

ПРОВЕРЕНО
1952

О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ.

Н. Е. Жуковскаго.

Дрозд. 1935

ПРОВЕРЕНО
945

Р/33331

§ 1. Читая обширныя теоретическія и опытыя изслѣдованія профессора Н. П. Петрова ¹⁾, мы встрѣтились съ однимъ затрудненіемъ, на которое хотимъ обратить вниманіе читателя этой замѣтки. Въ основу своей теоріи авторъ беретъ задачу о движеніи жидкаго слоя между двумя вращающимися концентрическими поверхностями круглыхъ цилиндровъ въ предположеніи, что гидродинамическое давленіе вдоль всего слоя постоянно; во всѣхъ же приложеніяхъ онъ имѣетъ дѣло съ подшипниками, въ которыхъ упомянутый слой въ нѣкоторыхъ мѣстахъ находится подъ атмосфернымъ давленіемъ, такъ что по смыслу рассматриваемаго движенія жидкости давленіе вдоль всего слоя должно быть тоже равно атмосферному давленію. Откуда же берется сила, уравнивающая давленіе шипа на подшипникъ?

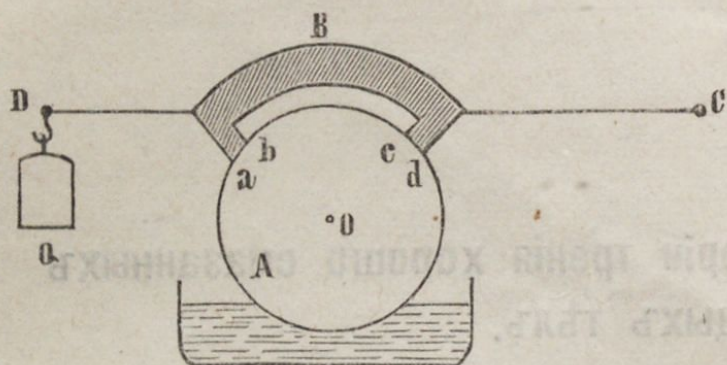
§ 2. Если предполагать, что покоящійся шипъ находится въ непосредственномъ соприкосновеніи съ подшипникомъ, и смазочный слой образуется вслѣдствіе движенія шипа, то это можетъ случиться только при такомъ движеніи жидкости, при которомъ гидродинамическое давленіе возрастаетъ при переходѣ внутрь слоя. Такое движеніе будетъ значительно отличаться отъ того, которое изслѣдуетъ профессоръ Петровъ. Оно могло бы быть получено при рассматриваніи движенія весьма тонкаго жидкаго слоя, заключеннаго между двумя неконцентрическими цилиндрическими поверх-

¹⁾ Ж. Р. Ф. Х. Общ. Т. XVI, стр. 14, 176, 294 и Т. XVII, стр. 20. Инженерный журналъ, 1883.

Извѣстія С.-Петербургскаго Технологическаго института, 1885.



ностями. Но, въ виду трудности подобной задачи, мы укажемъ здѣсь на одинъ простой случай, въ которомъ могъ бы быть объясненъ гидродинамическій напоръ, поднимающій подшипникъ. Пусть (фиг. 1) къ шипу A , обильно смазываемому масломъ, при-



Фиг. 1.

жимается подшипникъ B , посредствомъ груза Q , при-
крѣпленнаго къ концу рычага DC . Нижняя часть подшипника состоитъ изъ двухъ пришлифованныхъ къ шипу узкихъ частей ab и cd и широкой бороздки bc . Предположимъ, что эта бороздка

наполнена масломъ и шипъ приведенъ по направленію часовой стрѣлки въ быстрое вращательное движеніе; при этомъ рычагъ DC немного повернется около своей точки опоры C вверхъ, и масло, увлекаясь треніемъ, будетъ по каналу ab входить съ возрастающимъ давленіемъ въ пространство bc и утекать изъ него съ убывающимъ давленіемъ по каналу cd . Примемъ приближенно, что каналы ab и cd имѣютъ постоянныя толщины ε и ε' , находящіяся въ соотношеніи

$$\varepsilon' = \xi \varepsilon, \quad (1)$$

гдѣ ξ зависитъ отъ длины плечъ рычага, и изслѣдуемъ теченіе масла по этимъ каналамъ. Уравненія гидродинамики, отнесенныя къ полярнымъ координатамъ r и φ , имѣющимъ полюсъ въ O , и написанныя въ предположеніи, что частицы жидкости не имѣютъ скорости по r будутъ:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= \rho \frac{u^2}{r}, \\ \frac{dp}{r d\varphi} &= \mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{du}{d\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

