ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦІЯ

РАЗСМОТРѢННАГО С. В. КОВАЛЕВСКОЮ

СЛУЧАЯ ДВИЖЕНІЯ ТЯЖЕЛАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА

ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

Н. Е. Жуковскаго,

Профессора Московскаго Университета.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1896.

Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при
Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.
Математическій Сборникъ, Т. XIX.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦІЯ РАЗСМОТРѢННАГО С. В. КОВАЛЕВСКОЮ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНІЯ ТЯЖЕЛАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Сообщено 30 сентября 1895 г. на съѣздѣ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей въ Любекѣ).

---

§ 1. Послѣ появленія замѣчательнаго мемуара С. В. Ковалевской [1]) о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, въ которомъ главные радіусы инерціи a, b, c относительно неподвижной точки находятся въ соотношеніи:

$$a = b = \sqrt{2}\, c, \tag{1}$$

и центръ тяжести лежитъ на плоскости равныхъ радіусовъ инерціи, было напечатано нѣсколько статей, посвященныхъ этой интересной задачѣ.

Большая статья Коттера [2]) заключаетъ въ себѣ переработку и пополненіе анализа С. В. Ковалевской. Статьи Г. Г. Аппель-

---

[1]) *S. Kowalevski* „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe". Act. Math. XII. „Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe". Act. Math. XIV.

[2]) *F. Kötter*, „Sur le cas traité par M-me Kowalevski de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe". Act. Math. XVII.

рота [3]), П. А. Некрасова [4]) и А. М. Ляпунова [5]) посвящены изслѣдованію (по отношенію къ полюсамъ) функцій времени, опредѣляющихъ движеніе тѣла, когда время разсматривается за комплексное перемѣнное.

Что касается до геометрической интерпретаціи разсматриваемаго движенія, то она была дана въ сочиненіи Н. Б. Делоне [6]) для частнаго случая, при которомъ постоянное k въ интегралѣ С. В. Ковалевской есть нуль. Этотъ случай подвергся болѣе детальной обработкѣ въ статьяхъ Г. Г. Аппельрота [7]) и Б. К. Млодзѣевскаго [8]).

Для общаго случая указаны нѣкоторыя геометрическія свойства движенія въ небольшой статьѣ Г. К. Суслова [9]).

Въ предлагаемомъ сочиненіи я имѣю въ виду установить геометрическую интерпретацію общаго случая движенія разсматриваемаго тѣла и за основу этой интерпретаціи беру разъясненіе геометрическаго смысла двухъ гиперэллиптическихъ функцій времени, чрезъ которыя С. В. Ковалевская выражаетъ

---

[3]) *Г. Г. Аппельротъ.* „По поводу перваго параграфа мемуара С. В. Ковалевской“. Мат. Сб. XVI.

„Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки“. Москва. 1893.

[4]) *П. А. Некрасовъ.* „Къ задачѣ о движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки“. Мат. Сб. XVI.

[5]) *А. М. Ляпуновъ.* „Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій движенія тяжелаго твердаго тѣла“. Сооб. Харьк. Мат. Общ IV.

[6]) *Н. Б. Делоне.* „Къ вопросу о геометрическомъ истолкованіи интеграловъ движенія твердаго тѣла около неподвижной точки, данныхъ С. В. Ковалевскою“. Мат. Сб. XIV.

„Алгебраическіе интегралы движенія тяжелаго твердаго тѣла“. С.-Петербургъ. 1892.

[7]) *Г. Г. Аппельротъ.* „Нѣкоторыя дополненія къ сочиненію Н. Б. Делоне“. Труды отдѣленія физическихъ наукъ О. Л. Е. VI.

[8]) *Б. К. Млодзѣевскій.* „Объ одномъ случаѣ движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки“. Мат. Сб. XVIII.

[9]) *Г. К. Сусловъ.* „Вращеніе тяжелаго твердаго тѣла около неподвижнаго полюса (случай С. В. Ковалевской)“. Труды отдѣленія физическихъ наукъ О. Л. Е. VII.

всѣ величины, опредѣляющія положеніе движущагося тѣла. Я показываю, что эти функціи являются параметрами нѣкоторой системы криволинейныхъ ортогональныхъ координатъ на плоскости равныхъ радіусовъ инерціи. Относительно этой системы координатъ весьма просто получается движеніе конца проекціи угловой скорости на плоскость равныхъ радіусовъ инерціи. По траекторіи этой точки строится конусъ, представляющій въ тѣлѣ мѣсто вертикальной линіи, который я называю *конусомъ вертикальной линіи*. Знаніе же этого конуса даетъ намъ картину движенія тѣла.

§ 2. Разсмотримъ на плоскости xoy равныхъ радіусовъ инерціи (o лежитъ въ неподвижной точкѣ, а ось ox проходитъ чрезъ центръ тяжести тѣла) мнимое перемѣнное

$$\zeta = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2}$$

и его функцію

$$f(\zeta) = \alpha + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\zeta^4$$

$$= X + Yi = R(\cos\lambda + i\sin\lambda), \tag{3}$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а α, $\alpha_1, \ldots$ суть нѣкоторые дѣйствительные коэффиціенты, значенія которыхъ для данной механической задачи будутъ указаны послѣ.

Назовемъ чрезъ ζ_1 мнимую величину сопряженную ζ и напишемъ эллиптическіе интегралы:

$$\rho_1 + \rho_2 i = \int\frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}\,,\quad \rho_1 - \rho_2 i = \int\frac{d\zeta_1}{\sqrt{f(\zeta_1)}}. \tag{4}$$

Семейства линій

$$\rho_1 = const. \quad \rho_2 = const. \tag{5}$$

представляютъ намъ нѣкоторую систему криволинейныхъ ортогональныхъ изотермическихъ координатъ, для которой ρ_1 и ρ_2 суть изотермическіе параметры. Трансцендентныя уравненія (5) разсматриваемыхъ координатныхъ линій могутъ быть замѣнены алгебраическими уравненіями. Для этого составляемъ дифференціальное уравненіе кривыхъ $\rho_2 = const$. Принимаемъ въ уравненіи (4) параметръ ρ_2 за постоянную величину и беремъ отъ обѣихъ частей ихъ производную по ρ_1:

$$\frac{d\zeta}{d\rho_1} = \sqrt{f(\zeta)}, \quad \frac{d\zeta_1}{d\rho_1} = \sqrt{f(\zeta_1)}. \tag{6}$$

Исключая отсюда $d\rho_1$, найдемъ дифференціальное уравненіе перваго семейства кривыхъ (5), выраженное въ перемѣнныхъ ζ, ζ_1; но намъ удобнѣе сохранить уравненія (6) и отыскать интегралъ такъ, какъ это дѣлаетъ Лагранжъ [1]).

Изъ формулъ, получаемыхъ по ур. (3) и (4):

$$\left(\frac{d\zeta}{d\rho_1}\right)^2 = \alpha + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_4 \zeta^4,$$

$$\left(\frac{d\zeta_1}{d\rho_1}\right)^2 = \alpha + \alpha_1 \zeta_2 + \alpha_2 \zeta_1{}^2 + \alpha_3 \zeta_1{}^3 + \alpha_4 \zeta_1{}^4,$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\rho_1{}^2} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 \zeta + 3\alpha_3 \zeta^2 + 4\alpha_4 \zeta^3),$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\rho_1{}^2} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 \zeta_1 + 3\alpha_3 \zeta_1{}^2 + 4\alpha_4 \zeta_1{}^3)$$

на основаніи

$$x = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta_1), \quad y = \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta_1)$$

находимъ, что

$$\frac{d^2x}{d\rho_1{}^2} = \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 x + \frac{3}{2}\alpha_3 (x^2 - y^2) + 2\alpha_4 (x^3 - 3xy^2),$$

$$\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_1} = \frac{\alpha_1}{2} y + \alpha_2 xy + \frac{\alpha_3}{2}(3x^2y - y^3) + 2\alpha_4 (x^2 - y^2)xy.$$

[1]) Oeuvres de Lagrange. T. IX, p. 127.

Съ помощію этихъ двухъ формулъ составляемъ дифференціальное уравненіе:

$$y\frac{d^2x}{d\rho_1^{\ 2}}-\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_1}=-\alpha_3y^3-4\alpha_4xy^3,$$

которое по умноженіи на

$$\frac{2}{y^3}\frac{dx}{d\rho_1}$$

и интегрированіи даетъ:

$$\left(\frac{\frac{dx}{d\rho_1}}{y}\right)^2+2\alpha_3x+4\alpha_4x^2=s_2$$

гдѣ постоянное интеграціи s_2 есть функція одного ρ_2.

Такъ же найдемъ для уравненій:

$$\frac{d\zeta}{d\rho_2}=i\sqrt{f(\zeta)},\ \frac{d\zeta_1}{d\rho_2}=i\sqrt{f(\zeta_1)} \tag{7}$$

интегралъ:

$$-\left(\frac{\frac{dx}{d\rho_2}}{y}\right)^2+2\alpha_3x+4\alpha_4x^2=s_1,$$

гдѣ постоянное s_1 есть функція одного ρ_1. Такъ какъ (форм. (6), (7) и (3))

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\rho_1}&=\sqrt{R}\cos\frac{\lambda}{2}=\sqrt{\frac{R+X}{2}},\\ \frac{dx}{d\rho_2}&=-\sqrt{R}\sin\frac{\lambda}{2}=-\sqrt{\frac{R-X}{2}},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

то найденныя функціи s_1 и s_2 могутъ быть представлены такъ:

$$\left.\begin{aligned}s_1&=\frac{-R+X}{2y^2}+2\alpha_3x+4\alpha_4x^2,\\ s_2&=\frac{R+X}{2y^2}+2\alpha_3x+4\alpha_4x^2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здѣсь R есть абсолютная величина радіуса вектора точки, представляющей на плоскости xoy мнимую величину $f(\zeta)$, а X есть взятая съ надлежащимъ знакомъ абсцисса этой точки.

Вслѣдствіе сказаннаго ур-ія (5) замѣняются слѣдующими алгебраическими уравненіями:

$$s_1 = const., \quad s_2 = const., \tag{10}$$

при чемъ s_1 и s_2 суть нѣкоторые неизотермическіе параметры разсматриваемой криволинейной системы координатъ.

