣло въ томъ, что при подсчетѣ момента  $G_2$  для возможныхъ цикловъ на поверхности земли или внутри ея и по раздѣленіи этого момента на громадную величину  $\sqrt{Mh}$  мы получаемъ чрезвычайно малую величину  $OG_2$  (сравнительно съ  $OG$ ); точка  $G_2$  почти совпадаетъ съ  $O$  и путь точки  $G$  получается почти по параллельному кружку, какъ это было сказано въ § 2.

§ 6. **О равновѣсіи вращающагося жидкаго эллипсоида.** Прежде нежели перейдемъ къ опредѣленію эффекта упругости земли на измѣненіе періода  $T$ , изложимъ въ краткой формѣ опредѣленіе связи между сжатіемъ  $\varepsilon$  и угловою скоростью  $\omega$  при вращеніи

около оси симметріи жидкаго эллипсоида вращенія, весьма близкаго къ сферѣ. Пусть

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (15)$$

будетъ уравненіе этого эллипсоида, причемъ полярная полуось  $c$ , около которой совершается вращеніе съ угловой скоростью  $\omega$ , весьма близка къ экваторіальной полуоси  $a$ . Выразимъ ур. (15) въ полярныхъ координатахъ:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]$$

и положимъ приближенно:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = 2 \frac{a - c}{a} = 2\varepsilon;$$

далѣе обозначимъ чрезъ  $R$  радіусъ сферы, имѣющей объемъ, равный объему разсматриваемаго эллипсоида вращенія, и выразимъ  $c$  по  $R$ :

$$R^3 = a^2 c = \frac{c^3}{1 - 2\varepsilon}.$$

Это позволитъ намъ написать вышеприведенное полярное уравненіе поверхности эллипсоида въ слѣдующей упрощенной формѣ:

$$r = R \left[ 1 + \varepsilon \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \right]. \quad (16)$$

Обратимся теперь къ опредѣленію потенціальныхъ функцій  $U$  и  $U'$  рассматриваемой жидкой массы на внутреннюю и внѣшнюю точку. Вездѣ внутри попер. (16) мы должны имѣть:

$$\Delta_2 U = -4\pi\kappa\rho,$$

гдѣ  $\kappa$  коэффициентъ притяженія, а  $\rho$  постоянная для всей массы плотность жидкости; во всѣхъ точкахъ внѣ поверхности (16) мы должны имѣть:

$$\Delta_2 U' = 0,$$

а въ безконечной дали

$$U' = \frac{M\kappa}{r};$$

на поверхности эллипсоида должны быть выполнены условія:

$$U = U',$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{dU'}{dr}.$$

Легко усмотрѣть, что мы удовлетворимъ первымъ тремъ условіямъ положеніями: \*)

$$U = -\frac{2}{3}\pi\kappa\rho r^2 + \alpha r^2 \left( \cos^2\theta - \frac{2}{3} \right) + \beta,$$

$$U' = \frac{M\kappa}{r} + \frac{\gamma}{r^3} \left( \cos^2\theta - \frac{2}{3} \right). \quad (17)$$

---

\*) Надо обратить вниманіе на выраженіе второго дифференціального параметра:

$$\Delta_2 U = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{\cos\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \cos\theta \frac{dU}{d\theta} \right) \right].$$

133308

Что же касается до четвертаго и пятаго условія, то имъ можно удовлетворить подборомъ постоянныхъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Согласно этимъ условіямъ мы должны при  $r$ , опредѣленномъ по форм. (16), удовлетворить уравненіямъ:

$$-\frac{M\chi r^2}{2R^3} + \alpha r^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) + \beta = \frac{M\chi}{r} + \frac{\gamma}{r^3} \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right),$$

$$-\frac{M\chi r}{R^3} + 2\alpha r \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) = -\frac{M\chi}{r^2} - \frac{3\gamma}{r^4} \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right).$$

Подставляемъ сюда  $r$  изъ форм. (16) и отбрасываемъ члены порядка  $\varepsilon^2$  и высшихъ степеней, а также произведенія  $\varepsilon\alpha$  и  $\varepsilon\gamma$ , такъ какъ  $\alpha$  и  $\gamma$  окажутся порядка  $\varepsilon$ . Это даетъ намъ:

$$-\frac{M\chi}{2R} \left[ 1 + 2\varepsilon \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \right] + \alpha R^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) + \beta$$

$$= \frac{M\chi}{R} \left[ 1 - \varepsilon \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \right] + \frac{\gamma}{R^3} \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right),$$

$$-\frac{M\chi}{R^2} \left[ 1 + \varepsilon \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \right] + 2\alpha R \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) =$$

$$-\frac{M\chi}{R^2} \left[ 1 - 2\varepsilon \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \right] - 3 \frac{\gamma}{R^4} \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right).$$