гдѣ p гидродинамическое давленіе, ρ плотность жидкости, μ коэффициентъ внутренняго тренія, а u скорость частицы жидкости. Последнее уравненіе, полученное изъ условія несжимаемости, показываетъ, что u зависитъ только отъ r . Принимая это во вниманіе и интегрируя первое изъ ур. (2), находимъ, что

$$p = \rho \int \frac{u^2}{r} dr + q, \quad (3)$$

гдѣ q есть функція одного φ . Опредѣливъ изъ фор. (3) частную производную

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{dp}{d\varphi}$$

и подставивъ ее во второе изъ ур. (2), умножаемъ его на r и беремъ отъ обѣихъ частей частную производную по r :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = 0.$$

Отсюда получаемъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{k}{r}, \quad (4)$$

въ которомъ постоянное k не зависитъ ни отъ φ ни отъ r .

Для опредѣленія этого постояннаго k составимъ формулу гидродинамическаго давленія. Такъ какъ по ур. (4) и второму изъ ур. (2) производная $\frac{dp}{d\varphi}$ или, что все равно, производная $\frac{dq}{d\varphi}$ есть μk , то

$$q = \mu k \varphi + \text{const};$$

слѣдовательно по ур. (3)

$$p = \rho \int \frac{u^2}{r} dr + \mu k \varphi + \text{const}. \quad (5)$$

Замѣчая теперь, что въ точкѣ a давленіе жидкости равно атмосферному давленію p_0 , а въ точкѣ b оно равно нѣкоторому давленію $p_0 + p_1$, найдемъ по фор. (5):

$$k = \frac{p_1}{\mu \varphi_1}, \quad (6)$$

гдѣ φ_1 величина дуги ab въ доляхъ радіуса. Принимая $cd = ab$, найдемъ для движенія по каналу cd подобнымъ же образомъ, что

$$k = - \frac{p_1}{\mu \varphi_1}. \quad (7)$$

Отысканіе общаго интеграла ур. (4) не представляетъ никакого затрудненія; но, такъ какъ мы имѣемъ здѣсь дѣло съ весьма тонкими слоями, въ которыхъ u измѣняется очень быстро, радіусъ же r остается почти постояннымъ, то будетъ удобнѣе положить въ ур. (4) $r = a$, гдѣ a есть радіусъ шипа, и $dr = d(a + x)$. Получимъ линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{a} \frac{du}{dx} - \frac{u}{a^2} = \frac{k}{a}, \quad (8)$$

общій интегралъ котораго будетъ такой:

$$u = -ka + Ce^{\alpha x} + C_1 e^{\beta x}; \quad (9)$$

здѣсь α и β суть корни уравненія

$$z^2 + \frac{z}{a} - \frac{1}{a^2} = 0. \quad (10)$$

Для опредѣленія постоянныхъ C и C_1 надо выразить, что на поверхности шипа и подшипника силы внѣшняго тренія уравновѣшиваются тангенціальными слагающими силъ внутренняго тренія. Мы примемъ для простоты, какъ это дѣлается въ трубкахъ Пуазеля, что коэффициентъ внѣшняго тренія весьма великъ сравнительно съ коэффициентомъ внутренняго тренія, такъ что на поверхности шипа при $x=0$ положимъ $u=v$, гдѣ v скорость шипа, а на поверхности подшипника при $x=\varepsilon$ положимъ $u=0$.

