

P 133332

KIV-400

НЕ ВЫД

ПРОЧЕНО
1946

О

ГИРОСКОПИЧЕСКОМЪ ШАРЪ

Д. К. БОБЫЛЕВА.

Н. Е. Жуковскаго.

Отд. оттискъ изъ VI тома Трудовъ Отд. Физ. Наукъ Императорскаго
Общества Любителей Естествознанія, Антропологии и Этнографіи



МОСКВА.

Типографія М. Г. Волчанинова, Б. Черныш. п., д. Пустошкина,
противъ Англійской церкви.

1893.

1

Провер. 1935

О гироскопическомъ шарѣ Д. К. Бобылева.

Н. Е. Жуковского.

✓ (Сообщено въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 1893 г. февраля 16).

§ 1. Въ прошломъ году профессоръ Д. К. Бобылевъ далъ рѣшеніе интересной механической задачи: о движеніи безъ скольженія по горизонтальной плоскости полаго шара съ гироскопомъ внутри *). При этомъ ему удалось выразить съ помощію эллиптическихъ трансцендентныхъ отъ времени всѣ параметры, опредѣляющіе положеніе прибора, и изслѣдовать видъ кривыхъ, которыя описываетъ точка опоры шара по плоскости. Эти кривыя Д. К. воспроизводилъ опытно, заставляя устроенный имъ (для механическаго кабинета Петербургскаго университета) гироскопическій шаръ катиться по плоскости, покрытой порошкомъ ликоподія.

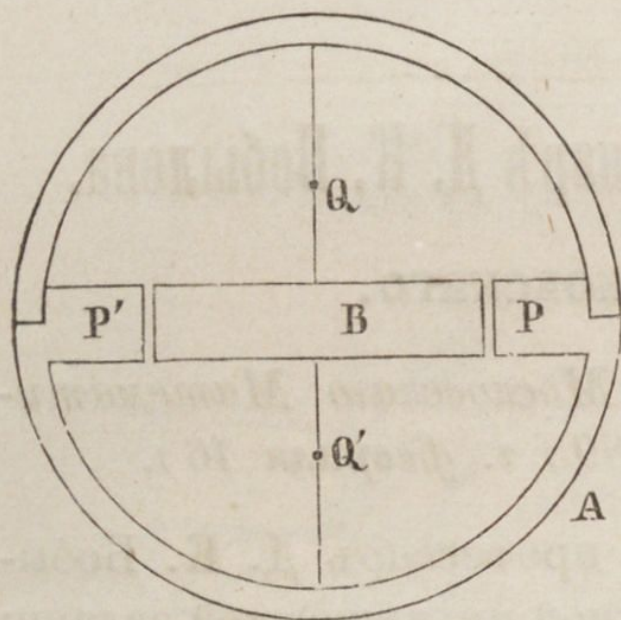
Аналогичный приборъ былъ еще раньше построенъ въ Москвѣ А. Х. Репманомъ (для Политехническаго музея), который тоже изслѣдовалъ опыт-

*) Д. К. Бобылевъ. „О шарѣ съ гироскопомъ внутри, катящимся по горизонтальной плоскости безъ скольженія“. Математическій Сборникъ, т. XVI, вып. 3, 1892 г.



нымъ путемъ движенія, производимыя имъ при катаніи по горизонтальной и наклонной плоскости.

Въ обоихъ упомянутыхъ приборахъ гироскопъ *B* (фиг. 1) занимаетъ центральное положеніе внутри



Фиг. 1.

оболочки *A*, представляющей концентрической сферической слой, и на первый взглядъ кажется, что такой видъ оболочки долженъ соотвѣтствовать простѣйшему случаю движенія прибора. Но такое заключеніе несправедливо.

Въ этой статьѣ мы имѣемъ въ виду показать, что анализъ движенія гироскопическаго шара значительно упрощается, когда къ его сферической оболочкѣ *A* прибавлено изнутри нѣкоторое кольцо *PP'*, экваторіальная плоскость котораго перпендикулярна оси гироскопа и проходитъ чрезъ его центръ, а размѣры подобраны такъ, что разность моментовъ инерціи кольца относительно оси гироскопа и относительно перпендикулярной оси, проходящей чрезъ центръ прибора, равна моменту инерціи гироскопа относительно этой послѣдней оси. Если предположимъ, что кольцо *PP'* есть цилиндрическое внѣшняго радіуса *c*, внутренняго радіуса *b* и высоты $2e$, то найдемъ для опредѣленія размѣровъ кольца соотношеніе:

$$\frac{1}{2} \pi r e (c^4 - b^4) - \frac{2}{3} \pi r e^3 (c^2 - b^2) = m \delta^2, \quad (1)$$

гдѣ ρ плотность кольца, m масса гироскопа, а δ его радіусъ инерціи около оси, перпендикулярной къ оси вращенія.

Предполагая, что гироскопъ сдѣланъ изъ того же вещества, какъ кольцо, и представляетъ цилиндръ высоты $2e$ и радіуса основанія немного меньшаго b , можемъ положить:

$$m\delta^2 = \frac{1}{2} \pi \rho b^4 e.$$

Подставляя эту величину въ вышенаписанную формулу, получаемъ:

$$\left(\frac{e}{c}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{b}{c}\right)^4}{\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2\right)} \dots\dots\dots (2)$$

По этой формулѣ мы можемъ опредѣлить толщину кольца $2e$, задавшись остальными размѣрами его.