Величины $\frac{s_1}{4}$ и $\frac{s_2}{4}$ и суть функціи, съ помощью которыхъ С. В. Ковалевская [1]) выражаетъ всѣ элементы, опредѣляющіе положеніе движущагося тѣла. Весь успѣхъ ея анализа, съ геометрической точки зрѣнія, заключается въ изслѣдованіи движенія проекціи конца угловой скорости на плоскость равныхъ радіусовъ инерціи съ помощію указанной системы криволинейныхъ координатъ.

§ 3. Формулы (8) позволяютъ намъ вывести одно свойство координатныхъ линій (10), которое мы выразимъ въ видѣ теоремы.

Теорема I. *Касательныя координатныхъ линій $s_1 = const.$ и $s_2 = const.$ параллельны биссекторамъ угловъ, образованныхъ соотвѣтственнымъ векторомъ R съ осью абсциссъ.*

Обозначая вмѣстѣ съ Ламе первый дифференціальный параметръ знакомъ Δ и замѣчая, что ρ_1 и ρ_2 суть изотермическія функціи, напишемъ:

$$\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\rho_2}\right)^2}},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{R}}. \tag{11}$$

---

[1]) Величины s_1 и s_2, употребляемыя у Kötter'а, суть наши величины $\frac{1}{2}s_1$, $\frac{1}{2}s_2$.

Теперь мы можемъ составить выраженія косинусовъ угловъ, образованныхъ осью ox съ проведенными въ точкѣ (x, y) касательными къ разсматриваемымъ координатнымъ линіямъ:

$$\Delta\rho_1 \frac{dx}{d\rho_1} = \cos\frac{\lambda}{2}, \qquad \Delta\rho_2 \frac{dx}{d\rho_2} = -\sin\frac{\lambda}{2}, \tag{12}$$

при чемъ первый косинусъ соотвѣтствуетъ касательной кривой $s_2 = const.$, а второй соотвѣтствуетъ касательной кривой $s_1 = const.$ Теорема такимъ образомъ доказана.

§ 4. Чтобы хорошенько познакомиться съ введенными нами криволинейными координатами, остановимся сначала на предположеніи:

$$f(\zeta) = (\varepsilon_1{}^2 - \zeta^2)(\varepsilon_2{}^2 - \zeta^2), \tag{13}$$

гдѣ ε_1 и ε_2 суть нѣкоторыя дѣйствительныя или чисто мнимыя величины (мы будемъ называть чрезъ ε_1 и ε_2 положительные корни).

Составляемъ функціи s_1 и s_2 для точекъ, лежащихъ на осяхъ координатъ. Мы имѣемъ на оси абсциссъ:

$$y = o, \quad Y = o, \quad X = f(x) = \pm R. \tag{14}$$

Если X положителенъ, то по формулѣ (9) $s_2 = \infty$, а функція s_1 имѣетъ конечную величину. Для опредѣленія послѣдней воображаемъ точку (x, y) безконечно близкую оси абсциссъ и пишемъ:

$$\frac{-R+X}{2y^2} = \frac{X}{2y^2}\left\{-\left(1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\} = -\frac{Y^2}{4y^2X}$$

$$= -\frac{\{-(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2)^2 r^2 \sin 2\varphi + r^4 \sin 4\varphi\}^2}{4r^2\sin^2\varphi\{\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2 - (\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^3)r^2\cos 2\varphi + r^4\cos 4\varphi\}}.$$

Полагая здѣсь $\varphi=o$, $r=x$, находимъ:

$$\frac{-R+X}{2y^2}=-\frac{x^2(-(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2)+2x^2)^2}{(\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2-(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2)x^2+x^4)}.$$

Подставляя эту величину въ первую формулу (9) и полагая $\alpha_3=0$, $\alpha_4=1$, получаемъ:

$$s_1=-\frac{x^2(\varepsilon_1{}^2-\varepsilon_2{}^2)}{f(x)}.$$

При отрицательномъ значеніи X находимъ, что $s_1=-\infty$, а s_2 выражается тою же формулою, какою прежде выражалось s_1.

На оси ординатъ имѣемъ:

$$x=0,\ Y=0,\ X=f(yi)=\pm R, \tag{15}$$

такъ что при положительномъ X по формулѣ (9)

$$s_1=0,\ s_2=\frac{(\varepsilon_1{}^2+y^2)(\varepsilon_2{}^2+y^2)}{y^2}.$$

При отрицательномъ X имѣемъ $s_2=0$, а s_1 выражается тою же формулою, какою при положительномъ X выражалось s_2.

Высказанное относительно значеній функцій s_1, s_2 на осяхъ координатъ можно сформулировать такъ:

На оси абсциссъ

$$s=-\frac{x^2(\varepsilon_1{}^2-\varepsilon_2{}^2)^2}{f(x)}; \tag{16}$$

при этомъ, если вторая часть формулы положительна, то она представляетъ s_2, а $s_1=-\infty$; если же вторая часть формулы отрицательна, то она представляетъ s_1, а $s_2=\infty$.

На оси ординатъ

$$s=\frac{(\varepsilon_1{}^2+y^2)(\varepsilon_2{}^2+y^2)}{y^2}; \tag{17}$$

при этомъ, если вторая часть формулы положительна, то она представляетъ s_2, а $s_1=0$; если же вторая часть формулы отрицательна, то она представляетъ s_1, а $s_2=0$.

Рядомъ съ форм. (16) и (17) намъ будетъ важно еще обратить вниманіе на нѣкоторыя формулы, непосредственно изъ нихъ получаемыя.

Для оси абсциссъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s&=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2(\varepsilon_1\varepsilon_2-x^2)^2}{f(x)},\\ (\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s&=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2(\varepsilon_1\varepsilon_2+x^2)^2}{f(x)},\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\frac{ds}{d(x^2)}=-\frac{(\varepsilon_1{}^2-\varepsilon_2{}^2)^2(\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2-x^4)}{(f(x))^2}. \quad (19)$$

Для оси ординатъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s&=-\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2-y^2)^2}{y^2},\\ (\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s&=-\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2+y^2)^2}{y^2},\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

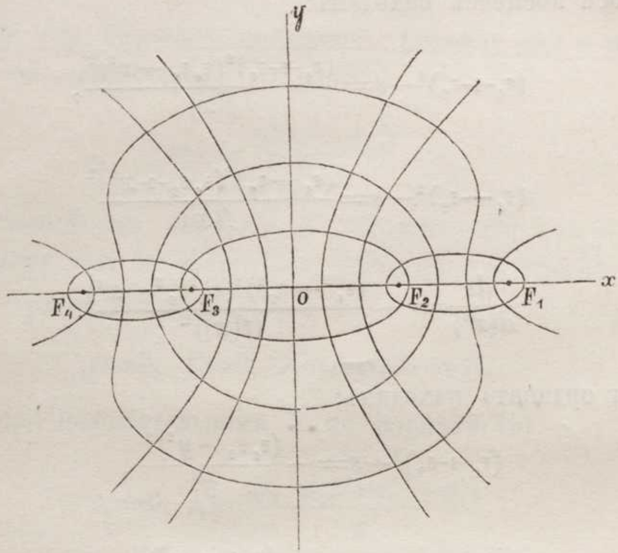
$$\frac{ds}{d(y^2)}=-\frac{\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2-y^4}{y^4}. \quad (21)$$

Переходимъ къ разъясненію вида координатныхъ линій при условіи (13). Мы имѣемъ три случая.

Корни ε_1 *и* ε_2 *дѣйствительны.* Примемъ, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и отложимъ на оси абсциссъ (фиг. 1) отрѣзки

$$oF_1=oF_4=\varepsilon_1, \quad oF_2=oF_3=\varepsilon_2.$$

Разсмотримъ измѣненія s_1 и s_2 при измѣненіи x^2 отъ 0 до ∞. На отрѣзкѣ F_3F_2 вторая часть формулы (16) отрицательна и представляетъ функцію s_1, которая при переходѣ отъ o до F_2 или отъ o до F_3 измѣняется отъ нуля до $-\infty$. Функція же s_2 на всемъ отрѣзкѣ F_3F_2 имѣетъ постоянную величину $+\infty$, вслѣдствіе чего отрѣзокъ оси абсциссъ F_3F_2 принадлежитъ координатной линіи $s_2=\infty$. На отрѣзкахъ F_2F_1 и F_3F_4 вторая часть формулы (16) положительна и представляетъ функцію s_2,



Фиг. 1.

которая при переходѣ отъ F_2 къ F_1 или отъ F_3 къ F_4 уменьшается отъ $+\infty$ до наименьшей величины $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$, а потомъ опять возрастаетъ до $+\infty$. Наименьшая величина получается при $x^2=\varepsilon_1\varepsilon_2$ (форм. (18), (19)). Функція s_1 на отрѣзкахъ F_2F_1 и F_3F_4 имѣетъ постоянную величину $-\infty$, такъ что эти отрѣзки представляютъ координатную линію $s_1=-\infty$. Наконецъ на безконечныхъ концахъ оси абсциссъ, начинающихся отъ точекъ F_1 и F_4, имѣемъ вторую часть формулы (16) опять отрицательной; она представляетъ намъ функцію s_1, измѣняющуюся отъ $-\infty$ до 0. Функція s_2 на разсматриваемыхъ безконечныхъ отрѣзкахъ имѣетъ постоянную величину $+\infty$, такъ что эти отрѣзки вмѣстѣ съ отрѣзкомъ F_2F_3 представляютъ координатную линію $s_2=\infty$.

Для всѣхъ точекъ оси ординатъ вторая часть формулы (17) положительна и представляетъ функцію s_2, которая уменьшается при удаленіи отъ начала координатъ отъ $+\infty$ до наименьшей величины $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$ и потомъ возрастаетъ до $+\infty$. Наименьшая величина получается при $y^2=\varepsilon_1\varepsilon_2$ (форм. (20), (21)). Функція s_1 на всей оси ординатъ имѣетъ значеніе нуль, такъ что эта ось есть координатная линія $s_1=0$.

