# АНАЛОГІЯ ДВУХЪ ЗАДАЧЪ МЕХАНИКИ.

## Рѣчь Н. Е. Жуковскаго.

Мм. Гг.

Обыкновенно думаютъ, что цѣль математическаго изслѣдованія явленія природы заключается въ вычисленіи всѣхъ величинъ, характеризующихъ это явленіе, и когда достиженіе этой цѣли превышаетъ средства математическаго анализа, тогда изслѣдованіе даннаго явленія природы считается недоступною математическою задачею. Но я полагаю, что такой взглядъ на значеніе математическаго изслѣдованія явленій природы слишкомъ узокъ. Кромѣ возможности вычислять величины, характеризующія явленіе, математическій анализъ устанавливаетъ связь между этими величинами, знакомитъ насъ съ ходомъ явленія и его особенностями, а иногда позволяетъ усмотрѣть математическую аналогію двухъ явленій, которыя по своей физической природѣ могутъ быть совершенно различны.



Установленіе математической аналогіи между двумя явленіями приноситъ нашему знакомству съ ними пользу съ двухъ сторонъ. Мы можемъ, на основаніи найденной аналогіи, всѣ разрѣшенныя задачи въ одной области физическихъ явленій преобразовать въ соотвѣтственныя задачи въ другой и получить такимъ образомъ рѣшеніе послѣднихъ. Съ другой стороны, если одно изъ двухъ математически аналогичныхъ явленій сложно и трудно наблюдаемо, а другое можетъ быть осуществлено на простомъ приборѣ, позволяющимъ измѣрять параметры, характеризующіе явленіе, то опытное изученіе второго явленія можетъ расширить наше знакомство съ первымъ, несмотря на то, что оба явленія могутъ представлять неразрѣшимую математическую задачу.

О такого рода двухъ математически аналогичныхъ задачахъ механики я буду имѣть честь сдѣлать сообщенiе въ этомъ торжественномъ засѣданiи.

Одна задача является обобщенiемъ задачи о движенiи физическаго маятника. Она заключается въ изслѣдованiи движенiя тяжелаго твердаго тѣла, радiусы инерцiи котораго относительно точки опоры имѣютъ какiя-нибудь величины $\lambda$, $\mu$, $\nu$ и центръ тяжести котораго находится на оси, соотвѣтствующей радiусу $\nu$. При центрѣ тяжести въ точкѣ опоры это есть задача Пуансо: при $\lambda=\mu$ эта задача разрѣшена Лагранжемъ, а при $\mu=\nu=\lambda\sqrt{2}$ она рѣшена С. В. Ковалевскою. Въ послѣднее время появилось нѣсколько частныхъ рѣшенiй этой задачи въ различныхъ случаяхъ, данныхъ Бобылевымъ, Стекловымъ, Горячевымъ и Чаплыгинымъ; таковы случаи $\nu=\lambda\sqrt{2}$ при произвольномъ $\mu$, и $\mu=\nu=2\lambda$.

Другая задача есть задача теорiи упругости о равновѣсiи упругихъ прутьевъ, ущемленныхъ съ одного конца и подверженныхъ съ другого конца дѣйствiю силы и пары силъ. Эта задача занимала ученыхъ съ давнихъ поръ. Эйлеръ [1]) и Лагранжъ [2]) разобрали различные виды плоской эластической кривой. Ванцель [3]) показалъ, что при дѣйствiи пары силъ на конецъ прута кругового сѣченiя послѣднiй принимаетъ видъ винтовой линiи. Коши и Пуассонъ, а затѣмъ Ляме пытались обосновать рѣшенiе задачи о равновѣсiи упругихъ прутьевъ на общихъ формулахъ теорiи упругости. Но эта цѣль была вполнѣ достигнута только Кирхгоффомъ [4]), который въ своемъ замѣчательномъ сочиненiи «О равновѣсiи и движенiи весьма тонкаго упругаго прута» показалъ, какое мѣсто занимаетъ задача о равновѣсiи упругихъ прутьевъ въ общей теорiи упругости. Кирхгоффомъ была указана интересующая насъ аналогiя. Но, къ сожалѣнiю, анализъ Кирхгоффа слишкомъ сложенъ и хотя

---

[1]) *Euler*. „Additamentum de curvis elasticis". Methodus inveniendi... 1744.

[2]) *Lagrange*. „Sur la force des ressorts pliés". Académie de Berlin, 1769.