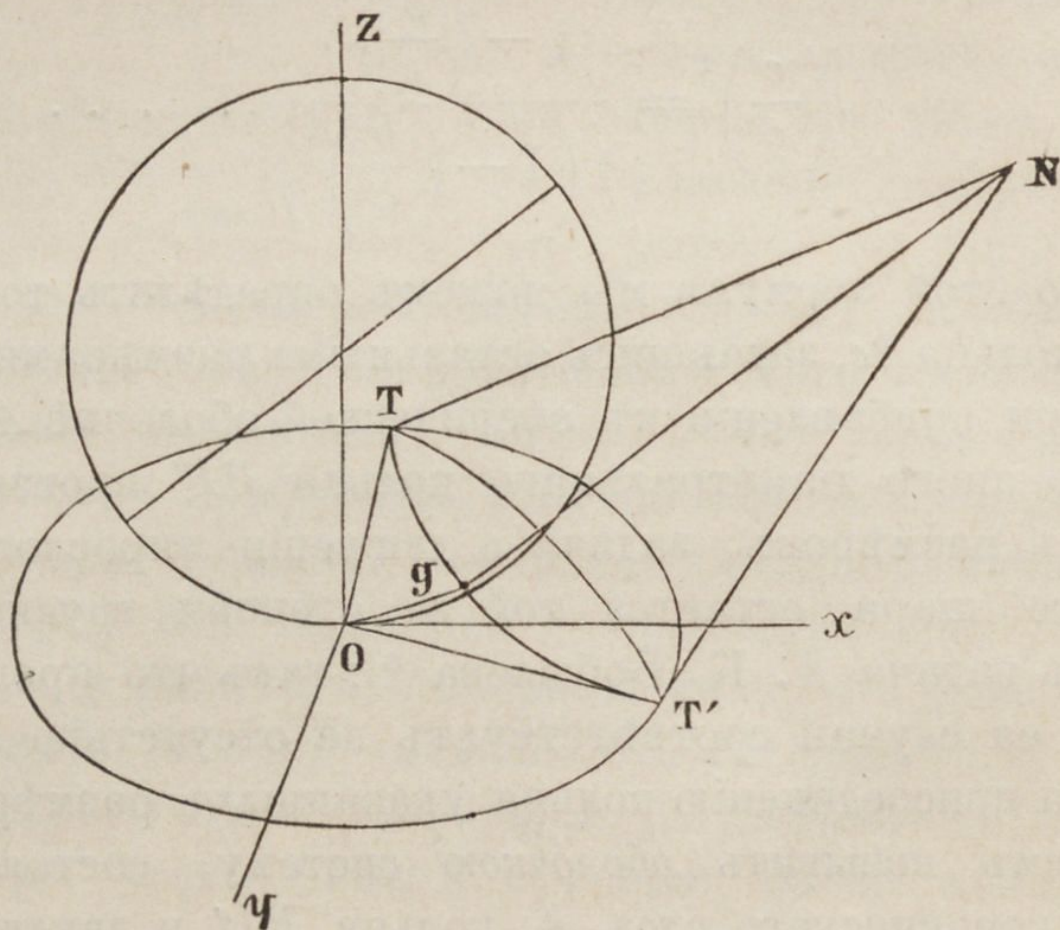
При прибавленіи къ сферической оболочкѣ A всякаго иного діаметральнаго кольца PP' произвольныхъ размѣровъ, задача о движеніи гироскопическаго шара остается той же степени трудности, какъ задача Д. К. Бобылева *); такъ что простѣйшій ея случай соотвѣтствуетъ не отсутствію кольца, а присоединенію кольца указанныхъ размѣровъ. Будемъ называть оболочкою систему, состоящую изъ сферическаго слоя A , кольца PP' и двухъ матеріальныхъ точекъ Q и Q' , имѣющихъ массы $\frac{m}{2}$ и помѣщенныхъ на оси гироскопа на разстояніяхъ

*) Можно показать, что при этомъ въ формулахъ Д. К. измѣняются только постоянныя величины.

δ отъ его центра. Легко усмотрѣть, что при кольцѣ, сдѣланномъ указаннымъ выше способомъ, *эллипсоидъ инерціи оболочки относительно центра прибора есть шаръ*.

Останавливаясь на этомъ случаѣ, будемъ обозначать: массу оболочки (т. е. массу всего прибора) черезъ M , ея радіусъ инерціи относительно всякой центральной оси — чрезъ k , радіусъ же инерціи гироскопа относительно его оси вращенія — чрезъ k' .

§ 2. Вообразимъ (фиг. 2) движущіяся поступательно прямоугольныя оси координатъ x, y, z , начало



Фиг. 2.

которыхъ O постоянно совпадаетъ съ точкою прикосновенія гироскопическаго шара съ горизонтальною плоскостью, а ось Oz постоянно направлена чрезъ центръ прибора по вертикали вверхъ.

Такъ какъ гироскопическій шаръ катится по плоскости безъ скольженія, то угловая скорость ω его оболочки должна проходить чрезъ точку O . Называя чрезъ p, q, r проэкцію ω на оси x, y, z , чрезъ ω' проэкцію угловой скорости гироскопа на его ось и черезъ a наружный радіусъ гироскопическаго шара, найдемъ, что двойная живая сила всего прибора будетъ:

$$M(k^2r^2 + (k^2 + a^2)(p^2 + q^2)) + mk'^2\omega'^2.$$

Эта живая сила должна оставаться постоянною, потому что высота центра тяжести прибора не измѣняется, а сила тренія, вслѣдствіе неподвижности во всякій моментъ времени ея точки приложенія, работы не производитъ.

Съ другой стороны, такъ какъ никакая пара не вращаетъ гироскопъ B около его оси, то ω' есть величина постоянная. Отсюда слѣдуетъ, что *живая сила оболочки во время движенія гироскопическаго шара не измѣняется.*

Называя двойную величину этой живой силы чрезъ h , имѣемъ:

$$k^2r^2 + (k^2 + a^2)(p^2 + q^2) = \frac{h}{M}. \quad (3)$$

Пусть L будетъ векторъ, отлагаемый на оси гироскопа и имѣющій постоянную величину $mk'^2\omega'$, а L_1, L_2, L_3 —проэкціи этого вектора на оси координатъ.

Назовемъ чрезъ X и Y проэкціи на оси Ox и Oy силы тренія, развивающейся въ точкѣ опоры гироскопическаго шара, и напомнимъ извѣстныя уравненія динамики, относящіяся къ движенію центра

тяжести и измѣненію момента количествъ движенія относительно центра тяжести:

$$\frac{d}{dt} (Mqa) = X,$$

$$\frac{d}{dt} (-Mpa) = Y,$$

$$\frac{d}{dt} (Mk^2p + L_1) = aY,$$

$$\frac{d}{dt} (Mk^2q + L_2) = -aX,$$

$$\frac{d}{dt} (Mk^2r + L_3) = 0.$$

Исключая изъ этихъ формулъ X и Y , получаемъ уравненія:

$$\frac{d}{dt} (M(k^2 + a^2)p + L_1) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (M(k^2 + a^2)q + L_2) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} (M(k^2 r + L_3) = 0,$$

которая показываетъ, что главный моментъ количествъ движенія относительно точки опоры всего гироскопическаго шара не измѣняется по величинѣ и направленію во время его движенія.