Написанныя соотношенія удовлетворяются при

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{M\chi}{R},$$

$$\gamma = \alpha R^5,$$

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{M\chi\varepsilon}{R^3}. \quad (18)$$

Подставляя эти значенія коэффиціентовъ въ формулы (17), найдемъ искомый потенціаль. Для внутренняго потенціала будемъ имѣть:

$$U = -\frac{M\kappa}{2R^3}r^2 + \frac{3}{5}\frac{M\kappa}{R^3}\varepsilon r^2\left(\cos^2\theta - \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{2}\frac{M\kappa}{R}. \quad (19)$$

На поверхности эллипсоида, т. е. при  $r$ , определенномъ изъ форм. (16), эта функція будетъ такая:

$$U = \frac{M\kappa}{R}\left[1 - \frac{2}{5}\varepsilon\left(\cos^2\theta - \frac{2}{3}\right)\right]. \quad (20)$$

Теперь надо составить силовую функцію для центробѣжной силы. Эта функція, отнесенная къ единицѣ массы будетъ такая:

$$V = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{R^2}{2}\omega^2\left(\cos^2\theta - \frac{2}{3}\right) + \frac{R^2}{3}\omega^2. \quad (21)$$

Гидростатическое давленіе  $p$  опредѣляется по извѣстной формулѣ:

$$p = \rho(U + V) + \text{const.} \quad (22)$$

Для того, чтобы это давленіе было постоянно на поверхности вращающагося эллипсоида, необходимо удовлетворить условію:

$$\varepsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 R^3}{M\kappa}. \quad (23)$$

Считая, что земля отвердѣла изъ жидкаго состоя-

пія, найдемъ на основаніи сказаннаго въ этомъ параграфѣ слѣдующую величину сжатія земли:

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 R}{g}, \quad (24)$$

гдѣ  $g$  напряженіе тяжести при поверхности земли. Подставляя въ форм. (24) соотвѣтственные числовыя значенія, получимъ

$$\varepsilon = \frac{1}{232}. \quad (25)$$

Это число нѣсколько болѣе того, которое соотвѣтствуетъ періоду Эйлера, что объясняется неоднородностью земли.

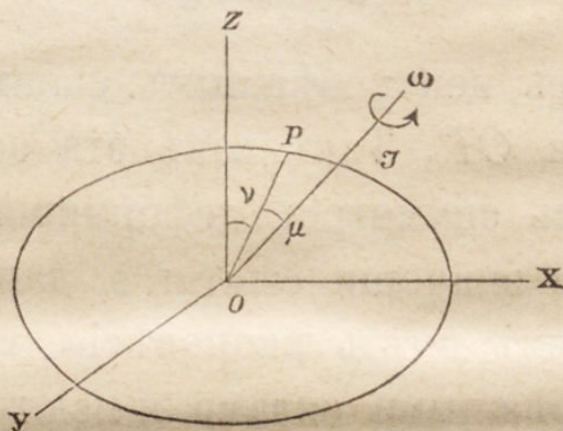
§ 6. **Періодъ Чендлера.** Изъ вычисленій надъ непосредственными наблюденіями по перемѣщенію сѣвернаго полюса Чендлеръ \*) нашелъ, что періодъ его обращенія надо принять равнымъ 427 звѣзднымъ суткамъ (14,1 мѣсяца). Это увеличеніе періода объясняется упругостью земли (ея податливостью эффекту центробѣжной силы). Предположимъ, что земля отвердѣла изъ жидкаго состоянія, при которомъ она была въ равновѣсіи при вращеніи около оси  $oz$  (фиг. 5) съ угловою скоростью  $\omega$ . Отклоненія ея частицъ отъ этого положенія будутъ вызывать упругія силы. Пусть ось вращенія земли смѣстилась изъ положенія  $OP'$  въ положеніе  $OJ$ . Если бы земля

---

\*) Chandler, Astronomical Journal. 1891—1902.

была жидкой, то ея форма измѣнилась бы такъ, что

Фиг. 5.