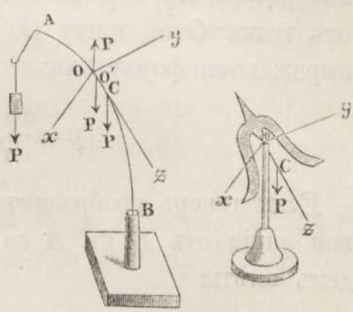
[3]) *Wantzell*. Comptes rendus, t. XVII, 1844.

[4]) *Kirchhoff*. „Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes". Borchardt's Journal, Bd. 56. 1858.

онъ и былъ упрощенъ въ сочиненіяхъ Клебша и Бусиненска[1]), но мнѣ кажется, что причина вышеупомянутой аналогіи остается и до сихъ поръ нѣсколько закрытою сложными формулами задачи, а между тѣмъ ее можно указать съ чрезвычайною простотою.

Вообразимъ (фиг. 1) упругій прутъ $AB$, ущемленный въ неподвижной стойкѣ своимъ концомъ $B$ и подверженный съ другого конца $A$ дѣйствію нѣкоторой силы $P$ и пары. Пусть $\sigma$ будетъ перпендикулярное сѣченіе прута, постоянное по всей его длинѣ, а $\lambda$ и $\mu$ пусть будутъ главные радіусы инерціи площади этого сѣченія относительно осей, проходящихъ по его плоскости чрезъ центръ его тяжести. Кромѣ этого, будемъ еще разсматривать величину $\nu$, выражающую, согласно теоріи Сенвенана, моментъ силъ крученія прута около касательной къ его осевой линіи съ помощію формулы $E\sigma\nu^2 r$, гдѣ $E$ модуль упругости, а $r$ уголъ крученія на единицу длины прута, и замѣтимъ, что согласно указанію профессора А. П. Соколова

Фиг. 1.




$$\lambda^2+\mu^2>\nu^2. \tag{1}$$

Принявъ начало координатъ въ центрѣ $O$ перпендикулярнаго сѣченія деформированнаго прута, направимъ ось $OZ$ по касательной осевой линіи въ сторону точки $B$, а оси $OX$ и $OY$ направимъ по осямъ, которымъ соотвѣтствуютъ радіусы инерціи $\lambda$ и $\mu$. Тогда примѣненіе анализа Сенвенана [2]) о крученіи и сгибаніи призмъ къ элементу прута, заключенному между двумя смежными сѣченіями, приведетъ насъ къ слѣдующимъ выра-

[1]) *Boussinesq.* „Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres". Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1871.

[2]) Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch, traduite par Barré de Saint—Venant. Paris 1883, p. 422.

женіямъ моментовъ силъ упругости, развивающихся въ сѣченіи $\sigma$, которымъ оканчивается часть прута $AO$:

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathrm{E}\,\sigma\,\lambda^2 p, \\ G_2 &= \mathrm{E}\,\sigma\,\mu^2 q \\ G_3 &= \mathrm{E}\,\sigma\,\nu^2 r \end{aligned} \tag{2}$$

Входящія сюда величины $p$, $q$ и $r$ по безконечно малымъ поворотамъ $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ осей координатъ $xyz$ при ихъ переходѣ отъ точки $O$ въ точку $O'$ на элементъ дуги $ds$ осевой линіи, выражаются формулами:

$$p = \frac{d\varphi}{ds},\ q = \frac{d\psi}{ds},\ r = \frac{d\theta}{ds}. \tag{3}$$

Если теперь вообразимъ, что точка $O$ перемѣщается по осевой линіи отъ $B$ къ $A$ со скоростью равной единицѣ, то будемъ имѣть:

$$ds = dt, \tag{4}$$

и форм. (3) представятъ намъ проекціи на подвижныя оси координатъ $xyz$ угловой скорости вращенія этихъ осей.

Предположимъ, что нашъ упругій прутъ, кромѣ неравенства (1) удовлетворяетъ еще условію:

$$\lambda^2 - \mu^2 < \nu^2 \tag{5}$$

и вообразимъ рядомъ съ нимъ твердое тѣло (фиг. 1) массы $\mathrm{E}\sigma$, опирающееся на неподвижную точку $O$ и имѣющее относительно ея главные радіусы инерціи $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

Если это тѣло движется такъ, что его оси, соотвѣтствующія упомянутымъ радіусамъ инерціи, постоянно остаются параллельными вышеуказаннымъ подвижнымъ осямъ на упругомъ прутѣ, то проекція на эти оси главнаго момента количествъ движенія $G$ выразится формулами (2).