Сказанное даетъ намъ расположеніе координатной сѣти, представленное на фиг. (1). Любопытно замѣтить, что линія

$$s_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$$

въ этой сѣти есть кругъ [2]), проведенный изъ начала координатъ радіусомъ:

$$\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Корни ε_1 и ε_1 суть чисто мнимыя величины. Примемъ модуль ε_1 болѣе модули ε_2, т.-е.

$$\frac{\varepsilon_1}{i}>\frac{\varepsilon_2}{i}.$$

Отложимъ (фиг. (2)) на оси ординатъ отрѣзки:

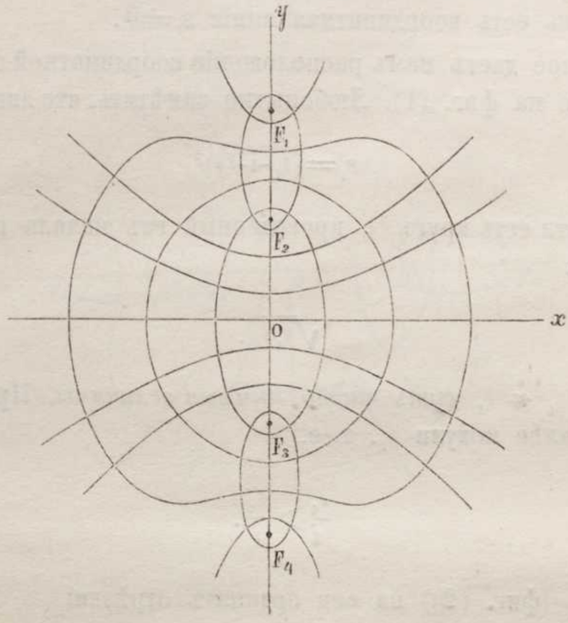
$$oF_1=oF_4=\frac{\varepsilon_1}{i}\,,\quad oF_2=oF_3=\frac{\varepsilon_2}{i}$$

и будемъ разсматривать измѣненія функцій s_1 и s_2 сначала на оси абсциссъ. Для всѣхъ точекъ этой оси вторая часть форм. (16) отрицательна и представляетъ намъ функцію s_1, которая при удаленіи отъ начала координатъ убываетъ отъ нуля до наименьшей величины $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2$, а потомъ опять возрастаетъ до нуля. Наименьшая величина получается при $x^2=-\varepsilon_1\varepsilon_2$ (форм. (18), (19)). Функція s_2 на всей оси ox равна $+\infty$, такъ что эта ось принадлежитъ координатной линіи $s_2=\infty$. На оси ординатъ при передвиженіи отъ начала координатъ къ F_2 или

---

[1]) См мое сочиненіе „Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа." § 19. Мат. Сб. Т. XV.

F_3 вторая часть форм. (17) положительна и представляетъ функцію s_2, которая измѣняется отъ ∞ до нуля; функція же s_1 на отрѣзкѣ F_3F_2 имѣетъ постоянное значеніе нуль, вслѣд-



Фиг. 2.

ствіе чего весь этотъ отрѣзокъ принадлежитъ координатной линіи $s_1 = 0$.

На отрѣзкахъ F_2F_1 и F_3F_4 вторая часть форм. (17) отрицательна и представляетъ функцію s_1, которая уменьшается отъ нуля до наименьшей величины $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$, а потомъ возрастаетъ до нуля. Наименьшая величина имѣетъ мѣсто при $y^2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ (форм. (20), (21)). Функція s_2 на отрѣзкахъ F_2F_1 и F_3F_4 имѣетъ постоянное значеніе нуль, такъ что эти отрѣзки представляютъ координатную линію $s_2 = 0$. На безконечныхъ отрѣзкахъ оси ординатъ, начинающихся отъ F_1 и F_4, вторая часть формулы (17) положительна и представляетъ функцію s_2, которая при возрастаніи y^2 увеличивается отъ 0 до ∞. Что касается функціи s_1, то она на разсматриваемыхъ безконечныхъ отрѣзкахъ сохраняетъ постоянную величину нуль, такъ что эти отрѣзки вмѣстѣ съ отрѣзкомъ F_2F_3 представляютъ координатную линію $s_1=0$.

На основаніи всего сказаннаго получаемъ расположеніе координатной сѣти, представленное на фиг. (2). Здѣсь, такъ же какъ въ предыдущей сѣти, одна изъ координатныхъ линій, именно

$$s_1=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2,$$

представляетъ окружность (радіусъ окружности $\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2}$).

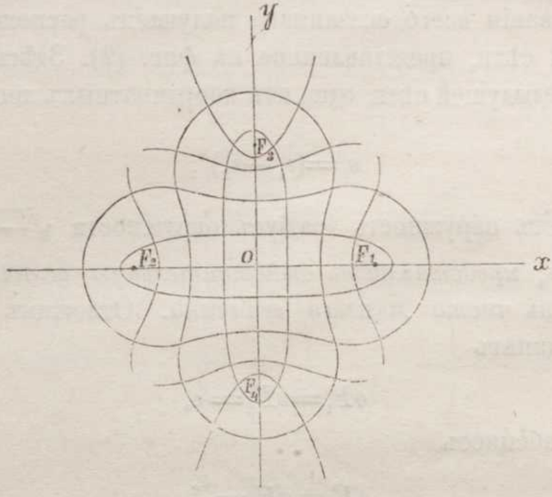
Коренъ ε_1 *представляетъ дѣйствительную величину, а коренъ* ε_2 *есть чисто мнимая величина.* Отложимъ (фиг. (3)) на оси ординатъ

$$oF_1=oF_2=\varepsilon,$$

и на оси абсциссъ

$$oF_3=oF_4=\frac{\varepsilon_2}{i}.$$

На отрѣзкѣ оси абсциссъ F_2F_1 вторая часть формулы (16) положительна и представляетъ функцію s_2, которая измѣняется при переходѣ отъ начала координатъ къ точкамъ F_1 и F_2 отъ нуля до ∞; функція же s_1 на всемъ отрѣзкѣ F_2F_1 имѣетъ постоянную величину $-\infty$, такъ что этотъ отрѣзокъ представляетъ координатную линію $s_1=-\infty$. На безконечныхъ отрѣзкахъ оси абсциссъ, начинающихся отъ точекъ F_1 и F_2, вторая часть формулы (16) отрицательна и представляетъ функцію s_1, которая при безпредѣльномъ возрастаніи x^2 возрастаетъ отъ $-\infty$ до нуля. Функція s_2 на разсматриваемыхъ безконечныхъ отрѣзкахъ имѣетъ постоянную величину ∞, такъ что эти отрѣзки принадлежатъ координатной линіи $s_2=\infty$. На отрѣзкѣ F_3F_4 оси ординатъ вторая часть формулы (17) имѣетъ отрицательную величину и представляетъ функцію s_1, которая при переходѣ отъ начала координатъ къ точкамъ F_3 и F_4 измѣняется отъ $-\infty$ до нуля; функція же s_2 на разсматриваемомъ отрѣзкѣ имѣетъ постоянную величину нуль, такъ что этотъ отрѣзокъ представляетъ координатную линію $s_2=0$. На безконечныхъ отрѣзкахъ оси ординатъ, начинающихся отъ точекъ F_3 и F_4 вторая часть формулы (17) имѣетъ положительный



Фиг. 3.

знакъ и представляетъ функцію s_2, которая при безпредѣльномъ возрастаніи y^2 увеличивается отъ нуля до безконечности. Функція s_1 на этихъ отрѣзкахъ имѣетъ постоянную величину нуль, такъ что эти отрѣзки даютъ намъ координатную линію $s_1=0$.

На основаніи сказаннаго получаемъ расположеніе координатной сѣти, изображенное на фиг. (3).

§ 4. Обнаружимъ теперь, что *всякая координатная сѣть, данная форм. (10), получается, преобразуя одну изъ трехъ сѣтей предыдущаго параграфа съ помощію обратныхъ радіусовъ векторовъ изъ центра, лежащаго на оси абсциссъ.*

Предполагаемъ, что въ равенствѣ

$$\int\frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}=-\int\frac{d\zeta'}{\sqrt{f_1(\zeta')}} \tag{22}$$

первый эллиптическій интегралъ переходитъ во второй съ помощію слѣдующей подстановки:

$$(\zeta-l)(\zeta'-m)=n^2. \tag{23}$$

Замѣчаемъ, что при этомъ корни двухъ уравненій четвертой степени

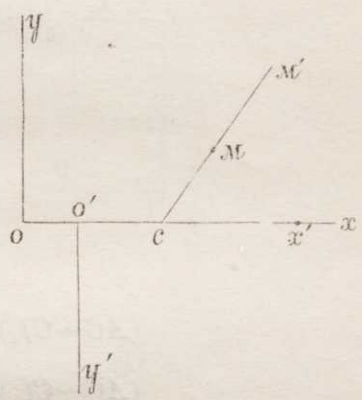
$$f(\zeta)=0,\ f_1(\zeta')=0 \tag{24}$$

будутъ связаны между собою соотношеніемъ (23). Геометрическій смыслъ этого соотношенія можно усмотрѣть на фиг. (4).

Точку M', представляющую на осяхъ $x'o'y'$ мнимое перемѣнное $\zeta'=x'+y'i$, слѣдуетъ соединить съ центромъ преобразованія C, лежащимъ на оси $o'x'$ на разстояніи $o'C=m$ отъ начала, и замѣнить на соотвѣтственную точку M такъ, чтобы

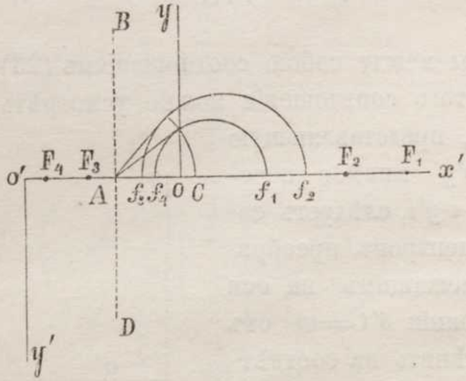
$$CM.CM'=n^2.$$

Полученную точку M слѣдуетъ отнести къ осямъ координатъ xoy, въ которыхъ ось ox направлена по $o'x'$, ось oy направлена въ сторону, прямо противоположную $o'y'$, а начало o отстоитъ отъ центра C на разстояніи $oC=l$. Точка M относительно осей xoy представитъ намъ мнимое перемѣнное $\zeta=x+yi$, соотвѣтственное перемѣнному ζ'.



Фиг 4.