ось эллипсоида вращенія направилась бы по оси  $OJ$ , но такъ какъ упругія силы препятствуютъ относительному перемѣщенію частицъ земли, то форма ея измѣняется менѣе и сдѣлается эллипсоидомъ вращенія съ осью  $OP$ .

Напишемъ выраженіе потенціала центробѣжной силы въ общемъ видѣ:

$$V = \frac{\rho}{2} [\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) - (\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)^2]$$

и положимъ для нашего случая, что

$$\omega_1 = \omega(\mu + \nu), \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega,$$

гдѣ  $\mu$  и  $\nu$  суть малые углы, указанные на фигурѣ. Мы получимъ:

$$V = \frac{\rho \omega^2}{2} [x^2 + y^2 - 2(\nu + \mu)xz]. \quad (26)$$

Часть этого потенціала

$$V = \frac{\rho\omega^2}{2}[x^2 + y^2 - 2\nu xz] \quad (27)$$

соотвѣтствуетъ центробѣжнымъ силамъ при вращеніи около оси  $OP$ . Такъ какъ эта ось есть по предположенію ось симметріи деформированнаго эллипсоида, то при значеніи сжатія  $\epsilon$ , данномъ формулою (24), мы будемъ имѣть равновѣсіе между упомянутыми центробѣжными силами и ньютоновскимъ притяженіемъ. Для уравновѣшиванія силъ упругости останется система силъ съ потенціальною функціею:

$$S = -\rho\omega^2\nu xz. \quad (28)$$

Пусть  $u, v, w$  будутъ упругія смѣщенія частицъ земли, вещество которой мы будемъ считать несжимаемымъ и будемъ полагать въ выраженіяхъ нормальныхъ и тангенціальныхъ силъ упругости:  $N, N_1, N_2, T, T_1, T_2$  пуассоново отношеніе  $\eta = \frac{1}{2}$ .

При этомъ извѣстныя формулы:

$$N = \frac{E}{1+\eta} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta\theta}{1-2\eta} \right], \quad T = \frac{E}{2(1+\eta)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (29)$$

примутъ видъ:

$$N = \frac{2}{3}E \frac{\partial u}{\partial x} - p, \quad T = \frac{1}{3}E \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (30)$$

гдѣ  $p$  есть нѣкоторая функція координатъ, предста-

вляющая предѣль, къ которому стремится дробь

$$\frac{E}{1+\eta} \frac{\gamma\theta}{2\eta-1}.$$

Величину  $p$  можно разсматривать какъ добавочное гидростатическое давленіе, уравновѣшивающееся вслѣдствіе несжимаемости жидкости. Вездѣ внутри земли должны быть удовлетворены три условія равновѣсія вида:

$$\frac{dN}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \frac{dS}{dx} = 0,$$

которыя на основаніи форм. (30) и (23) и условія несжимаемости

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (31)$$

дадутъ намъ:

$$\begin{aligned} \frac{E}{3} \Delta_2 u &= \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho \omega^2 \mu x z), \\ \frac{E}{3} \Delta_2 v &= \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho \omega^2 \mu x z), \\ \frac{E}{3} \Delta_2 w &= \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho \omega^2 \mu x z). \end{aligned} \quad (32)$$

Искомыя весьма малыя смѣщенія  $u$ ,  $v$ ,  $w$  должны быть такими функціями координатъ, чтобы первыя части фор. (32) были частными производными по

координатамъ нѣкоторой функціи, чтобы вездѣ внутри массы удовлетворялось условіе (31), а на свободной поверхности тангенціальныя и нормальныя силы были равны нулю. Такъ какъ свободная поверхность въ разсматриваемомъ случаѣ весьма близка къ сферѣ радіуса  $R$ , то для всѣхъ точекъ этой сферы мы должны имѣть: скошеніе прямыхъ угловъ между радіусомъ сферы и ея касательною есть нуль и

$$\frac{2E}{3} \frac{d(\delta r)}{dr} - p = 0, \quad (33)$$

гдѣ  $\delta r$  есть проекція смѣщенія точки на ея радіусъ-векторъ  $r$ .