Докажемъ, что *такое движеніе разсматриваемаго твердаго тѣла можетъ быть получено отъ дѣйствія на него силы равной и параллельной силѣ $P$ и приложенной на оси $z$ на разстояніи единицы длины отъ $O$.*

Измѣненія проекцій $G_1$. $G_2$, $G_3$, на оси координатъ главнаго момента количествъ движенія $G$ разсматриваемаго тѣла, происходятъ отъ двухъ причинъ: во-первыхъ, отъ измѣненія направленія осей вслѣдствіе вращеній $p$, $q$, $r$ и, во-вторыхъ, вслѣдствіе измѣненія въ пространствѣ самаго вектора $G$. Что касается до послѣдняго измѣненія, то оно заключается въ геометрическомъ приращеніи вектора $G$ на умноженный на $dt$ линейный моментъ силы $P$ относительно точки $O$. Какія же причины вліяютъ на измѣненіе величинъ $G_1$, $G_2$, $G_3$ въ упругомъ прутѣ при передвиженіи сѣченія прута изъ точки $O$ въ безконечно близкую точку $O'$ на разстояніе $ds=dt$ по осевой линіи? Упругія силы, дѣйствующія въ сѣченіи $\sigma$, проходящемъ чрезъ точку $O$, уравновѣшиваются силою, приложенною въ точкѣ $A$, и парою; вслѣдствіе этого геометрическая сумма момента этой силы относительно точки $O$ и момента пары даетъ векторъ, равный и противоположный вектору $G$ (компоненты вектора $G$ суть $G_1$, $G_2$, $G_3$).

При указанномъ выше движеніи осей $xyz$, переносящихъ во время $dt=ds$ свое начало изъ точки $O$ въ $O'$, проекціи $G_1$, $G_2$, $G_3$ будутъ измѣняться отъ двухъ причинъ: во-первыхъ, оттого что оси координатъ получатъ повороты на углы $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ и, во-вторыхъ, оттого что самъ векторъ $G$ прирастетъ на моментъ пары $(P,-P)$ съ плечомъ $ds$. Это послѣднее безконечно-малое геометрическое приращеніе можетъ быть представлено умноженымъ на $ds$ линейнымъ моментомъ силы $P$, приложенной въ точкѣ $C$ на оси $OZ$ на разстояніи единицы длины отъ $O$.

Такъ какъ измѣненіе вектора $G$ отъ обѣихъ указанныхъ причинъ въ обѣихъ разсматриваемыхъ задачахъ одинаково, то желаемое доказано.

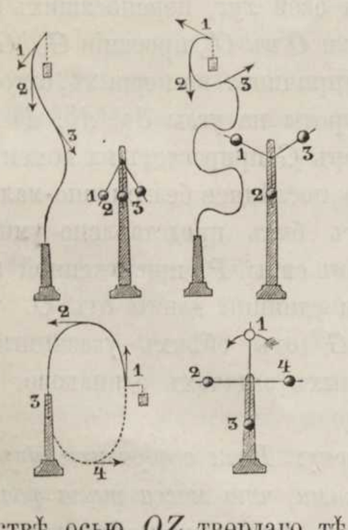
Мы получаемъ слѣдующую теорему: *Если вообразить упругій прутъ и твердое тѣло такими, что масса тѣла равна* $\sigma E$ *и величины* $\lambda$, $\mu$, $\nu$ *для тѣла и для прута одинаковы, и допустить, что въ точкѣ тѣла $C$, лежащей на оси $OZ$ на единицѣ разстоянія отъ опоры $O$, приложена сила, равная и параллельная силѣ, приложенной къ свободному концу прута, другой конецъ котораго ущемленъ, если, кромѣ этого, дать* *осямъ xyz въ тѣлѣ положеніе параллельное осямъ xyz на концѣ прута и сообщить тѣлу начальную скорость такъ, чтобы главный моментъ количествъ движенія тѣла былъ равенъ, но прямо противоположенъ моменту пары, дѣйствующей на конецъ прута, то послѣдующія положенія осей инерціи тѣла во время его движенія отъ дѣйствія силы P будутъ даны положеніями осей xyz на прутѣ, начало которыхъ отстоитъ отъ свободнаго конца прута на разстояніе s=t.*

Сдѣлаемъ теперь на основаніи установленной теоремы сравненіе нѣкоторыхъ задачъ изъ области обоихъ разсматриваемыхъ явленій.

Начнемъ съ задачи Эйлера о плоской эластической кривой. Этой задачѣ аналогична задача о колебаніи математическаго маятника.