Докажемъ, что для всякаго многочлена четвертой степени $f_1(\zeta')$ съ дѣйствительными коэффиціентами можно отыскать дѣйствительныя величины l, m, n, при которыхъ функція $f(\zeta)$ представляется формулой (13). Если всѣ четыре корня втораго уравненія (24) дѣйствительны, то они (фиг. (5)) представляются точками f_1, f_2, f_3, f_4, расположенными на оси абсциссъ $o'x'$. Строимъ на отрѣзкахъ f_4f_1 и f_3f_2, какъ на діаметрахъ, окружности и проводимъ радикальную ось этихъ окружностей BD. Изъ точки A пересѣченія радикальной оси съ осью абсциссъ проводимъ къ окружностямъ касательныя, которыя будутъ по длинѣ равны, и, принявъ эти касательныя за радіусъ, чертимъ изъ центра A окружность. Точка пересѣченія C этой окружности съ осью абсциссъ будетъ служить центромъ преобразованія съ помощію обратныхъ радіусовъ, а $o'C=m$. Такъ какъ



Фиг. 5.

$$(AC-Cf_4)(AC+Cf_1)=AC^2,$$

$$(AC-Cf_3)(AC+Cf_2)=AC^2,$$

то

$$\frac{1}{AC}=\frac{1}{Cf_4}-\frac{1}{Cf_1}=\frac{1}{Cf_3}-\frac{1}{Cf_2}\text{, откуда }\frac{1}{Cf_4}-\frac{1}{Cf_3}=\frac{1}{Cf_1}-\frac{1}{Cf_2}.$$

Если назовемъ чрезъ F_1, F_2, F_3, F_4 точки, соотвѣтственныя точкамъ f_1, f_2, f_3, f_4 относительно центра преобразованія C при произвольномъ дѣйствительномъ значеніи коэффиціента n, то, умноживъ полученное равенство на n^2, найдемъ, что

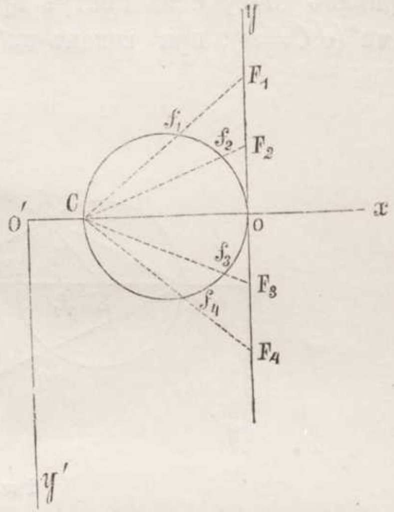
$$CF_4-CF_3=CF_1-CF_2,$$

или

$$F_4F_3=F_2F_1.$$

Теперь намъ остается только взять средину отрѣзка F_3F_2 за начало o координатъ xoy, т. е. положить $l=Co$, чтобы получить для $f(\zeta)$, выраженіе (13) при дѣйствительныхъ корняхъ ε_1, ε_2.

Когда всѣ четыре корня втораго уравненія (24) мнимы и представляются (фиг. (6)) точками f_1, f_4, f_2, f_3, попарно симметричными относительно оси $o'x'$, то слѣдуетъ провести чрезъ эти четыре точки окружность. Точка пересѣченія C этой окружности съ осью абсциссъ будетъ центръ преобразованія съ помощію обратныхъ радіусовъ, такъ что $o'C=m$. При преобразованіи на нашей фигурѣ съ коэффиціентомъ $n=Co$ упомянутая окружность преобразуется въ ось ординатъ oy, на которой симметрично отъ начала o располагаются точки F_1, F_4, F_2, F_3, соотвѣтственныя точкамъ f_1, f_4, f_2, f_3 и представляющія корни перваго уравненія (24). Коэффиціентъ, l будетъ $-Co$. Функція $f(\zeta)$ приметъ видъ (13) (различіе на постоянный множитель) при чисто мнимыхъ значеніяхъ ε_1, ε_2.



Фиг. 6.

Наконецъ, если два корня втораго уравненія (24) дѣйствительны, а два другіе суть мнимыя сопряженныя величины, то, представивъ ихъ на фиг. (7) точками f_1, f_2, f_3, f_4, соединяемъ точку f_3 съ f_1 и f_2, отлагаемъ

$$\angle f_1 f_3 H = \angle f_1 f_2 f_3 .$$

Изъ точки H, какъ изъ центра, проводимъ окружность радіусомъ Hf_3, при чемъ эта окружность пройдетъ и чрезъ точку f_4. Точки f_2 и f_1 будутъ относительно этой окружности взаимно сопряженныя, т. е. будутъ удовлетворять соотношенію:

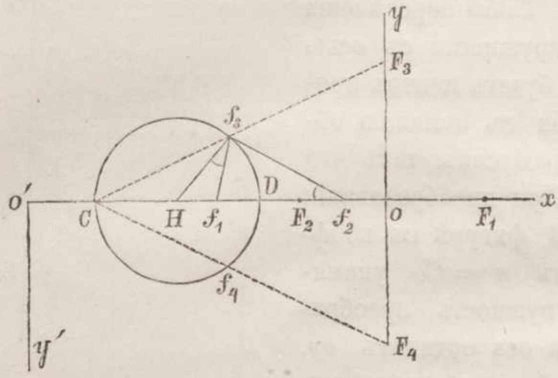
$$f_1 H . f_2 H = HC^2$$

или

$$(Cf_1 - CH)(Cf_2 - CH) = CH^2 ,$$

$$\frac{1}{Cf_1}+\frac{1}{Cf_2}=\frac{2}{CD}.$$

Принявъ точку C за центръ преобразованія обратными радіусами ($o'C=m$), при какомъ-нибудь дѣйствительномъ коэффи-



Фиг. 7.

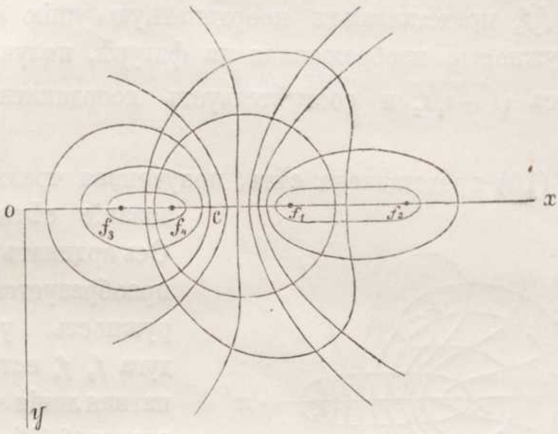
ціентѣ n, преобразуемъ построенную окружность въ ось oy новой системы осей координатъ ($-oC=l$). На этой оси симметрично относительно начала o расположатся точки F_3 и F_4, преобразованныя изъ точекъ f_3 и f_4, что же касается точекъ F_1 и F_2, преобразованныхъ изъ точекъ f_1 и f_2, то онѣ расположатся по оси абсциссъ тоже симметрично относительно o, такъ какъ, умножая послѣднее наше равенство на n^2, получимъ:

$$CF_1+CF_2=2CO.$$

Функція $f(\zeta)$ принимаетъ въ разсматриваемомъ случаѣ видъ, данный форм. (13) при дѣйствительномъ ε_1 и чисто мнимомъ ε_2.

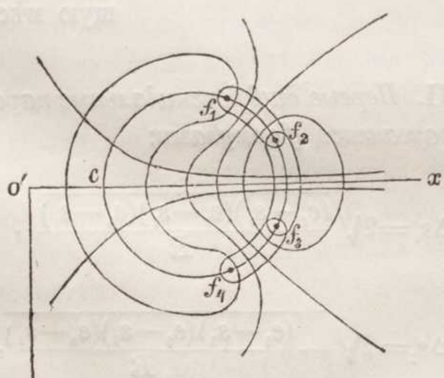
Такимъ образомъ мы обнаружили, что всякая координатная сѣть разсматриваемаго вида съ помощію преобразованія обратными радіусами приводится къ одному изъ видовъ, данныхъ на фиг. (1), (2) или (3). Такъ какъ преобразованіе обратными радіусами взаимно, то, наоборотъ, всякая координатная сѣть разсматриваемаго вида получается этимъ преобразованіемъ изъ простѣйшихъ сѣтей одного изъ трехъ упомянутыхъ типовъ.

На фиг. (8) представлена сѣть, получаемая чрезъ преобразованія сѣти фиг. (1). Мы замѣчаемъ на ней двѣ окружности,



Фиг. 8.

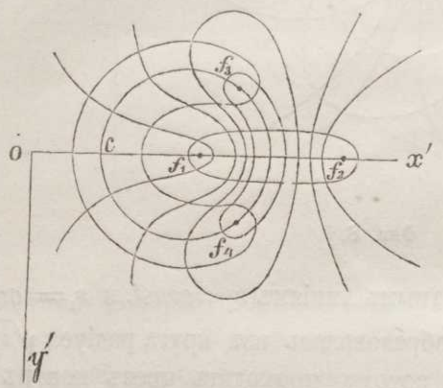
соотвѣтствующія координатнымъ линіямъ $s_2 = const.$ и $s_1 = const.$, изъ которыхъ первая преобразовалась изъ круга радіуса $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, а вторая изъ оси oy и потому проходитъ чрезъ центръ C. На фиг. (9) представлена сѣть, получаемая чрезъ преобразованіе сѣти фиг. (2). Окружность, проходящая чрезъ точки



Фиг. 9.

f_1, f_2, f_3, f_4, соотвѣтствующія корнямъ втораго уравненія (24), обладаетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ [1]), что ея дуги $f_1 f_2$ и $f_3 f_4$ представляютъ координатную линію $s_2 = const$, а ея дуги $f_1 f_4$ и $f_2 f_3$ представляютъ координатную линію $s_1 = const$. Другая окружность, изображенная на фигурѣ, получается изъ круга радіуса $\sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ и соотвѣтствуетъ координатной линіи $s_1 = const$.

На фиг. (10) представлена сѣть, полученная чрезъ преобразованіе сѣти фиг. (3). Ось ординатъ при этомъ преобразуется въ окружность, у которой дуга $f_3\ f_4$ есть координатная линія $s_2 = const.$, а дуга $f_3 C f_4$ есть координатная линія $s_1 = const$.



Фиг 10.

§ 5. Для нашей механической задачи слѣдуетъ еще доказать одну теорему, имѣющую мѣсто при $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 1$.

Теорема II. *Первые дифференціальные параметры функцій s_1 и s_2 выражаются формулами:*

$$\Delta s_1 = 2\sqrt{\frac{(e_1 - s_1)(e_2 - s_1)(e_3 - s_1)}{R}}\,,$$

$$\Delta s_2 = 2\sqrt{-\frac{(e_1 - s_2)(e_2 - s_2)(e_3 - s_2)}{R}}\,, \tag{25}$$

---

[1]) Пользуясь этимъ свойствомъ, можемъ разрѣшить задачу о распредѣленіи тока въ круглой пластинкѣ, для которой электродами служатъ равныя дуги $f_1 f_2$. и $f_4 f_3$.