Мы удовлетворимъ всѣмъ упомянутымъ условіямъ положеніемъ:

$$\begin{aligned} u &= (\alpha + \beta r^2)z + \gamma x \cdot xz \\ v &= \gamma y \cdot xz \\ w &= (\alpha + \beta r^2)x + \gamma z \cdot xz \end{aligned} \quad (34)$$

гдѣ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  суть коэффиціенты, подлежащіе опредѣленію. Условіе (31) приводитъ къ уравненію:

$$xz(4\beta + 5\gamma) = 0,$$

которое удовлетворяется при

$$\beta = -\frac{5}{4}\gamma. \quad (35)$$

Для выраженія условія, характеризующаго отсут-

ствіе скошенія вышеупомянутыхъ прямыхъ угловъ, вообразимъ три весьма близкія точки  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ , изъ которыхъ первая лежитъ на концѣ радіуса  $R$ , вторая—на направленіи того же радіуса на разстояніи  $\Delta R$  отъ первой, а третья—на касательной къ шару радіуса  $R$ , параллельной плоскости  $yz$ , на разстояніи  $\Delta l$  отъ первой точки.

До смѣщенія частицъ уголъ между  $\Delta R$  и  $\Delta l$  прямой, вслѣдствіе чего

$$\begin{aligned} (x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1 - y)(y_2 - y) \\ + (z_1 - z)(z_2 - z) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Такъ какъ упомянутый уголъ долженъ остаться прямымъ и послѣ смѣщенія частицъ, то приращеніе второй части ур. (36) отъ смѣщенія частицъ должно быть нулемъ.

Напишемъ это, замѣтивъ, что проекціи по осямъ координатъ весьма малыхъ векторовъ  $\Delta l$  и  $\Delta R$  суть:

$$\begin{aligned} np_x(\Delta l) &= 0, & np_x(\Delta R) &= \Delta R \frac{x}{r}, \\ np_y(\Delta l) &= \Delta l \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}, & np_y(\Delta R) &= \Delta R \frac{y}{r}, \\ np_z(\Delta l) &= -\Delta l \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, & np_z(\Delta R) &= \Delta R \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Мы получимъ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}z - \frac{\partial u}{\partial z}y\right)x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}z - \frac{\partial v}{\partial z}y\right)y + \left(\frac{\partial w}{\partial y}z - \frac{\partial w}{\partial z}y\right)z + \\ + r\left(z\frac{\partial v}{\partial r} - y\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0. \quad (36')$$

Подставляя сюда выраженія смѣщеній изъ форм. (34), послѣ сокращенія найдемъ:

$$-xy(2(\alpha + \beta r^2) + \gamma r^2 + 2\beta r^2) = 0. \quad (36'')$$

Это условіе должно быть удовлетворено при  $r=R$ , откуда

$$2\alpha = -R^2(\gamma + 4\beta). \quad (37)$$

Если бы мы выразили, что скошеніе прямого угла между векторомъ  $\Delta R$  и векторомъ  $\Delta l'$ , параллельнымъ плоскости  $yx$ , есть нуль, то по симметріи форм. (34) относительно осей  $ox$  и  $oz$  нашли бы, что это условіе приводитъ къ такой же форм., какъ (36''), только надо будетъ  $xy$  замѣнить на  $zy$ . Такимъ образомъ условіе (37) характеризуетъ, что скошенія прямыхъ угловъ между векторомъ  $\Delta R$  и двумя векторами, прикасающимися къ сферѣ радіуса  $R$ , суть нули. Этимъ охарактеризовано, что скошенія всѣхъ прямыхъ угловъ между направленіемъ радіуса и касательными къ сферѣ суть нули, а слѣдовательно на свободной поверхности разсматриваемаго тѣла нѣтъ тангенціаль-ныхъ усилій. Чтобы показать, что на этой поверхности нѣтъ нормальныхъ усилій, мы должны оправдать ур. (33), для чего надо опредѣлить функцію  $p$ .

Прежде этого обнаружимъ, что смѣщенія, выраженные форм. (34), обращаютъ первыя части ур. (32) въ частныя производныя по координатамъ отъ нѣкоторой функціи координатъ.

Составляемъ по форм. (34) величины вторыхъ дифференціальныхъ параметровъ отъ смѣщеній:

$$\Delta_2 u = (10\beta + 2\gamma)z = \frac{\partial}{\partial x}[(10\beta + 2\gamma)xz],$$

$$\Delta_2 v = 0 = \frac{\partial}{\partial y}[(10\beta + 2\gamma)xz],$$

$$\Delta_2 w = (10\beta + 2\gamma)x = \frac{\partial}{\partial z}[(10\beta + 2\gamma)xz].$$