Будемъ разсматривать векторъ OG , представляющій главный моментъ количествъ движенія оболочки относительно точки O , и назовемъ чрезъ x, y, z координаты его конца, такъ что

$$x = M(k^2 + a^2)p,$$

$$y = M(k^2 + a^2)q,$$

$$z = M k^2 r.$$

(5)

Опредѣливъ отсюда p , q , r и подставивъ въ ур. (3), получимъ:

$$\frac{x^2 + y^2}{k^2 + a^2} + \frac{z^2}{k^2} = Mh. \quad (6)$$

Это уравненіе показываетъ, что точка G во время движенія гироскопическаго шара перемѣщается относительно осей x , y , z по эллипсоиду вращенія, подобному ираціонному эллипсоиду оболочки прибора, построенному для точки O .

Теперь легко отыскать конусы, по которымъ будутъ перемѣщаться векторы OG и L относительно нашей подвижной системы осей координатъ *). Построивъ (фиг. 2) неизмѣненный векторъ ON , представляющій главный моментъ количествъ движенія всего гироскопическаго шара, описываемъ изъ точки N , какъ изъ центра, сферу радіусомъ $NG = L$ и опредѣляемъ кривую TT' , по которой эта сфера пересѣчетъ эллипсоидъ, данный уравненіемъ (6). На кривой TT' , какъ на направляющей, построимъ два конуса TOT' и TNT' , имѣющіе вершины въ точкахъ O и N . По первому изъ этихъ конусовъ будетъ перемѣщаться векторъ OG . Если же перенесемъ второй конусъ поступательно такъ, чтобы его вершина перешла въ центръ гироскопа, то получимъ мѣсто оси гироскопа относительно нашей подвижной системы осей координатъ.

*) Употребляемый здѣсь методъ изслѣдованія аналогиченъ тому, который былъ примѣненъ нами къ рѣшенію задачи о движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки съ гироскопомъ внутри. Журналъ Русскаго физико-химическаго общества, Т. XVII, стр. 193, 1885.

§ 3. Опредѣлимъ уравненія проэкцій кривой TT' на плоскости xz и yz . Предположимъ, для простоты, что неизмѣнный векторъ ON лежитъ въ плоскости zx и назовемъ его длину чрезъ N , а уголъ который онъ образуетъ съ осью Ox чрезъ θ .

Уравненіе построенной нами сферы будетъ:

$$y^2 = L^2 - (x - Ncs\theta)^2 - (z - Nsn\theta)^2. \quad (7)$$

Подставляя эту величину y^2 въ форм. (6), получаемъ:

$$x = \alpha - \gamma (z - \beta)^2, \quad (8)$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{1}{2Ncs\theta} \left\{ N^2 \left(1 + \frac{k^2}{a^2} sn^2\theta \right) - L^2 + Mh (k^2 + a^2) \right\},$$

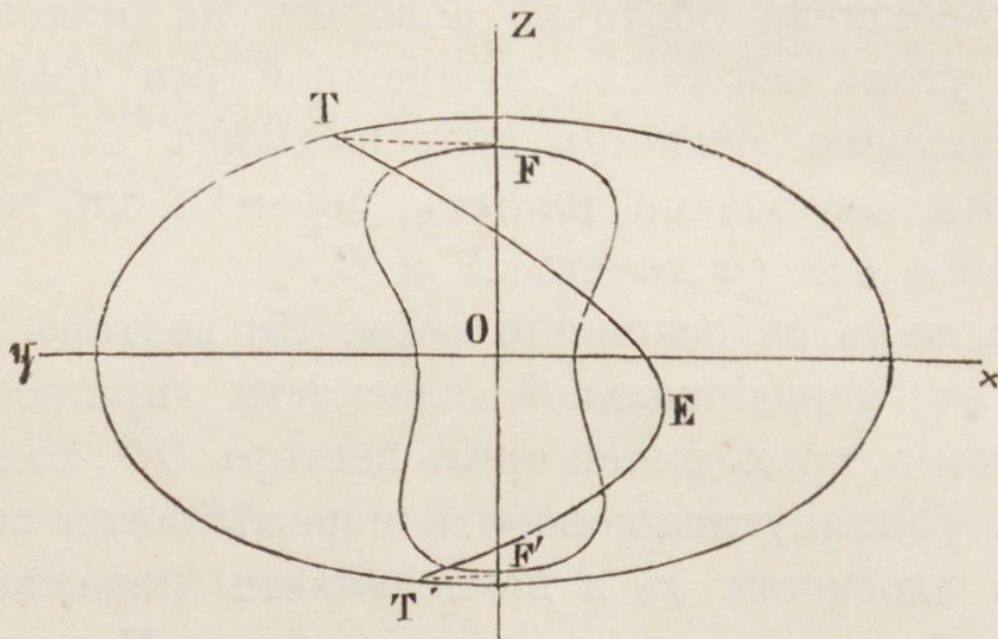
$$\beta = -N \frac{k^2}{a^2} sn\theta, \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{a^2}{2 N k^2 cs\theta}.$$

Уравненіе (8) показываетъ, что проэкція кривой TT' на плоскость xz есть парабола (фиг. 3), ось которой параллельна оси Ox . Эта парабола имѣетъ вершину E въ точкѣ (α, β) и направлена при $\theta < \frac{\pi}{2}$ выпуклою стороною въ положительную сторону оси Ox . Внося величину x изъ форм. (8) въ форм. (7), выразимъ y^2 нѣкоторымъ многочленомъ четвертой степени отъ z , старшій членъ котораго будетъ отрицательная величина $-\gamma^2 z^4$. Называя корни, обращающіе этотъ многочленъ въ нуль, чрезъ e_1, e_2, e_3, e_4 , представляемъ уравненіе проэкціи разсматриваемой кривой на плоскость yz въ видѣ:

$$y^2 = -\gamma^2 (e_1 - z) (e_2 - z) (e_3 - z) (e_4 - z). \quad (10)$$

Легко усмотрѣть, что корни e_1, e_2, e_3, e_4 будутъ координаты z точекъ пересѣченія параболы (8) съ эллипсомъ, представляющимъ меридіональное сѣченіе гираціоннаго эллипсоида, которое мы будемъ



Фиг. 3.