гдѣ постоянные e_1, e_2, e_3 *выражаются по корнямъ* ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 *уравненія* $f(\zeta)=0$ *такимъ образомъ:*

$$e_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2,\ e_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2,\ e_3=(\varepsilon_1+\varepsilon_4)^2.$$

При доказательствѣ теоремы (I) было обнаружено, что первый дифференціальный параметръ функцій ρ_1 и ρ_2 есть $1:\sqrt{R}$. Изъ этого слѣдуетъ, что

$$\Delta s_1=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{ds_1}{d\rho_1},$$
$$\Delta s_2=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{ds_2}{d\rho_2}. \tag{26}$$

Такъ какъ $\frac{ds_1}{d\rho_1}$ есть функція s_1, то мы будемъ знать эту величину на всей плоскости, если опредѣлимъ ее на какой-нибудь кривой $s_2=const.$; точно такъ же мы будемъ знать $\frac{ds_2}{d\rho_2}$ на всей плоскости, если опредѣлимъ эту производную на какой-нибудь кривой $s_1=const.$

Предположимъ сначала, что функція $f(\zeta)$ имѣетъ видъ (13), и замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ ось абсциссъ или состоитъ частью изъ линіи $s_1=const.$ и частью изъ линій $s_2=const.$ (фиг. (1), (3)),, или представляется линіею $s_2=const.$ (фиг. (2)), при чемъ въ послѣднемъ случаѣ нѣкоторая часть оси ординатъ представляетъ линію $s_1=const.$ Отсюда слѣдуетъ, что для всякаго индекса будетъ удовлетворительно на той или другой оси одно изъ равенствъ:

$$(\Delta s)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$
$$(\Delta s)^2=\left(\frac{ds}{dy}\right)^2. \tag{27}$$

Приравниваемъ теперь произведенія первыхъ и вторыхъ частей уравненій (16) и (18), а также уравненій (17) и (20):

$$((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s)((\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s)(-s)=\frac{(\varepsilon_1{}^2-\varepsilon_2{}^2)^4(\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2-x^4)^2x^2}{(f(x))^3},$$

$$((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s)((\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s)(s)=\frac{f(yi)(\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2{}^2-y^4)^2}{y^6}.$$

Полученные результаты на основаніи формулъ (19), (21), (27), приводятъ къ уравненіямъ:

$$(\Delta s)^2=\frac{4}{f(x)}((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s)((\varepsilon_1-\varepsilon_2)-s)(-s)\,,$$
$$(\Delta s^2)=\frac{4}{f(yi)}((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s)((\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s)(s)\,. \tag{28}$$

Если мы желаемъ отнести эти формулы къ s_1, то по сказанному въ § 4 должны въ нихъ считать $f(x)$ положительнымъ, а $f(yi)$ отрицательнымъ и полагать (форм. (14), (15)), что

$$f(x)=R,\ f(yi)=-R;$$

если же желаемъ относить ихъ къ s_2, то должны въ нихъ на основаніи того же параграфа считать $f(x)$ отрицательнымъ, а $f(yi)$ положительнымъ и полагать, что

$$f(x)=-R,\ f(yi)=R.$$

Внося указанныя значенія $f(x)$ и $f(yi)$ въ форм. (28) и подставляя найденные результаты въ форм. (26), приходимъ къ заключенію, что

$$\frac{ds_1}{d\rho_1}=2\sqrt{((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s_1)((\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s_1)(-s_1)}\quad,$$
$$\frac{ds_2}{d\rho_2}=2\sqrt{-((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s_2)((\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s_2)(-s_2)}\,. \tag{29}$$

Такъ какъ въ случаѣ ур. (13) имѣемъ:

$$\varepsilon_3=-\varepsilon_2,\ \varepsilon_4=-\varepsilon_1,$$

то форм. (29) и (26) обнаруживаютъ справедливость теоремы для разсматриваемаго частнаго случая.

Посмотримъ, какъ преобразуются форм. (29), когда мы перейдемъ отъ простѣйшаго вида $f(\zeta)$ къ какому нибудь иному виду $f_1(\zeta')$, удовлетворяющему условiю $\alpha_3'=0$, $\alpha_4'=1$, съ помощiю подстановки (24).

Подстановка (24) можетъ быть замѣнена тремя послѣдовательными подстановками:

$$\zeta=l+\zeta'',\ \zeta''=\frac{n^2}{\zeta'''},\ \zeta'''=\zeta'-m,$$

при чемъ подкоренныя величины въ форм. (4) послѣдовательно будемъ обозначать черезъ $f(\zeta)$, $f_2(\zeta'')$, $f_3(\zeta''')$, $f_1(\zeta')$. По этимъ функцiямъ на основанiи форм. (9) вполнѣ опредѣляются функцiи s_1 и s_2, которыя соотвѣтственно будемъ называть чрезъ: s_1, s_2, s_1'', s_2'', s_1''', s_2''', s_1', s_2'. Посмотримъ, въ какомъ соотношенiи будутъ эти функцiи для соотвѣтственныхъ значенiй $\zeta, \zeta'', \zeta''', \zeta'$.

При первой подстановкѣ

$$\zeta=l+\zeta'',\ f(\zeta)=f(l+\zeta'')=f_2(\zeta''),$$

$$x''=x-l,\ y''=y,\ R''=R,\ X''=X.$$

Вслѣдствiе этого

$$s''-s=4\alpha_4(-2lx+l^2)+2(\alpha_3+4\alpha_4 l)(x-l)-2\alpha_3 x,$$

или

$$s''-s=-4\alpha_4 l^2-2\alpha_3 l. \tag{30}$$

При второй подстановкѣ

$$\left.\begin{aligned}&\zeta''=\frac{n^2}{\zeta'''},\ f_3(\zeta''')=\frac{\zeta'''^4}{n^4}f_2(\zeta''),\\ &y''=-\frac{n^2}{r'''^2}y''',\ R''=\frac{n^4}{r'''^4}R'''.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Два послѣднiя уравненiя приводятъ насъ къ заключенiю о неизмѣнности въ форм. (9) частей

$$\frac{R''}{2y''^2}=\frac{R'''}{2y'''^2}.$$

Докажемъ, что остающіяся части тоже равны, т. е.

$$\frac{X''+4\alpha_3''x''y''^2+8\alpha_4''x''^2y''^2}{2y''^2}=\frac{X'''+4\alpha_3'''x'''y'''^2+8\alpha_4'''x'''^2y'''^2}{2y'''^2}.$$

Подставляемъ сюда $x''=r''\cos\varphi''$, $y''=r''\sin\varphi''$ и представляемъ на основаніи соотношеній:

$$\cos 3\varphi''+4\cos\varphi''\sin^2\varphi''=\cos\varphi'',$$

$$\cos 4\varphi''+8\cos^2\varphi''\sin^2\varphi''=1,$$

первую дробь такимъ образомъ:

$$\frac{\alpha''+\alpha_1''r''\cos\varphi''+\alpha_2''r''^2\cos 2\varphi''+\alpha_3''r''^3\cos\varphi''+\alpha_4''r''^4}{2r''^2\sin^2\varphi''}.$$

Подобное же выраженіе найдемъ для второй дроби, при чемъ придется только измѣнить значекъ ($''$) на значекъ ($'''$). Такъ какъ на основаніи форм. (31)

$$r''=\frac{n^2}{r'''},\ \varphi''=-\varphi''',$$

$$\alpha'''=n^4\alpha_4'',\ \alpha_1'''=n^2\alpha_3'',\ \alpha_2'''=\alpha_2'',$$

$$\alpha_3'''=n^{-2}\alpha_1'',\ \alpha_4'''=n^{-4}\alpha'',$$

то обѣ дроби равны.

Такимъ образомъ

$$s'''-s''=0. \qquad (32)$$

Вмѣсто третьей подстановки мы разсмотримъ обратную ей подстановку $\zeta'=\zeta'''+m$ и на основаніи сказаннаго о первой подстановкѣ напишемъ:

$$s'-s'''=4\alpha_4'm^2+2\alpha_3'm. \qquad (33)$$

Сложеніе первыхъ и вторыхъ частей равенствъ (30), (32), (33) даетъ:

$$s'-s=4\alpha_4'm^2-4\alpha_4 l^2+2\alpha_3'm-2\alpha_3 l.$$

Для интересующаго насъ вопроса надо положить $\alpha_4=\alpha_4'=1$, $\alpha_3=\alpha_3'=0$, такъ что

$$s'-s=4m^2-4l^2 \tag{34}$$

Представимъ эту формулу въ иномъ видѣ. Если сразу положимъ

$$\zeta=l+\frac{n^2}{\zeta'-m},$$

то найдемъ, что

$$\alpha_4'=\frac{f(l)}{n^4}=\frac{1}{n^4}(\varepsilon_1-l)(\varepsilon_2-l)(\varepsilon_3-l)(\varepsilon_4-l);$$

откуда, вслѣдствіе $\alpha_4'=1$ имѣемъ:

$$(\varepsilon_1-l)(\varepsilon_2-l)(\varepsilon_3-l)(\varepsilon_4-l)=n^4.$$

Такъ же докажемъ, что

$$(\varepsilon_1'-m)(\varepsilon_2'-m)(\varepsilon_3'-m)(\varepsilon_4'-m)=n^4$$

гдѣ ε_1', ε_2', ε_3', ε_4' корни уравненія $f_1(\zeta')=0$.