На фиг. (2) представлены три вида эластической кривой, соотвѣтствующіе колебанію маятника: при размахѣ меньшемъ $\pi$, при размахѣ, заключенномъ между $\pi$ и $2\pi$, и при непрерывномъ вращеніи. Соотвѣтственныя касательныя прута и положенія маятника означены на нашей фигурѣ одинаковыми цифрами.

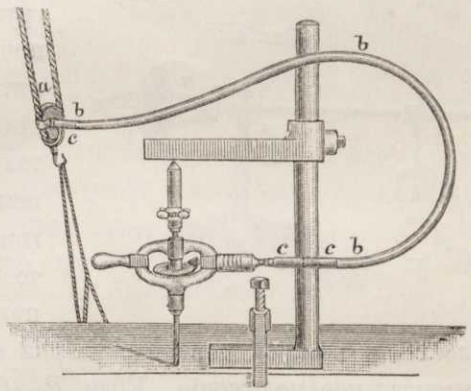
Фиг. 2.



Задача о формѣ прута, на конецъ котораго дѣйствуетъ только одна пара силъ, аналогична случаю *Пуансо* движенія твердаго тѣла по инерціи. Проведя изъ неподвижной точки $O$ прямыя, параллельныя послѣдовательнымъ касательнымъ прута, будемъ имѣть конусъ, описываемый въ пространствѣ осью $OZ$ твердаго тѣла. Для случая $\lambda=\mu$ на основаніи задачи динамики заключаемъ, что этотъ конусъ долженъ быть круглый, а отсюда приходимъ къ оправданію вывода Ванцеля, что прутъ круговаго сѣченія получаетъ подъ дѣйствіемъ одной пары форму винтовой линіи.

Если на конецъ прута кругового сѣченія, кромѣ пары, дѣйствуетъ еще сила, то задача о его равновѣсіи аналогична задачѣ Лагранжа о движеніи гироскоповъ. Хорошо изученныя, разнообразныя движенія гироскоповъ могутъ дать намъ интересныя разъясненія различныхъ случаевъ равновѣсія упругихъ прутьевъ кругового сѣченія. Четвертый интегралъ въ задачѣ Лагранжа, выражающій постоянство проекціи главнаго момента количествъ движенія на ось гироскопа, выражаетъ постоянство момента силъ упругости около осевой линіи изогнутаго и скрученнаго прута. Это обстоятельство служитъ объясненіемъ передачи вращательной силы съ помощію упругихъ изогнутыхъ осей, какъ это указано на особомъ видѣ сверла, представленнаго на фиг. (3).

Фиг. 3.



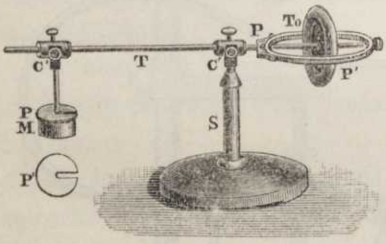

Припомнимъ устройство гироскопа Плюкера фиг. (4). Центры гироскопическаго тора $T_0$ опираются на края кольца $PP'$, придѣланнаго къ рычагу $T$, могущему поворачиваться около горизонтальной и около вертикальной оси. Гирька М, скользящая по рычагу, даетъ возможность передвинуть центръ тяжести системы направо или налѣво. Въ первомъ случаѣ, приведя торъ въ быстрое вращеніе противъ часовой стрѣлки (для наблюдателя, глядящаго отъ гироскопа къ концу рычага) и предоставивъ систему дѣйствію тяжести, мы получаемъ вращеніе рычага противъ часовой стрѣлки для наблюдателя, глядящаго сверху, и гироскопическій эффектъ, мѣшающій гироскопу падать внизъ [1]); во второмъ случаѣ, при томъ же направленіи вращенія гироскопическаго тора, мы получаемъ вращенія рычага по

[1]) При этомъ будетъ происходить мелкая и весьма быстрая нутація при періодически измѣняющейся процессіи.

часовой стрѣлкѣ и гироскопическій эффектъ, не пускающій гироскопъ подниматься вверхъ.