для краткости называть гираціоннымъ эллипсомъ. Если корни $e_1 > e_4$ будутъ дѣйствительны, а e_2 и e_3 будутъ мнимыя сопряженныя величины, то полученная кривая четвертаго порядка будетъ имѣть видъ овала, какъ это представлено на фигурѣ (3), на которой плоскость yz совмѣщена съ плоскостью xz . При $e_2 = e_4 = 0$ овалъ переходитъ въ восьмерку, а при $e_1 > e_2 > e_3 > e_4$ дѣйствительныхъ получаютъ два замкнутые контура.

§ 4. Опредѣлимъ теперь для всякаго времени координаты x, y, z точки G , причемъ на основаніи формулъ (5) найдутся также и величины p, q, r .

Такъ какъ ось гироскопа, на которой мы откладываемъ векторъ L , занимаетъ въ оболочкѣ неизмѣнное мѣсто, то измѣненіе компонента L_1 мы мо-

жемъ опредѣлять такъ: переносимъ векторъ L параллельно самому себѣ изъ центра прибора въ положеніе GN (фиг. 2) и считаемъ его въ этомъ положеніи неизмѣнно соединеннымъ съ оболочкою; потомъ сообщаемъ оболочкѣ поворотъ на бесконечно малый уголъ ωdt около мгновенной оси вращенія и составляемъ разность происшедшихъ отъ этого поворота бесконечно малыхъ перемѣщеній по направленію оси Oz точекъ N и G .

Такъ какъ на основаніи форм. (5) векторъ ω лежитъ въ меридіональной плоскости гираціоннаго эллипсоида, проходящей чрезъ векторъ OG , то точка G отъ упомянутаго поворота перемѣщается параллельно плоскости xy и не получаетъ перемѣщенія по оси Oz ; все же перемѣщеніе точки N вдоль оси Oz происходитъ отъ составляющей угловой скорости q . Поэтому

$$dL_1 = -Ncs\theta q dt.$$

Подставляя сюда

$$L_1 = Ncs\theta - z,$$

находимъ:

$$\frac{dz}{dt} = Ncs\theta q \quad (11)$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Ncs\theta}{M(k^2 + a^2)} y.$$

Внося въ эту послѣднюю формулу величину y изъ ур. (10) и опредѣляя t , получаемъ:

$$t = \pm \frac{2Mk^2(k^2 + a^2)}{a^2} \int \frac{dz}{\sqrt{(e_1 - z)(e_2 - z)(e_3 - z)(z_4 - e)}}. \quad (12)$$

Такимъ образомъ выражается t по z ; формулы же (8) и (10) даютъ намъ величины x и y по z .

§ 5. Переходимъ къ опредѣленію координатъ ξ, η точки опоры O относительно неподвижныхъ осей $O'\xi, O'\eta$, проведенныхъ по рассматриваемой горизонтальной плоскости изъ нѣкотораго начала O' параллельно осямъ Ox и Oy .

Мы имѣемъ:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= aq, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -ap.\end{aligned}\tag{13}$$

На основаніи первой изъ этихъ формулъ и формулы (11) находимъ, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a}{Ncs\theta} \frac{dz}{dt}.$$

Интегрируемъ:

$$\xi = \frac{a}{Ncs\theta} z + const.\tag{14}$$

Такимъ образомъ разстояніе точки O отъ оси $O'\eta$ зависитъ линейно отъ высоты точки G надъ горизонтальною плоскостью. Такъ какъ точка G перемѣщается по кривой TT' (фиг. 2) и періодически измѣняетъ свою высоту отъ высоты точки T' до высоты точки T , то траекторія точки O должна быть заключена между двумя прямыми, параллельными оси $O'\eta$ и отстоящими другъ отъ друга на разстояніе, равное проеціи хорды TT' на ось Oz , умноженной на

$$\frac{a}{Ncs\theta}.$$

Представляя вторую формулу (13) въ видѣ:

$$\frac{d\eta}{dt} = - \frac{a}{M(a^2 + k^2)} x \quad (15)$$

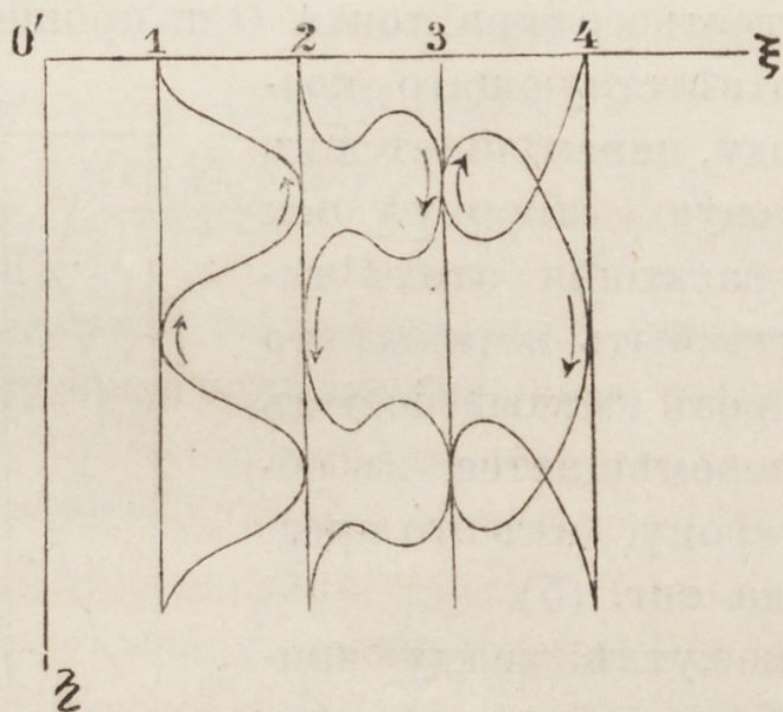
и подставляя сюда величину x изъ форм. (8), выразимъ разсматриваемую производную чрезъ z . Если же замѣнимъ dt величиною, взятою изъ форм. (12), и, раздѣливъ переменныя, совершимъ интеграцію, то выразимъ η по z . Отсюда на основаніи ур. (14) будемъ имѣть связь между η и ξ , т. е. составимъ уравненіе траекторіи точки O .