Корни ε_1, ε_2 и ε_1', ε_2' связываются соотношеніями:

$$\varepsilon_1-l=\frac{n^2}{\varepsilon_1'-m},$$

$$\varepsilon_2-l=\frac{n^2}{\varepsilon_2'-m}.$$

Складываемъ:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2-2l=\frac{n^2(\varepsilon_1'+\varepsilon_2'-2m)}{(\varepsilon_1'-m)(\varepsilon_2'-m)}. \tag{35}$$

Такъ же найдемъ, что

$$(\varepsilon_3+\varepsilon_4)-2l=\frac{n^2(\varepsilon_3'+\varepsilon_4'-2m)}{(\varepsilon_3'-m)(\varepsilon_4'-m)}.$$

Полагая здѣсь на основаніи условій $\alpha_3 = \alpha_3' = 0$,

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ \ \varepsilon_3' + \varepsilon_4' = -(\varepsilon_1' + \varepsilon_2'),$$

получаемъ:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2l = \frac{n^2(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + 2m)}{(\varepsilon_3' - m)(\varepsilon_4' - m)}. \tag{36}$$

Перемножаемъ соотвѣтственно первыя и вторыя части ур. (35) и (36) и сравниваемъ ихъ, обращая вниманіе на выраженіе для n^4:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 4l^2 = (\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - 4m^2. \tag{37}$$

Формула (34) на основаніи форм. (37) можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - s = (\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - s'. \tag{38}$$

Подставляя опредѣленную отсюда и изъ аналогичныхъ формулъ величину s въ форм. (29), приводимъ ихъ къ виду:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1'}{d\rho_1} &= 2\sqrt{((\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - s_1')((\varepsilon_1' + \varepsilon_3')^2 - s_1')((\varepsilon_1' + \varepsilon_4')^2 - s_1')}\,, \\ \frac{ds_2'}{d\rho_2} &= 2\sqrt{-((\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - s_2')((\varepsilon_1' + \varepsilon_3')^2 - s_2')((\varepsilon_1' + \varepsilon_4') - s_2')}\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Опуская здѣсь значекъ ($'$), который мы употребляли для того, чтобы разсмотрѣть переходъ отъ функціи $f(\zeta)$, выраженной ур. (13), къ нѣкоторой иной функціи четвертой степени, стѣсненной условіемъ $\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = 0$, подставляемъ форм. (39) въ ур. (26). Полученный при этомъ результатъ доказываетъ нашу теорему.

§ 6. Четвертый алгебраическій интегралъ дифференціальныхъ уравненій Эйлера, найденный С. В. Ковалевской для разсматриваемаго ею твердаго тѣла, можетъ быть полученъ съ помощію геометрическихъ соображеній и изложенъ въ видѣ нѣкоторой теоремы.

Мы формулируемъ эту теорему, введя терминъ *векторъ второй степени* отъ даннаго вектора. Если данный векторъ имѣетъ длину r и образуетъ съ осью ox уголъ φ, то векторъ второй степени имѣетъ длина r^2 и образуетъ съ осью ox уголъ 2φ. Между скоростью конца даннаго вектора и скоростью конца вектора второй степени имѣетъ мѣсто соотношеніе, состоящее въ томъ, что обѣ скорости наклонены къ своимъ векторамъ подъ равными углами и вторая скорость равна первой, умноженной на $2r$.

Угловыя скорости и моменты количествъ движенія мы будемъ графически представлять векторами, которые въ единицахъ длины выражаются числами, представляющими разсматриваемыя механическія величины въ соотвѣтственныхъ единицахъ. Единицы длины и массы будемъ считать произвольными, единицы же времени выберемъ такъ, чтобы

$$\frac{a^2}{2g\bar{x}}=1, \tag{40}$$

гдѣ $\bar{x}$ разстояніе центра тяжести отъ точки опоры, а g напряженіе тяжести.

Теорема III. *Концы двухъ векторовъ, изъ которыхъ первый представляетъ проекцію на плоскость равныхъ радіусовъ инерціи единицы длины, отложенной отъ точки опоры вверхъ, а второй есть векторъ второй степени отъ проекціи угловой скорости на ту же плоскость, находятся все время движенія другъ отъ друга на неизмѣнномъ разстояніи.*

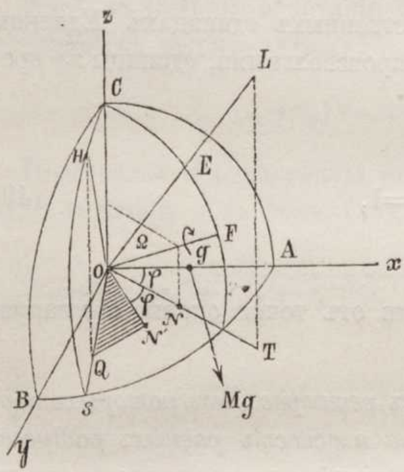
Возьмемъ [фиг.(11)] начало подвижныхъ прямоугольныхъ осей координатъ въ неподвижной точкѣ o и направимъ ось oz по оси, которой соотвѣтствуетъ радіусъ инерціи c, а ось ox направимъ, какъ было сказано, чрезъ центръ тяжести G разсматриваемаго тѣла массы M ($oG=\bar{x}$). Проведемъ изъ центра o сферу ABC радіусомъ, равнымъ единицѣ, и отмѣтимъ точки ея пересѣченія H, E, F съ вертикальною линіею, съ главнымъ моментомъ количествъ движенія L и съ угловою скоростью Ω. Проекціи векторовъ OH, Ω, L на плоскость xoy пусть будутъ:

$$oQ = \sin\theta,\ oN = r,\ oT = Ma^2 r,$$

при чемъ θ есть уголъ HoC.

Называя уголъ NoA чрезъ φ, построимъ векторъ $0N' = r^2$, образующій съ осью ox уголъ 2φ и являющійся векторомъ второй степени относительно вектора oN. Соединимъ прямою точки N' и Q и займемся изслѣдованіемъ движенія хорды $N'Q$.

Для этого разсмотримъ скорости точекъ N' и Q. Точка H остается неподвижной въ пространствѣ и потому имѣетъ относительно тѣла скорость, равную и противоположную скорости соотвѣтственной точки тѣла. Составляющая этой скорости по направленію плоскости xoy будетъ искомая скорость точки Q. Она слагается геометрически изъ скоростей u_1 и u_2, изъ которыхъ первая происходитъ отъ компонента ω угловой скорости около оси oz и направлена по перпендикуляру къ oQ въ сторону ox, а вторая происходитъ отъ компонента r угловой скорости и направлена перпендикулярно къ oN въ сторону оси oy. Эти скорости имѣютъ величины:



Фиг. 11.

$$u_1 = \omega \sin\theta, \qquad (41)$$
$$u_2 = r \cos\theta.$$

Для опредѣленія скорости точки N' слѣдуетъ сначала разсмотрѣть скорость точки N. Если бы сила вѣса тѣла Mg не дѣйствовала, то точка L была бы неподвижна въ пространствѣ и точка T имѣла бы въ плоскости xoy отъ компонентовъ, угловой скорости ω и r слѣдующую скорость:

$$M\omega r(a^2-c^2),$$

направленную по перпендикуляру къ oT въ сторону ox. Но, такъ какъ сила тяжести дѣйствуетъ, то точка L получаетъ отъ этой причины скорость, геометрически равную моменту пары, получаемой при перенесеніи силы Mg въ неподвижную точку o. Скорость точки T на подвижныхъ осяхъ xoy отъ этой причины будетъ имѣть величину:

$$Mg\bar{x}\cos\theta$$

и будетъ направлена по оси oy. Замѣтивъ, что

$$oN : oT = 1 : Ma^2,$$

найдемъ для скорости точки N двѣ составляющія:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{a^2-c^2}{a^2}\, r\omega, \\ v_2 &= \frac{g\bar{x}}{a^2}\cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

изъ которыхъ первая направлена перпендикулярно къ oN въ сторону ox, а вторая — по оси oy, т. е. подъ угломъ $\frac{\pi}{2}-\varphi$ къ вектору oN.

Такъ какъ по соотношенію (1) и условію (40)

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{g\bar{x}}{a^2}=\frac{1}{2},$$

то найденныя скорости получаютъ слѣдующій видъ:

$$v_1 = \frac{1}{2}\, r\omega,$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\cos\theta. \tag{43}$$

Что касается до скорости точки N', то на основаніи сказаннаго о скорости вектора второй степени заключаемъ, что скорость точки N' будетъ слагаться изъ двухъ скоростей:

$$w_1 = \omega r^2,$$

$$w_2 = r\cos\theta, \tag{44}$$

изъ которыхъ первая перпендикулярна къ вектору oN' и направлена къ оси ox, а вторая образуетъ съ oN' уголъ $\frac{\pi}{2} - \varphi$, т. е. перпендикулярна къ oN, и направлена къ oy.

Сравненіе форм. (44) и (41) приводитъ насъ къ заключенію, что отъ скоростей u_1 и w_1 хорда $N'Q$ вращается около точки o съ угловою скоростью ω въ сторону обратную вращенія тѣла около оси oz [1]), а вслѣдствіе скоростей u_2 и w_2 эта хорда движется поступательно, направляясь по перпендикулярному направленію отъ вектора oN со скоростью $r\cos\theta$. Отъ обѣихъ этихъ причинъ длина хорды $N'Q$ не измѣняется, что и требовалось доказать. Постоянную длину хорды $N'Q$ мы будемъ называть чрезъ k и будемъ разсматривать k, какъ векторъ, направленный отъ N' къ Q.

§ 7. Для опредѣленія движенія точки N по плоскости xoy намъ надо вывести еще одну теорему, которая является слѣдствіемъ интеграла живыхъ силъ и интеграла площадей. Напишемъ эти интегралы, пользуясь фигурою (11):

---

[1]) Это свойство указывается Г. К Сусловымъ. „Вращеніе тяжелаго твердаго тѣла около неподвижнаго полюса“ § 3.

$$\frac{Ma^2\omega^2}{2}+Ma^2r^2+2M g\bar{x}\cos\beta=Mg\bar{x}h,$$

$$\frac{Ma^2}{2}\omega\cos\theta+Ma^2r\cos\gamma=\frac{1}{4}M\sqrt{2g\bar{x}a}\,l, \tag{45}$$

гдѣ h и l суть постоянныя отвлеченныя величины, β есть уголъ HoA, а γ есть уголъ HoN.