Мы видимъ, что указанное условіе внутри разсма- триваемаго тѣла удовлетворено и что, на основаніи формуль (32),

$$p = xz(10\beta + 2\gamma)\frac{E}{3} - \rho\omega^2\mu.$$

Это выраженіе можетъ быть на основаніи соотно- шенія (35) представлено въ такомъ простомъ видѣ:

$$p = xz\left[-\frac{7E}{2}\gamma - \rho\omega^2\mu\right]. \quad (38)$$

Чтобы составить условіе (33), надо еще опредѣлить проекцію смѣщенія на радіусъ векторъ  $r$ ; она будетъ на основаніи форм. (34) такая:

$$\delta r = [2(\alpha + \beta r^2) + \gamma r^2] \frac{xz}{r} = [2\alpha r + (2\beta + \gamma)r^3] \frac{x}{r} \cdot \frac{z}{r}. \quad (39)$$

Производная отъ этого выраженія по  $r$  берется, обращая вниманіе на то, что  $\frac{x}{r}$  и  $\frac{z}{r}$  при этомъ надо считать постоянными:

$$\frac{\partial(\delta r)}{\partial r} = [2\alpha + (3\gamma + 6\beta)r^2] \frac{xz}{r^2}.$$

Относя эту форм. къ свободной поверхности ( $r=R$ ) и воспользовавшись соотношеніями (37) и (35), получимъ:

$$\frac{\partial(\delta r)}{\partial r} = -\frac{\gamma}{2}xz. \quad (40)$$

Подстановка форм. (38) и (40) въ условіе (33) даетъ намъ:

$$\frac{xz}{R^2} \left[ \frac{19}{6} E \gamma + \rho \omega^2 \mu \right] = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\mu = -\frac{19}{6} \frac{E}{\rho \omega^2} \gamma. \quad (41)$$

Формулы (41), (35) и (37) позволяютъ намъ опредѣлить введенные въ перемѣщенія (34) коэффициенты  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ . Такъ какъ при этомъ мы удовлетворили всѣ внутреннія и граничныя условія, то рассматриваемая задача по теоріи упругости рѣшена. Для разрѣшенія вопроса о періодѣ Чендлера намъ важно будетъ найти отношеніе между малыми углами  $\nu$  :  $\mu$ .

Уголъ  $\nu$  соотвѣтствуетъ положенію радіуса вектора  $OR$ , который въ деформированномъ эллипсоидѣ имѣетъ наименьшую величину.

Мы имѣемъ по замѣнѣ въ форм. (16) угла  $\theta$  на  $\frac{\pi}{2} - \nu$

$$r = R \left( 1 - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\nu \right);$$

съ другой стороны по форм. (39), (37) и (35)

$$\delta r = \frac{5}{4} R^3 \gamma \sin 2\nu.$$

Вслѣдствіе этого радіусъ векторъ деформированнаго эллипсоида выразится такъ:

$$r + \delta r = R \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{1}{2} \left( \varepsilon \cos(2\nu) - \frac{5}{2} R^2 \gamma \sin(2\nu) \right) \right].$$

Вторая часть этой формулы будетъ имѣть наименьшую величину при

$$\varepsilon \sin 2\nu + \frac{5}{2} \gamma R^2 \cos 2\nu = 0,$$

т. е. при

$$\operatorname{tg} 2\nu = -\frac{5}{2} \frac{R^2 \gamma}{\varepsilon}.$$

Такъ какъ уголъ  $\nu$  по предположенію малъ, то эту форм. можно написать такъ:

$$\nu = -\frac{5}{4} R^2 \frac{\gamma}{\varepsilon}. \quad (42)$$

На основаніи форм. (41) и (42) искомое отноше-  
ніе угловъ можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon},$$

гдѣ

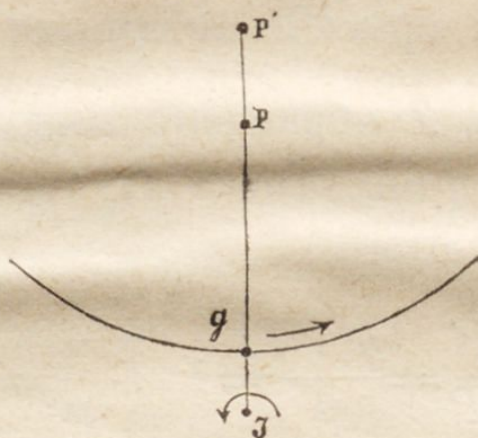
$$\varepsilon' = \frac{15R^2\omega^2\rho}{38E}. \quad (43)$$