Аналогично гироскопу Плюкера я построилъ аппаратъ, относящійся къ теоріи равновѣсія упругихъ прутьевъ (фиг. 6a). Конецъ упругаго прута ущемленъ въ тискахъ такъ, что ущемленная часть прута горизонтальна. На другомъ концѣ согнуто колѣно подъ прямымъ угломъ къ пруту, которое при разгрузкѣ прута располагается горизонтально. Конецъ колѣна обремененъ грузомъ $P$, а къ углу колѣна прикрѣпляется вертикальная нить (съ помощію кольца надѣтаго на прутъ), перекинутая черезъ блокъ и обремененная на своемъ концѣ другимъ грузомъ $Q$. Если $Q=P$, то прутъ находится только подъ дѣйствіемъ пары силъ,

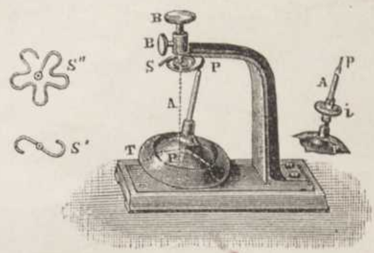
Фиг. 4.



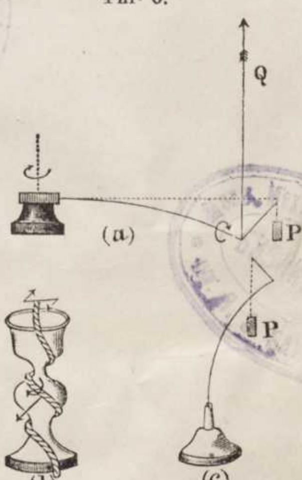

плоскость которой перпендикулярна его еси, и сохраняетъ горизонтальное положеніе. Если $P>Q$, то конецъ прута находится подъ дѣйствіемъ силы $P-Q$, направленной внизъ, и подъ дѣйствіемъ пары $(P,-P)$, вращающей по часовой стрѣлкѣ (пара же силъ упругости дѣйствуетъ противъ часовой стрѣлки); при этомъ свободный конецъ прута опускается немного внизъ, и прутъ закручивается около вертикальной линіи, проходящей чрезъ тиски, по часовой стрѣлкѣ. Если же взять $P<Q$, то конецъ прута будетъ находиться подъ дѣйствіемъ той же пары $(P,-P)$, но сила $Q-P$, на него дѣйствующая, будетъ направлена вверхъ; при этомъ упомянутый конецъ поднимется вверхъ, и прутъ закрутится около вертикали противъ часовой стрѣлки. Сообразуясь съ установленною нами общею теоремою, заключаемъ, что всѣ наблюденныя положенія равновѣсія прута вполнѣ согласны съ движеніемъ гироскопа Плюкера.

Укажемъ еще случай равновѣсія тонкихъ упругихъ цилиндровъ, аналогичный любопытному движенію гироскопа Сира (фиг. 5). Этотъ гироскопъ вслѣдствіе гироскопическаго эффекта прижимается концомъ своей оси къ пластинкѣ, обрѣзанной по произвольному контуру, и слѣдуетъ вполнѣ точно за всѣми прихотливыми извилинами контура. Аналогичнымъ этому движенію гироскопа является случай равновѣсія упругаго каучуковаго прута, изображенный на фиг. (6b). Обернувъ прутъ нѣсколько разъ около вазы, укрѣпимъ одинъ его конецъ при основаніи вазы, а другой придѣлаемъ къ ручкѣ, могущей вращаться у верхней стѣнки вазы, Прутъ сначала не будетъ охватывать плотно вазу, но если начнемъ его закручивать съ помощію вращенія ручки, то увидимъ, что онъ всѣми своими частями прижмется къ вазѣ.

Фиг. 5.




Фиг 6.




Во всѣхъ приводимыхъ нами примѣрахъ разрѣшенныя задачи динамики твердаго тѣла позволяли намъ дѣлать сужденія о формахъ равновѣсія упругихъ прутьевъ. Но когда рѣчь идетъ о неразрѣшенной задачѣ динамики: о случаѣ, при которомъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ суть нѣкоторыя произвольныя величины, тогда форма равновѣсія прута, осуществленная практически, можетъ намъ дать понятіе о неизвѣстномъ видѣ движенія твердаго тѣла. На фиг. (6c) изображенъ приборъ, позволяющій по формѣ упругаго прута при произвольныхъ $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ судить о соотвѣтственномъ движеніи тѣла.

Существуетъ много математически аналогичныхъ задачъ, относящихся къ различнымъ физическимъ явленіямъ. Эти задачи часто изслѣдуются различными методами безъ указанія ихъ взаимной аналогіи. Моимъ сообщеніемъ я хотѣлъ отмѣтить пользу, которая получается при совмѣстномъ изученіи такихъ задачъ

Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.

Математическій Сборникъ, Т. XXI.

---

Университетская типографія, Страстной бульваръ.