Такимъ образомъ получимъ, что

$$C + C_1 = v + ka,$$

$$Ce^{\alpha\varepsilon} + C_1 e^{\beta\varepsilon} = ka,$$

откуда

$$\begin{aligned} C &= \frac{v+ka}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} e^{\beta\varepsilon} - \frac{ka}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}}, \\ C_1 &= -\frac{v+ka}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} e^{\alpha\varepsilon} + \frac{ka}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляемъ эти величины постоянныхъ въ фор. (9):

$$\begin{aligned} u &= -ka + v \frac{e^{\beta\varepsilon+\alpha x} - e^{\alpha\varepsilon+\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} + \\ &+ ka \left\{ \frac{e^{\beta\varepsilon} e^{\alpha x} - e^{\alpha\varepsilon} e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} - \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Разлагаемъ въ этой формулѣ первую дробь до членовъ нулевого порядка относительно малыхъ величинъ ε и x :

$$\frac{e^{\beta\varepsilon+\alpha x} - e^{\alpha\varepsilon+\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} = \frac{(\beta-\alpha)\varepsilon - (\beta-\alpha)x}{(\beta-\alpha)\varepsilon} = 1 - \frac{x}{\varepsilon};$$

вторую же дробь мы разложимъ до членовъ втораго порядка относительно ε и x , такъ какъ будемъ принимать въ послѣдствіи k за большую величину порядка $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\beta\varepsilon} e^{\alpha x} - e^{\alpha\varepsilon} e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} &= \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} + \\ + \frac{\varepsilon(\beta e^{\alpha x} - \alpha e^{\beta x}) + \frac{\varepsilon^2}{2}(\beta^2 e^{\alpha x} - \alpha^2 e^{\beta x}) + \frac{\varepsilon^3}{6}(\beta^3 e^{\alpha x} - \alpha^3 e^{\beta x})}{\varepsilon(\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon^2}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{\varepsilon^3}{6}(\beta^3 - \alpha^3)} &= \\ = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} + 1 - \alpha\beta \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha\beta\varepsilon x}{2}. \end{aligned}$$

Такъ какъ по ур. (10)

$$\alpha\beta = -\frac{1}{a^2},$$

то

$$\frac{e^{\beta\varepsilon} e^{\alpha x} - e^{\alpha\varepsilon} e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} - \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{e^{\beta\varepsilon} - e^{\alpha\varepsilon}} = \frac{1}{2a^2}(x^2 - \varepsilon x) + 1.$$

Подставляя найденныя величины дробей въ фор. (12), найдемъ для скорости u слѣдующее простое выраженіе:

$$u = v - \frac{vx}{\varepsilon} + \frac{kx^2}{2a} - \frac{k\varepsilon x}{2a}. \quad (13)$$

Пользуясь этою формулою, легко опредѣлить силу тренія на поверхности шипа $ab=s$:

$$F = -\mu \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=0} s = \left(\frac{\mu v}{\varepsilon} + \frac{k\mu\varepsilon}{2a} \right) s, \quad (14)$$

а также и количество масла, протекающее чрезъ разрѣзъ канала ab :

$$Q = \int_0^\varepsilon u dx = \frac{v\varepsilon}{2} - \frac{k\varepsilon^3}{12a}. \quad (15)$$

Для полученія же аналогичныхъ формулъ для канала cd мы должны будемъ замѣнить ε на ε' и перемѣнить знакъ при k .

Принимая во вниманіе фор. (1) и замѣчая, что количество масла, притекающее по каналу ab , должно равняться количеству масла, утекающаго по каналу cd , найдемъ изъ фор. (15) соотношеніе:

$$v(1-\xi) = \frac{k}{6a} (1+\xi^3)\varepsilon^2, \quad (16)$$

изъ котораго слѣдуетъ, что толщина слоя ε будетъ:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{6(1-\xi)}{1+\xi^3}} \sqrt{\frac{av}{k}},$$

Подставляемъ сюда величину k изъ фор. (6) и полагаемъ:

$$\sqrt{\frac{6(1-\xi)}{1+\xi^3}} = \eta, \quad a\varphi_1 = s;$$

получаемъ:

$$\varepsilon = \eta \sqrt{\frac{\mu s v}{p_1}}. \quad (17)$$

Входящій въ эту формулу избытокъ p_1 гидродинамическаго давленія надъ атмосфернымъ опредѣляется по моменту груза Q и моменту силы тренія относительно центра C . Пренебрегая малымъ моментомъ силы тренія передъ весьма большимъ моментомъ груза Q , можемъ написать

$$p_1 = nQ,$$

гдѣ n есть нѣкоторое постоянное, зависящее отъ устройства рычага CD .