Такъ какъ на фиг. (5) ось вращенія  $OJ$  не совпадаетъ съ осью инерціи деформированнаго эллипсоида  $OP$ , то эта ось вращенія не будетъ перманентною осью, а будетъ медленно измѣнять свое мѣсто. Съ точки зрѣнія теоріи упругости, это произойдетъ оттого, что мы удовлетворили поверхностное условіе равновѣсія только съ приближеніемъ, принимая разсматриваемую массу за сферу радіуса  $R$ . Для точнаго удовлетворенія поверхностныхъ условій на поверхности эллипсоида вращенія пришлось бы присоединить къ центробѣжнымъ силамъ инерціи, еще силы инерціи, зависящія отъ перемѣщенія въ пространствѣ мгновенной оси вращенія.

Такъ какъ эти послѣднія силы инерціи будутъ малыми величинами порядка  $\varepsilon^2$ , то мы можемъ при опредѣленіи упругихъ смѣщеній для даннаго момента времени эти силы отбрасывать, какъ это было сдѣлано выше; для рѣшенія же вопроса о движеніи въ тѣлѣ мгновенной оси вращенія мы можемъ пользоваться положеннымъ въ основаніе нашей методы изслѣдованія принципомъ неизмѣнности главнаго

момента количествъ движенія, считая, что движеніе, соотвѣтствующее упругимъ деформациямъ, даетъ исчезающій моментъ. При этомъ для всякаго найденнаго положенія оси вращенія мы будемъ воображать соотвѣтственные (по форм. 34) упругія смѣщенія

Фиг. 6.



Пусть на фиг. (6) точки:  $J$ ,  $G$ ,  $P'$  и  $P$  представляютъ соотвѣтственно точки пересѣченія: мгновенной оси вращенія, главнаго момента количествъ движенія, оси инерціи недеформированной и оси инерціи деформированной земли со сферою радіуса  $s$ , которую считаемъ соединенной съ недеформированной землей. Разсуждая какъ въ § 2, приходимъ къ заключенію, что точка  $G$  будетъ имѣть по упомянутой сферѣ движеніе со скоростью  $\omega \cdot GJ$ , перпендикулярною къ  $P'J$ , вслѣдствіе чего она будетъ описывать кругъ около точки  $P'$ , двигаясь противъ стрѣлки часовъ съ угловою скоростью

$$\frac{\omega \cdot GJ}{GP'}.$$

Время же обращенія по этому кругу будетъ:

$$T' = \frac{2\pi GP'}{\omega GJ} = \frac{2\pi GP}{\omega GJ} \cdot \frac{GP'}{GP} \\ = \frac{2\pi GP'}{\omega \varepsilon G P}.$$

При измѣреніи времени звѣздными сутками дробь  $\frac{1}{\varepsilon}$  выражаетъ время  $T$  обращенія полюса земли, считая ее абсолютно твердой. Точка  $G$  чрезвычайно близка къ  $J$ , вслѣдствіе этого

$$\frac{GP'}{GP} = \frac{JP'}{JP} = \frac{\mu + \nu}{\mu} = 1 + \frac{\nu}{\mu} = 1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Сказанное позволяет написать формулу:

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \quad (44)$$

Такимъ образомъ упругость земли удлиняетъ періодъ обращенія полюса. Такъ какъ періодъ Чендлера  $T' = 14,1$  мѣсяцамъ, а періодъ Эйлера  $T = 10$  мѣсяцамъ, то

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 0,4. \quad (45)$$

Эта формула служитъ для опредѣленія предполагаемаго модуля упругости земли  $E$ ; мы можемъ здѣсь

принять  $\varepsilon = \frac{1}{305}$  и подставить теоретическую вели-

чину  $\epsilon'$ , или же—замѣнить  $\epsilon'$  и  $\epsilon$  ихъ теоретическими величинами, дѣлая предположеніе, что неоднородность земли уменьшаетъ какъ  $\epsilon$ , такъ и  $\epsilon'$  въ одинаковое число разъ. Въ послѣднемъ предположеніи, на основаніи формулъ (22) и (43), получимъ:

$$\frac{6 R \rho g}{19 E} = 0,4. \quad (46)$$

Отсюда найдемъ величину  $E$ , близкую къ модулю упругости стали. Это согласно съ вычисленіемъ средней упругости земли, сдѣланнымъ Томсономъ на основаніи данныхъ по приливамъ и отливамъ морей.

---