Называя чрезъ ξ и η проекціи вектора k на оси ox и oy, найдемъ, что

$$\cos\beta=r^2\cos 2\varphi+\xi,$$
$$\cos\gamma=r^2\cos\varphi+(\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi). \tag{46}$$

Подставляемъ эти величины въ форм. (45) и изъ полученныхъ уравненій опредѣляемъ ω^2 и $2\omega\cos\theta$, обращая вниманіе на форм. (40):

$$\omega^2=h-2r^2(1+\cos 2\varphi)-2\xi,$$
$$2\omega\cos\theta=l-4r^3\cos\varphi-4r(\xi\cos\varphi+\xi\sin\varphi). \tag{47}$$

Къ этимъ соотношеніямъ присоединяемъ еще формулу:

$$\sin^2\theta=(r^2\cos 2\varphi+\xi)^2+(r^2\sin 2\varphi+\zeta)^2,$$

которую преобразуемъ такъ:

$$\cos^2\theta=1-k^2-r^4-2r^2(\xi\cos 2\varphi+\eta\sin 2\varphi). \tag{48}$$

Предполагаемъ теперь, что скорость движенія точки N по плоскости xoy выражается векторомъ V и опредѣляемъ проекціи этого вектора на оси ox и oy на основаніи форм. (43):

$$V_x=\frac{1}{2}\omega r\sin\varphi,$$
$$V_y=\frac{1}{2}(-\omega r\cos\varphi+\cos\theta). \tag{49}$$

изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что

$$V^2=\frac{1}{4}(\omega^2 r^2-2\omega r\cos\theta\cos\varphi+\cos^2\theta).$$

Исключая отсюда ω^2, $2\omega\cos\theta$ и $\cos^2\theta$ съ помощію форм. (47) и (48), находимъ:

$$V^2=\frac{1}{4}(1-k^2-lr\cos\varphi+hr^2-r^4). \tag{50}$$

Такимъ образомъ *величина скорости точки N вполнѣ опредѣляется по координатамъ* (r, φ) *этой точки.*

Чтобы удобнѣе опредѣлить направленіе скорости V будемъ разсматривать векторъ $V'=V^2$, являющійся векторомъ второй степени отъ скорости V, и напишемъ на основаніи форм.(49) его проекціи по осямъ:

$$V_x'=V_x^2-V_y^2=\frac{1}{4}[-\omega^2 r^2\cos2\varphi+2\omega r\cos\theta\cos\varphi-\cos^2\theta],$$

$$V_y'=2V_xV_y=\frac{1}{4}[-\omega^2 r^2\sin2\varphi+2\omega r\cos\theta\sin\varphi].$$

Исключая отсюда ω^2, $2\omega\cos\theta$ и $\cos^2\theta$ съ помощію форм. (47) и (48), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}V_x'&=\frac{1}{4}(-1+k^2+lr\cos\varphi-hr^2\cos2\varphi+r^4\cos4\varphi)-\xi r^2\sin^2\varphi,\\ V_y'&=\frac{1}{4}(lr\sin\varphi-hr^2\sin2\varphi+r^4\sin4\varphi)-\eta r^2\sin^2\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Вообразимъ на плоскости xoy систему криволинейныхъ координатъ (s_1, s_2) при условіи:

$$\alpha=-1+k_2,\ \alpha_1=l,\ \alpha_2=-h,\ \alpha_3=0,\ \alpha_4=1$$

и напишемъ проекціи по осямъ ox и oy вектора R, соотвѣтствующаго точкѣ N. Онѣ будутъ:

$$X = -1 + k^2 + lr\cos\varphi - hr^2\cos 2\varphi + r^4\cos 4\varphi$$
$$Y = lr\sin\varphi - hr^2\sin 2\varphi + r^4\sin 4\varphi. \qquad (52)$$

Это позволяетъ формулу (51) представить въ видѣ:

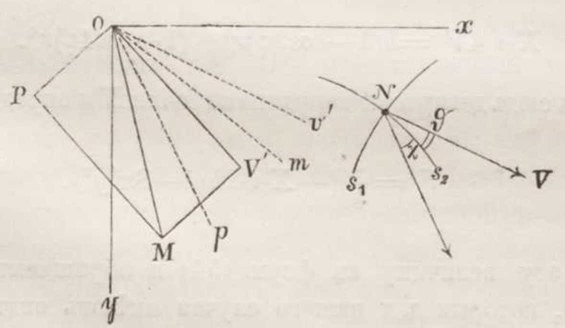
$$\frac{1}{4}X = V_x' + \xi y^2,$$
$$\frac{1}{4}Y = V_y' + \eta y^2, \qquad (53)$$

гдѣ y есть ордината точки N.

Сказанное приводитъ насъ къ теоремѣ (IV).

Теорема IV. *Векторъ $\frac{R}{4}$ есть геометрическая сумма вектора второй степени отъ скорости точки N и вектора ky^2, направленнаго по вектору k.*

§ 8. Проведемъ чрезъ точку N координатныя линіи $s_2 = const.$ и $s_1 = const.$, которыя на фиг. (12) обозначены чрезъ s_2 и s_1, и построимъ согласно теоремѣ (IV) параллелограммъ $oV'MP$, въ которомъ сторона oV' есть векторъ второй степени отъ скорости



Фиг. 12.

рости V точки N, діагональ oM направлена по вектору R и равна $\frac{R}{4}$, а сторона oP направлена по вектору k и равна k^2y.

Раздѣлимъ углы $V'ox$, Mox и Pox пополамъ прямыми ov', om и op и замѣтимъ, что прямая ov' будетъ параллельна скорости V точки N, прямая же om по теоремѣ (I) будетъ параллельна касательной къ кривой $s_2=const.$ въ точкѣ N. Если назовемъ чрезъ 2ϑ и 2χ углы MoV' и MoP, то углы mov и mop будутъ ϑ и χ. Эти углы могутъ быть опредѣлены по обыкновеннымъ форм. тригонометріи изъ треугольника $oV'M$.

Мы получимъ:

$$tg\vartheta=\sqrt{\frac{\left(\frac{R}{4}-V^2+y^2k\right)\left(-\frac{R}{4}+V^2+y^2k\right)}{\left(\frac{R}{4}+V^2-y^2k\right)\left(\frac{R}{4}+V^2+y^2k\right)}},$$

$$tg\chi=\sqrt{\frac{\left(\frac{R}{4}+V^2-y^2k\right)\left(-\frac{R}{4}+V^2+y^2k\right)}{\left(\frac{R}{4}-V^2+y^2k\right)\left(\frac{R}{4}+V^2+y^2k\right)}}. \quad (54)$$

Вторыя части этихъ формулъ легко выразить по s_1 и s_2. Для этого сложимъ величину X, данную форм. (52), съ $4V^2$ (форм.50). Получимъ:

$$X+4V^2=h(1-cos2\varphi)r^2-(1-cos4\varphi)r^4.$$

Вводимъ сюда декартовы координаты точки N и опредѣляемъ V^2:

$$V^2=\frac{1}{4}(-X+2hy^2-8x^2y^2). \quad (55)$$

Вносимъ эту величину въ форм. (54) и обращаемъ вниманіе на ур. (9), которыя для нашего случая имѣютъ видъ:

$$s_1=\frac{-R+X}{2y^2}+4x^2,$$

$$s_2=\frac{R+X}{2y^2}+4x^2. \quad (56)$$

Получаемъ:

$$tg\vartheta=\sqrt{-\frac{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}},$$

$$tg\chi=\sqrt{-\frac{(s_1-k_1)(s_2-k_2)}{(s_2-k_1)(s_1-k_2)}},\tag{57}$$

гдѣ

$$k_1=h-2k,\ k_2=h+2k.\tag{58}$$

Первая изъ форм. (57) даетъ намъ ясное геометрическое представленіе о видѣ траекторіи точки N.

Эта траекторія пересѣкаетъ семейство координатныхъ линій $s_2=const.$ *подъ угломъ* ϑ, *зависящимъ указаннымъ образомъ отъ координатныхъ параметровъ* s_1, s_2. Вторая форм.(57) позволяетъ по направленію касательной, проведенной въ точкѣ N къ координатной линіи $s_2=const.$, найти направленіе прямой op, а слѣдовательно и вектора k.

Векторъ $oM=\frac{R}{4}$ при данной точкѣ N опредѣляется по величинѣ и по направленію, что же касается векторовъ $oV'=V^2$ и $oP=ky^2$, то они опредѣляются при данной точкѣ N по величинѣ (форм. (50)). По этимъ даннымъ мы можемъ построить или параллелограммъ $oV'MP$, представленный на фиг. (12), или другой параллелограммъ, который получается чрезъ поворотъ нарисованнаго на 180° около діагонали oM. Это показываетъ, что въ каждой точкѣ N возможны два направленія скорости V, которыя наклонены къ касательной координатной кривой $s_2=const.$ подъ равными углами. Задача о построеніи семейства траекторій точки N при заданныхъ значеніяхъ постоянныхъ h, l, k есть задача второй степени, и упомянутое семейство будетъ имѣть огибающія кривыя.

Данному направленію скорости V соотвѣтствуетъ опредѣленное направленіе вектора k, а слѣдовательно (теорема I) и опредѣленное положеніе точки Q на фиг. (11). Вслѣдствіе этого при разсматриваніи движенія тѣла, зная мѣсто точки Q, мы не будемъ имѣть никакого сомнѣнія, по которому изъ двухъ указанныхъ направленій движется точка N.

Первое ур. (57) позволяетъ намъ составить дифференціальное уравненіе траекторіи точки N въ принятыхъ криволинейныхъ координатахъ.

Мы имѣемъ:

$$\frac{ds_2}{\Delta s_2} : \frac{ds_1}{\Delta s_1} = tg\vartheta .$$

Подставляя сюда соотвѣтственныя величины изъ форм. (25) и (57), видимъ, что

$$\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} - \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} = 0, \tag{59}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} S_1 &= (e_1 - s_1)(e_2 - s_1)(e_3 - s_1)(k_1 - s_1)(k_2 - s_1), \\ S_2 &= (e_1 - s_2)(e_2 - s_2)(e_3 - s_2)(k_1 - s_2)(k_2 - s_2). \end{aligned} \tag{60}$$

Что касается до связи между положеніемъ точки N на плоскости xoy и временемъ, то она найдется при разсмотрѣніи проекцій скорости V на касательныя кривыхъ $s_1 = const.$ и $s_2 = const.$ Мы имѣемъ:

$$\frac{1}{\Delta s_1}\,\frac{ds_1}{dt} = V\cos\vartheta, \quad \frac{1}{\Delta s_2}\,\frac{ds_2}{dt} = V\sin\vartheta .$$

Преобразуемъ эти форм. па основаніи ур. (25) и на основаніи формулъ:

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{y^2}{2V}\sqrt{\frac{(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)}{R}}, \\ \sin\vartheta &= \frac{y^2}{2V}\sqrt{\frac{-(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)}{R}}, \end{aligned} \tag{61}$$

которыя получаются рядомъ съ форм. (57) изъ треугольника $oV'M$ (фиг. 12).