О формѣ упомянутой траекторіи мы можемъ имѣть представленіе и не прибѣгая къ составленію ея уравненія. Мы сказали на основаніи ур. (14), что эта траекторія будетъ заключена между двумя прямыми, параллельными оси $O'\eta$. На основаніи ур. (15) заключаемъ, что между двумя этими прямыми она будетъ идти, соприкасаясь поочередно то къ той, то къ другой изъ нихъ и будетъ каждаими двумя точками прикосновенія къ одной изъ прямыхъ разбиваться на тождественныя части. Для дальнѣйшаго сужденія о видѣ траекторіи служитъ парабола (8). Траекторія точки O будетъ принадлежать къ одному изъ трехъ типовъ, смотря по расположенію отръзка TT' упомянутой параболы (фиг. 3) въ гираціонномъ эллипсѣ. (Если кривая четвертаго порядка, данная ур. 10, представляетъ два замкнутые контура, то мы считаемъ за TT' отръзокъ параболы, соотвѣтствующій одному контуру).

Первый типъ будетъ имѣть мѣсто, когда весь отръзокъ параболы TT' заключенъ въ правой половинѣ гираціоннаго эллипса. Въ этомъ предположе-

ніи x будетъ имѣть только положительныя значенія. Координата η , согласно форм. (15), будетъ постоянно убывать. Траекторія точки O изобразится волнообразною кривою (фиг. 4), заключенною между параллелями (1) и (2). Такая же траекторія будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ, когда весь упомянутый отръзокъ параболы TT' лежитъ въ правой половинѣ гираціоннаго эллипса; но въ этомъ случаѣ движеніе точки O по траекторіи будетъ совершаться въ сторону, обратную той, которая указана на фигурѣ стрѣлкою.

Второй типъ траекторій получается, если отръзокъ TT' лежитъ въ двухъ половинахъ гираціоннаго эллипса такъ, что оба конца его въ лѣвой половинѣ, а середина въ правой (какъ это изображено на фиг. 3). Идя въ этомъ случаѣ по отръзку



Фиг. 4.

параболы отъ T къ T' , мы будемъ имѣть: сначала отрицательныя значенія x , потомъ положительныя, потомъ опять отрицательныя. Отсюда по форм. (15)

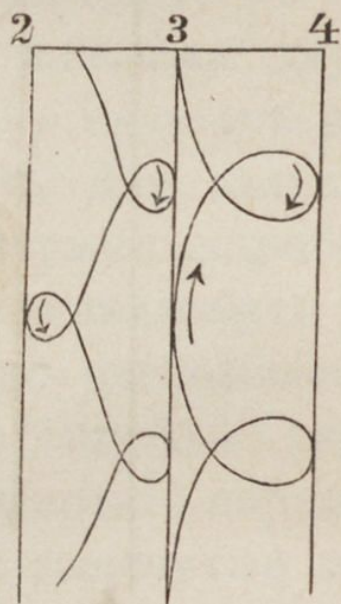
координата η будетъ: сначала увеличиваться, потомъ убывать, а потомъ опять увеличиваться. Траекторія точки O будетъ имѣть видъ кривой, заключенной на фиг. (4) между параллелями (2) и (3).

Третій типъ траекторій получается, когда отрѣзокъ TT' лежитъ однимъ своимъ концомъ T въ лѣвой половинѣ гираціоннаго эллипса, а другимъ T' —въ правой. Идя по рассматриваемому отрѣзку параболы отъ T къ T' , мы будемъ имѣть: сначала отрицательныя значенія x , а потомъ положительныя. Координата η будетъ: сперва возрастать, а потомъ убывать. Траекторія точки O представитъ линію съ послѣдовательными петлями и будетъ имѣть видъ кривой, заключенной на фиг. (4) между параллелями (3) и (4).

На фигурѣ (4), перемѣщаясь по траекторіямъ второго и третьяго типа, точка O по прошествіи времени, соотвѣтствующаго полному періоду, перемѣщается въ положительную сторону оси $O\eta$. Но траекторіи этихъ типовъ могутъ быть и такія, что точка O чрезъ каждый періодъ времени перемѣщается въ обратную сторону, какъ это представлено на фиг. (5).

Въ промежуткѣ между кривыми, изображенными на фиг. (4) и (5), получается во второмъ типѣ замкнутая 8-образная кривая, а въ третьемъ типѣ—замкнутый овалъ.

§ 6. Дадимъ обстоятельное рѣшеніе нашей задачи



Фиг. 5.

въ томъ случаѣ, когда $\theta = 0$. Это будетъ имѣть мѣсто, на примѣръ, въ томъ случаѣ, когда мы поставимъ ось вращающагося гироскопа горизонтально и приведемъ шаръ въ движеніе съ помощію какого-нибудь горизонтальнаго импульса. Такъ какъ по форм. (9) въ сдѣланномъ предположеніи $\beta = 0$, то вершина параболы (8) будетъ лежать на оси Ox , и корни e_1, e_2, e_3, e_4 будутъ попарно равны и противоположны по знаку:

$$e_1 = -e_4, \quad e_2 = -e_3.$$

Если вершина параболы лежитъ внутри эллипса, то e_2 и e_3 будутъ чисто мнимыя сопряженные величины. Если же эта вершина лежитъ внѣ эллипса, то e_2 и e_3 будутъ равныя и противоположныя по знаку дѣйствительныя величины.