Полная сила тренія на окружности шипа, на основаніи фор. (14) и аналогичной формулы для канала cd , будетъ:

$$F = \frac{\mu v}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) s + \frac{k\mu\varepsilon}{2a} (1-\xi) s$$

или по фор. (16)

$$F = \frac{\mu v s}{\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{\xi} + \frac{3(1-\xi)(1-\xi)}{1+\xi^3}\right].$$

Подставивъ сюда величину ε изъ фор. (17) и положивъ для сокращенія письма, что

$$\frac{1}{\eta} \left[1 + \frac{1}{\xi} + \frac{3(1-\xi)(1-\xi)}{1+\xi^3}\right] = \zeta$$

найдемъ окончательно:

$$F = \zeta \sqrt{\mu s v p_1}. \quad (18)$$

§ 3. Перейдемъ къ предположенію, что покоющійся шипъ, не смотря на большую силу, прижимающую его къ подшипнику, отдѣленъ отъ него во всѣхъ своихъ точкахъ смазочнымъ слоемъ. Отсутствіе металлическаго соприкосновенія шипа и подшипника, могло бы быть здѣсь объяснено только образованіемъ въ смазочномъ слоеѣ большого гидростатическаго давленія отъ дѣйствія молекулярныхъ силъ. Представивъ это гидростатическое давленіе чрезъ $p_0 + p_1$, гдѣ p_0 выражаетъ по прежнему атмосферное давленіе, а p_1 будетъ, вообще говоря, нѣкоторая функція мѣста, мы можемъ рѣшить задачу о движеніи жидкости въ нашемъ слоеѣ при вращеніи шипа слѣдующимъ образомъ: сперва обинтегрировать урав-

ненія гидродинамики, принимая гидродинамическое давленіе равнымъ p_0 и пренебрегая дѣйствіемъ молекулярныхъ силъ; потомъ принять, что найденное движеніе жидкости имѣетъ мѣсто при молекулярныхъ силахъ, измѣнивъ въ немъ только давленіе изъ p_0 на $p_0 + p_1$. Эта точка зрѣнія совпадаетъ, по нашему мнѣнію, съ теоріею профессора Петрова.

Изъ сравненія своей формулы силы тренія съ опытами Кирхвегера и Терстона онъ принялъ въ первомъ приближеніи

$$\varepsilon \sqrt{p_1} = const, \quad (19)$$

гдѣ ε толщина слоя ¹⁾. Если бы эта эмпирическая формула оправдалась бы и при болѣе тщательныхъ опытахъ, то для рѣшенія вопроса о треніи оставалось бы только опредѣлить величину *const* въ зависимости отъ постоянныхъ капиллярности вещества масла, шина и подшинника; но, къ сожалѣнію, при болѣе тщательныхъ опытахъ оказалось ²⁾, что ε зависитъ не только отъ статическихъ условій шина и подшинника, но и отъ v и μ , что уже противорѣчитъ взгляду, принятому въ основаніе этого параграфа. Другое дѣло будетъ при динамическомъ образованіи смазывающаго слоя, какъ это видно изъ фор. (17), дающей при постоянныхъ μ , v и s тоже соотношеніе между ε и p_1 , какъ формула (19). Кромѣ этого не слѣдуетъ забывать, что, допуская гидростатическое давленіе, поддерживающее шипъ, мы входимъ въ новую неизслѣдованную область молекулярныхъ явленій, такъ какъ всѣ изученныя до сихъ поръ явленія имѣютъ свое объясненіе въ поверхностныхъ натяженіяхъ жидкости, а для тѣлъ, вполнѣ погруженныхъ въ жидкость, доказывается законъ Архимеда, принимая во вниманіе дѣйствіе молекулярныхъ силъ ³⁾. Правда, это доказательство не приложимо, когда тѣло приближается къ дну сосуда на разстояніе, при которомъ, по мнѣнію Пуассона, молекулярныя силы измѣняютъ плотность жидкости, но будетъ ли такова толщина смазочнаго слоя, которая въ различныхъ опытахъ, описанныхъ въ послѣдней книжкѣ профессора Петрова, измѣняется отъ 0,5 до 0,001 миллиметра?

¹⁾ Ж. Р. Ф. Х. Общ. Т. XVI, стр. 17.

²⁾ Извѣстія С.-Петербургск. Технологическаго института, 1885, стр. 330.

³⁾ Давидовъ, Теорія капиллярныхъ явленій, Москва 1851 г. § 38.