Остановливаясь на первомъ случаѣ, положимъ:

$$e_1 = -e_4 = e, \quad e_2 = -e_3 = \varepsilon \sqrt{-1}$$

и представимъ ур. (12) въ видѣ:

$$t = -\frac{2Mk^2(k^2 + a^2)}{a^2} \int \frac{dz}{\sqrt{(e^2 - z^2)(\varepsilon^2 + z^2)}}.$$

Этотъ эллиптическій интегралъ приводится къ нормальному интегралу перваго вида подстановкою:

$$z = e \operatorname{cs} \varphi. \quad (16)$$

Мы получаемъ:

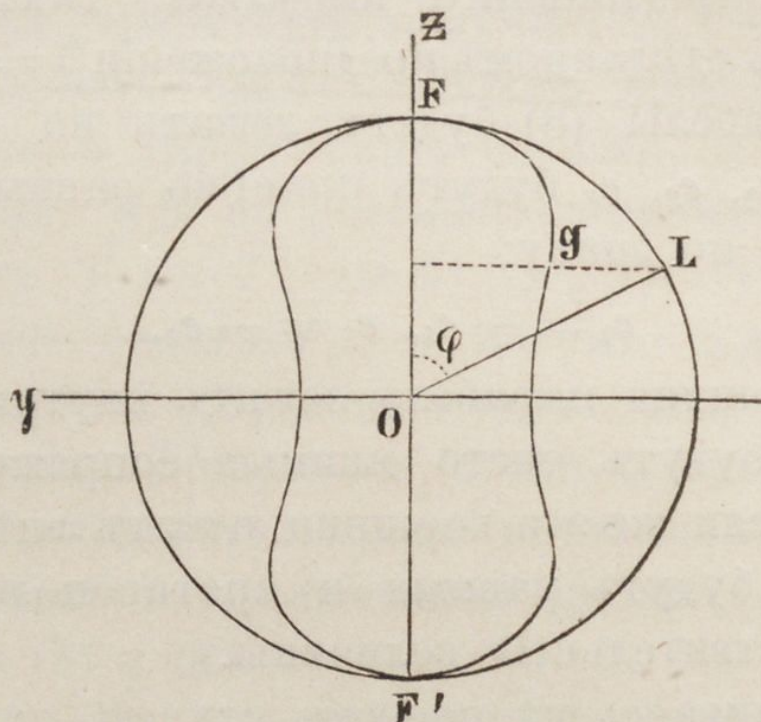
$$\nu t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, \quad (17)$$

гдѣ

$$\nu = \frac{a^2 \sqrt{e^2 + \varepsilon^2}}{2Mk^2(k^2 + a^2)}, \quad (18)$$

$$\lambda^2 = \frac{e^2}{e^2 + \varepsilon^2}.$$

Введенный подстановкою (16) аргументъ φ имѣетъ слѣдующее геометрическое значеніе. Опишемъ около кривой (10) кругъ радіусомъ e (фиг. 6) и построимъ для даннаго мѣста точки g (мы называемъ



Фиг. 6.

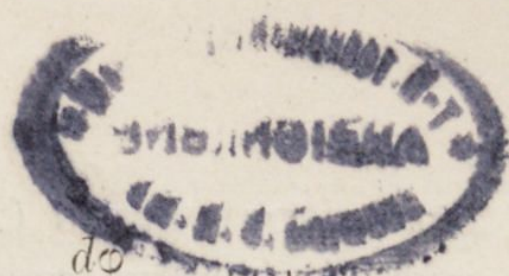
такъ проэкцію на плоскость yz точки G) соотвѣтственную точку круга L , имѣющую ту же координату z , тогда уголъ LOF будетъ представлять уголъ φ . При измѣненіи угла φ отъ 0 до π точка g проходитъ по своему пути отъ F до F' , а время возрастаетъ на величину:

$$t = \frac{2}{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}}, \quad (19)$$

соотвѣтствующую полуперіоду.

На основаніи формулъ (14), (15), (17) и (8) координаты ξ и η выражаются по углу φ уравненіями:

$$\xi = \operatorname{const} + \frac{ae}{N} \operatorname{cs} \varphi, \quad (20)$$



$$\frac{M(a^2 + k^2)}{a} \gamma_1 = A \left(- B \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} + \right. \\ \left. + \int_0^\varphi \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} d\varphi \right) + \text{const},$$

гдѣ

$$A = \frac{\gamma e^2}{\lambda^2 \nu}, \quad (21)$$

$$B = 1 + \lambda^2 \left(\frac{\alpha}{\gamma e^2} - 1 \right).$$

Формулы (20) и (21) показываютъ, что въ раз-
сматриваемомъ случаѣ траэкторія принадлежитъ къ
первому типу, если α отрицательно или если при
положительномъ α имѣеть мѣсто неравенство:

$$\alpha > \gamma e^2;$$

если же при положительномъ α имѣеть мѣсто обрат-
ное неравенство, то траэкторія принадлежитъ ко
второму типу. Опредѣляя корень e и обращая вни-
маніе на форм. (9), придемъ къ заключенію, что
второй типъ будетъ имѣть мѣсто, если L^2 заключенъ
между предѣлами:

$$N^2 + Mh(k^2 + a^2) > L^2 > N^2 + Mhk^2; \quad (22)$$

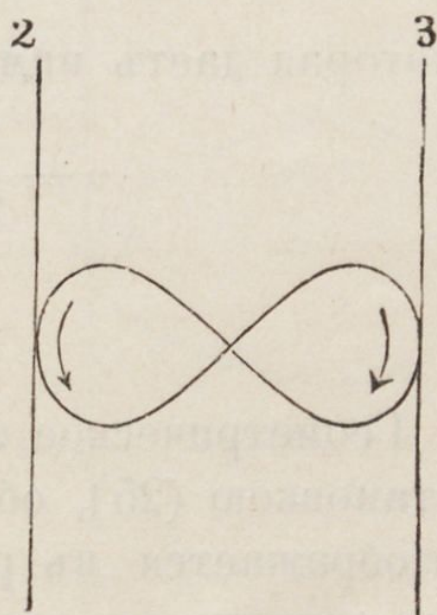
первый же типъ будетъ имѣть мѣсто, если L^2 лежитъ внѣ
этихъ предѣловъ.

При

$$L^2 = N^2 + Mhk^2 \quad (23)$$

получается траэкторія съ точ-
ками возврата на обѣихъ парал-
леляхъ, представляющая пере-
ходную кривую между первымъ
и вторымъ типомъ.

Предполагая, что удовлетво-



Фиг. 7.

133332

рено неравенство (22), мы можемъ найти замкнутую 8-образную траекторію (фиг. 7) подъ условіемъ:

$$B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} d\varphi \quad (24)$$

Если зададимся величиною λ , то опредѣлимъ изъ форм. (24) по таблицамъ полныхъ эллиптическихъ интеграловъ перваго и втораго вида величину B . Зная же λ и B по форм. (21) и (18), найдемъ одну пару значеній L и N , при которыхъ данный гироскопическій шаръ описываетъ восмерку.

Когда всѣ четыре корня дѣйствительны и

$$e_1 = -e_4 = e, \quad e_2 = -e_3 = \varepsilon,$$

тогда ур. (12) получаетъ видъ:

$$t = -\frac{2Mk^2(k^2 + a^2)}{a^2} \int \frac{dz}{\sqrt{(e^2 - z^2)(z^2 - \varepsilon^2)}}.$$

Этотъ эллиптическій интегралъ приводится къ нормальному интегралу перваго вида подстановкою:

$$z^2 = e^2 - (e^2 - \varepsilon^2) \operatorname{sn}^2 \varphi, \quad (25)$$

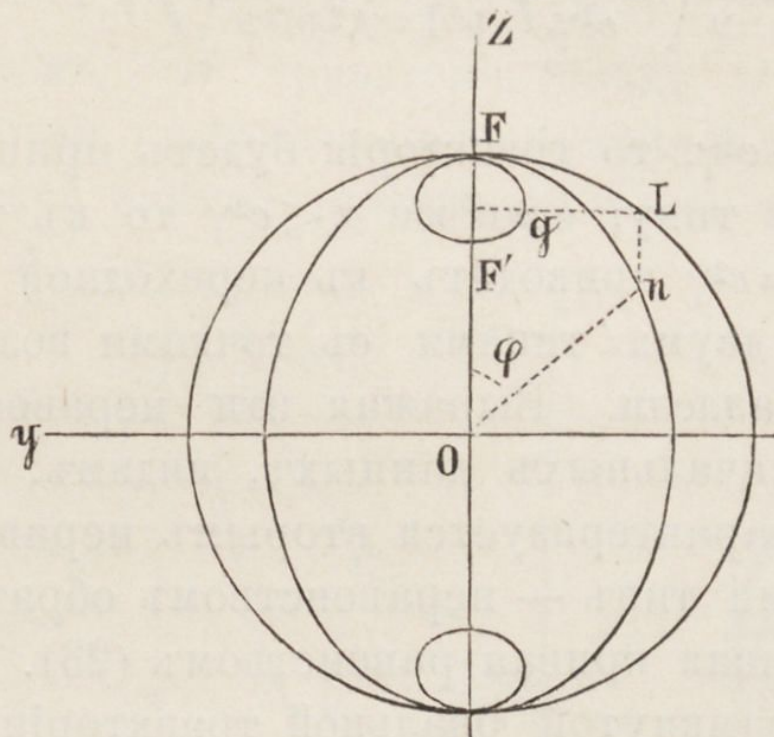
которая даетъ намъ уравненіе (17) при

$$\nu = \frac{ea^2}{2Mk^2(k^2 + a^2)}, \quad (26)$$

$$\lambda^2 = \frac{e^2 - \varepsilon^2}{e^2}.$$

Геометрическое значеніе угла φ , введеннаго подстановкою (25), объяснено на фиг. (8). Кривая (10) изображается въ рассматриваемомъ случаѣ двумя симметричными овалами. Принявъ точку O за центръ,

описываемъ изъ нея окружность радіусомъ e и эллипсъ, большая ось котораго направлена по оси Oz и равна e , а малая направлена по Oy и равна $e\lambda$. Проводимъ изъ точки g параллель оси Oy до пере-

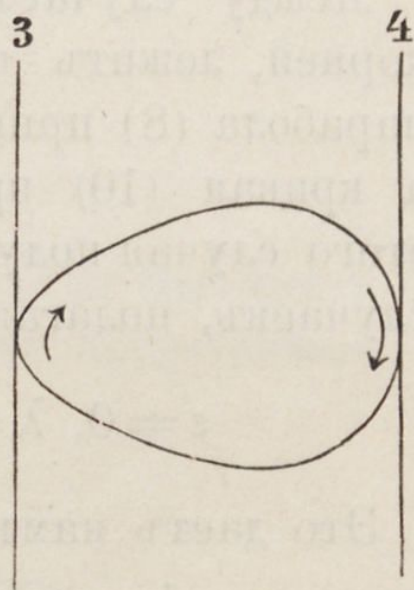


Фиг. 8.

сѣченія съ окружностью въ точкѣ L , потомъ проводимъ изъ точки L параллель оси Oz до пересѣченія съ эллипсомъ въ точкѣ n .

Уголъ nOF и будетъ представлять аргументъ φ . При возрастаніи φ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка g проходитъ отъ F къ F' и время возрастаетъ на величину полу-періода, который будетъ выраженъ фор. (19) безъ множителя 2.

Опредѣляя ξ и η по углу φ , находимъ для рассматриваемаго случая:



Фиг. 9.

$$\xi = const + \frac{ae}{N} \sqrt{1 - \lambda^2 sn^2 \varphi}, \quad (27)$$

$$\frac{M(a^2 + k^2)}{a} \eta = \frac{e^2 \gamma}{\nu} \left(-\frac{\alpha}{e^2 \gamma} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 sn^2 \varphi}} + \int_0^\varphi \sqrt{1 - \lambda^2 sn^2 \varphi} d\varphi \right).$$

Если $\alpha > e^2 \gamma$, то траэкторія будетъ принадлежать къ первому типу; если же $\alpha < e^2 \gamma$ то къ третьему. Случай $\alpha = e^2 \gamma$ приводитъ къ переходной траэкторіи между двумя типами съ точками возврата на одной параллели. Выражая эти неравенства съ помощью начальныхъ данныхъ, видимъ, что третій типъ характеризуется вторымъ неравенствомъ (22), первый типъ — неравенствомъ обратнымъ, а промежуточная кривая равенствомъ (23).

Случай замкнутой овальной траэкторіи (фиг. 9) въ третьемъ типѣ находится изъ уравненія:

$$\frac{\alpha}{e^2 \gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 sn^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \lambda^2 sn^2 \varphi} d\varphi, \quad (28)$$

Между случаемъ мнимыхъ и дѣйствительныхъ корней, лежитъ случай $e_2 = e_3 = 0$, при которомъ парабола (8) прикасается къ гираціонному эллипсу, а кривая (10) представляетъ восмерку. Анализъ этого случая получается изъ формулъ предыдущихъ случаевъ, полагая въ нихъ:

$$\varepsilon = 0, \quad \lambda = 1, \quad \nu = \frac{ca^2}{2Mk^2(a^2 + k^2)}.$$

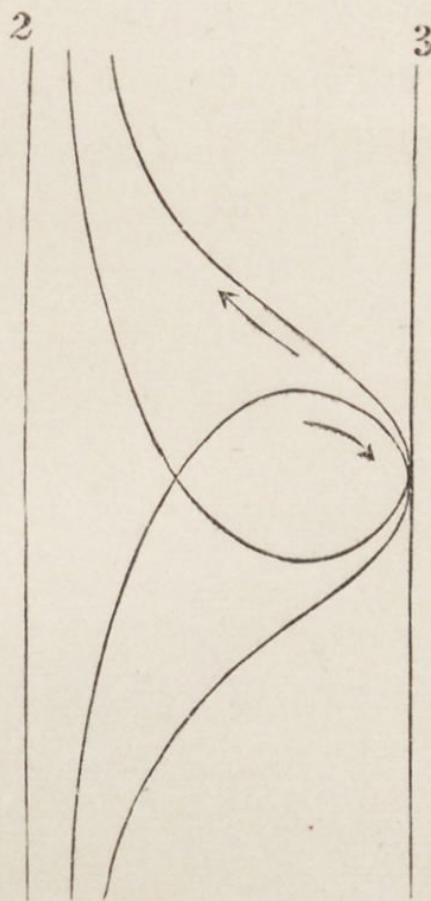
Это даетъ намъ:

$$t = \frac{1}{\nu} \int \frac{d\varphi}{cs\varphi} = \frac{1}{\nu} \lg ctg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (29)$$

$$\xi = \text{const} + \frac{ae}{N} \text{cs}\varphi, \quad (30)$$

$$\frac{M(a^2+k^2)}{a} \eta = \frac{e^2\gamma}{v} \left\{ -\frac{\alpha}{e^2\gamma^2} \lg \text{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \text{sn}\varphi \right\}.$$

Мы видимъ, что траекторія точки O (фиг. 10), идя отъ точки прикосновенія на правой параллели, приближается асимптотически къ лѣвой параллели.



Фиг. 10.

При этомъ, смотря потому будемъ ли мы имѣть $\alpha > e^2\gamma$ или $\alpha < e^2\gamma$, траекторія будетъ представлять одну волну или одну петлю.



Сочиненія Н. Е. Жуковского:

1. Кинематика жидкаго тѣла.
2. Случай движенія жидкой площади по инерціи.
3. Sur la percussion des corps.
4. Къ вопросу о наибольшемъ ударѣ.
5. Sur un cas particulier de mouvement d'un point matérielle.
6. Связь между вопросамъ о движеніи матерьяльной точки и о равновѣсіи гибкой нити.
7. Къ вопросу о движеніи матерьяльной точки подѣ притяженіемъ одного и двухъ центровъ.
8. Описаніе инструмента Кемпе для рѣшенія уравненій высшихъ степеней.
9. О реакціи втекающей и вытекающей жидкости.
10. О прочности движенія.
11. О вліяніи колебаній штатива на время качанія маятника.
12. О характеристическихъ функціяхъ Якоби и Гамильтона.
13. Приложение теоріи центровъ ускореній высшихъ порядковъ къ направляющему механизму Чебышева.
14. Упрощенное изложеніе Гауссова способа опредѣленія планетныхъ орбитъ.
15. Объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ въ жидкости.
16. О графическомъ рѣшеніи основнаго уравненія при вычисленіи планетныхъ орбитъ.
17. Геометрическое разъясненіе нѣкоторыхъ вопросовъ теоріи уравненій съ частными производными.
18. О началѣ наименьшаго дѣйствія.
Sur le principe de la moindre action.
19. Sur une démonstration nouvelle du théorème de Lambert.
20. Sur la construction des courbes syndynamiques et synchroniques.
21. Рѣшеніе одной задачи изъ теоріи кометъ.
22. Выводъ основныхъ формулъ теоріи упругости.
23. Объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ.
24. Объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ (статья вторая).
25. О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородною капельною жидкостью. (Удостоено Московскимъ Университетомъ въ 1886 г. премія профессора Брашмана).
26. О реакціи втекающей и вытекающей жидкости (статья вторая).
27. О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ тѣлъ.
28. О движеніи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями.
29. Элементарная теорія гироскоповъ.

30. Теоретическое изслѣдованіе о движеніи подпочвенныхъ водъ.
 31. О вліяніи давленія на насыщенные водою пески.
 32. О формѣ судовъ.
 33. Объ артиллерійскихъ снарядахъ Шапеля.
 34. Ueber den mittelwerth des kinetischen Potentials.
 35. Къ теоріи летанія.
 36. Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа для опредѣленія движенія жидкости въ двухъ измѣреніяхъ при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока.
 37. О парадоксѣ Дюбуа.
 38. Приборъ для опредѣленія коэффиціента вязкости маслъ.
 39. Sur un appareil nouveau pour la determination des moments de l'inertie des corps.
 40. Условія конечности интеграловъ уравненія $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$.
 41. О пареніи птицъ.
 42. Опредѣленіе движенія жидкости при какомъ-нибудь условіи, данномъ на линіи тока.
 43. Локсодромическій маятникъ Гесса.
 44. О гироскопическомъ шарѣ Д. К. Бобылева.
-