Полученные при этомъ результаты можно написать такъ:

$$dt = \frac{R}{y^2} \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}, \quad dt = \frac{R}{y^2} \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}.$$

Такъ какъ форм. (56) даютъ намъ:

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{y^2}, \tag{62}$$

то чрезъ умноженіе двухъ вышенаписанныхъ выраженій dt соотвѣтственно на s_1, s_2 и вычитаніе ихъ, находимъ:

$$dt = \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{S_2}} - \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{S_1}}. \tag{63}$$

Формулы (59) и (63) позволяютъ выразить s_1 и s_2 гиперэллиптическими функціями времени и являются фундаментальными уравненіями С. В. Ковалевской.

§ 9. Положеніе точки Q по данному положенію точки N находится съ помощію теоремы (III). Разсматривая фиг. (11), приходимъ къ слѣдующему заключенію: *Для построенія траекторіи точки Q по данной траекторіи точки N слѣдуетъ всѣ векторы oN замѣнить векторами второй степени oN' и чрезъ концы ихъ N' провести векторы $N'Q=k$. Мѣсто концовъ этихъ послѣднихъ векторовъ будетъ траекторія точки Q.*

Эта траекторія представляетъ проекцію на плоскость xoy пути, который описываетъ въ тѣлѣ точка N. Если соединимъ всѣ точки этого сферическаго пути съ неподвижною точкою o, то получимъ конусъ, который я называю *конусомъ вертикальной линіи.*

Для полнаго знанія положенія тѣла въ пространствѣ мы опредѣлимъ еще уголъ ψ, образованный плоскостью HoC съ нѣкоторою неподвижною плоскостью, проходящею чрезъ вертикальную линію.

Производная $\dfrac{d\psi}{dt}$ найдется, разсматривая на фиг. (11), составляющую скорости точки C по направленію перпендикуляра къ плоскости HoC. Эта составляющая будетъ зависѣть только отъ проекціи угловой скорости r на oQ и будетъ имѣть величину:

$$r\cos(\varphi+\nu),$$

гдѣ ν есть уголъ QoN'. Раздѣливъ найденную скорость на $\sin\theta$, получимъ искомую производную:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{r\cos(\varphi+\nu)}{\sin\theta}. \tag{64}$$

На основаніи сказаннаго въ этомъ и предыдущемъ параграфѣ интерпретируемъ разсматриваемое движеніе теоремою [V].

Теорема V. *Движеніе твердаго тѣла въ случаѣ С. В. Ковалевской совершается такъ, что соединенный съ тѣломъ конусъ вертикальной линіи скользитъ чрезъ вертикаль oH по закону, характеризуемому движеніемъ точки N, а вертикальная плоскость, проходящая чрезъ точку C, вращается около вертикали oH съ угловою скоростью, данною форм.(64).*

§ 10. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи изслѣдуемаго движенія. Простѣйшимъ является случай $k=0$, указанный Н. Б. Делоне [1]). Этотъ случай имѣетъ мѣсто, когда въ начальный моментъ времени (фиг. 11) радіусъ oQ направляется по oN', а угловая скорость Ω такова, что точка Q совпадаетъ съ N', т. е.

$$\sin\theta=r^2=\Omega^2\sin^2\mu, \tag{65}$$

гдѣ μ есть уголъ CoF. Если бы мы желали выразить это условіе при произвольныхъ единицахъ времени, то должны бы были на основаніи форм. (40) замѣнить Ω на

$$\Omega\ \frac{a}{\sqrt{2gx}},$$

---

[1]) Н. Б. Делоне въ вышеупомянутомъ сочиненіи даетъ для случая $k=0$ геометрическую интерпретацію аналогичную той, которая предложена Дарбу для случая Лагранжа. По этой интерпретаціи тѣло, двигаясь вмѣстѣ съ подвижнымъ годографомъ угловой скорости, катится этою кривою безъ скольженія по нѣкоторой неподвижной поверхности вращенія.

что дало бы намъ:

$$sin\theta = \frac{a^2}{2gx}\Omega^2 sin^2\mu. \tag{65'}$$

Если въ начальный моментъ времени точки N и Q сливаются, то по теоремѣ (III) онѣ будутъ совпадать всегда, и векторъ oQ будетъ все время движенія представлять векторъ второй степени отъ проекціи угловой скорости, такъ что $sin\theta = r^2$ и $\nu = 0$. По теоремѣ (IV) скорость V точки N будетъ геометрически представляться векторомъ $\frac{R}{4}$, т. е. будетъ направлена по касательной къ кривой $s_2 = const.$ Это значитъ, что траекторія точки N будетъ одна изъ координатныхъ линій $s_2 = const.$ Какое именно значеніе имѣетъ *const.*, видно изъ форм. (57), которая даетъ $\vartheta = 0$ при

$$s_2 = k_1 = k_2 = h$$

Замѣнивъ въ координатной кривой $s_2 = h$ всѣ векторы векторами второй степени, мы получимъ траекторію точки Q, по которой построимъ конусъ вертикальной линіи. Но будетъ гораздо проще получить уравненіе этого конуса сразу, воспользовавшись теоремою (VI).

Теорема VI. *Въ случаѣ $k = 0$ проекція главнаго момента количествъ движенія на вертикальную плоскость, проходящую чрезъ ось неравныхъ радіусовъ инерціи, образуетъ съ вертикальною линіею постоянный уголъ.*

Положимъ въ первой форм. (47) $\xi = 0$ и дадимъ ей слѣдующій видъ:

$$\omega^2 = h - 4r^2 cos^2\varphi,$$

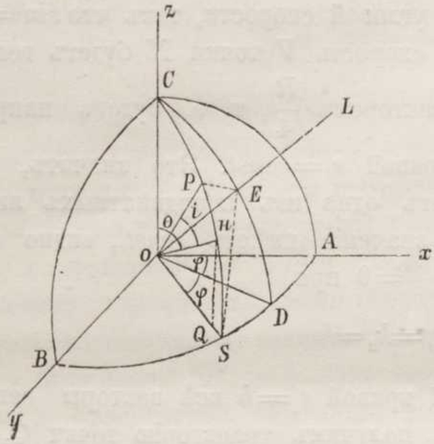
откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{M^2a^4}{4}\omega^2 + M^2a^4r^2cos^2\varphi = \frac{M^2a^4h}{4}.$$

Такъ какъ первая часть этого равенства представляетъ квадратъ проекціи главнаго момента количествъ движенія L на указанную въ теоремѣ плоскость, то заключаемъ, что эта проекція имѣетъ постоянную величину

$$\frac{Ma^2\sqrt{h}}{2}.$$

Предположимъ, что упомянутая проекція на фиг. (13) направлена по oP и назовемъ уголъ PoH, который она образуетъ съ вертикалью oH, чрезъ i. Такъ какъ проекція L на oH имѣетъ постоянную величину:



Фиг. 13.

$$\frac{1}{4}\,M\sqrt{2gx}\,al,$$

то

$$\cos i = \frac{\sqrt{2gx}}{a}\,\frac{l}{2\sqrt{h}},$$

или по форм. (40)

$$\cos i = \frac{l}{2\sqrt{h}}. \qquad (66)$$

Чтобы составить на основаніи доказанной теоремы уравненіе конуса вертикальной линіи, обращаемъ вниманіе на прямоугольные сферическіе треугольники EPS и EDS. Такъ какъ у обоихъ треугольниковъ гипотенуза общая, то произведеніе косинусовъ ихъ катетовъ равны.

Но

$$\cos(EP) = \frac{Ma^2\sqrt{h}}{2L}, \quad \cos(ED) = \frac{Ma^2\sqrt{\sin\theta}}{L},$$

поэтому

$$\sin(\theta - i)\,\frac{\sqrt{h}}{2} = \sqrt{\sin\theta}\,\cos\varphi,$$

или

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{h}}{2}\,\frac{\sin(\theta-i)}{\sqrt{\sin\theta}}. \tag{67}$$

Такъ какъ здѣсь θ есть полярный уголъ точки H, а 2φ ея долгота, то найденное уравненіе представляетъ намъ сферическую кривую, по которой конусъ вертикальной линіи пересѣкаетъ сферу радіуса единицы. Входящій въ формулу постоянный уголъ i слѣдуетъ считать положительнымъ, если дуга HP откладывается отъ точки H вверхъ и отрицательнымъ въ обратномъ случаѣ.

Приписывая углу θ различныя значенія отъ нуля до π, будемъ находить по форм. (67) величины $\cos\varphi$, при чемъ каждый косинусъ дастъ намъ два положенія точки H, одно соотвѣтствуетъ долготѣ 2φ, а другое—долготѣ $4\pi-2\varphi$ или, что одно и то же, $2\pi-2\varphi$. Изъ этого заключаемъ, что наша сферическая кривая симметрична относительно меридіана AC. Посмотримъ, въ какихъ точкахъ пересѣкаетъ она этотъ меридіанъ. При $\theta=i$ для положительнаго значенія i и при $\theta=\pi+i$ для отрицательнаго значенія i по форм. (67) получаемъ $\cos\varphi=0$, слѣдовательно $2\varphi=2\pi-2\varphi=\pi$. Изъ этого заключаемъ, что наша сферическая кривая пересѣкаетъ разсматриваемый меридіанъ въ точкѣ H_0 (фиг. 14), лежащей на продолженіи дуги AC на разстояніи $H_0C=i$ (или $H_0C=\pi+i$). Остальныя точки пересѣченія найдутся изъ предположеній $\cos^2\varphi=1$, $2\varphi=0$ или $2\varphi=2\pi$. Эти предположенія приводятъ насъ къ условію:

$$\frac{4}{h}\sin\theta-\sin^2(\theta-i)=0. \tag{68}$$

Дѣлая здѣсь подстановку:

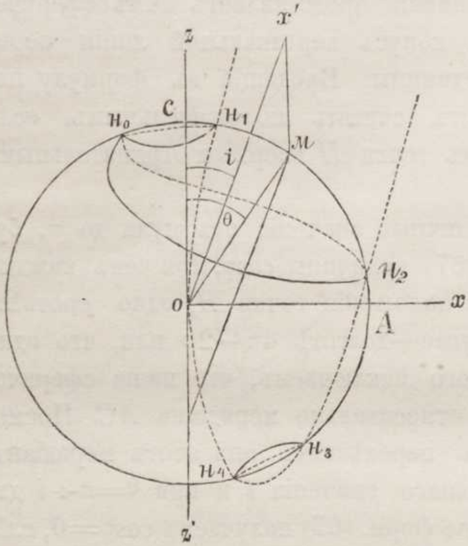
$$tg\,\frac{\theta-i}{2}=u,$$

находимъ для опредѣленія u уравненіе четвертой степени:

$$F(u)=\frac{1}{h}[2u\cos i+(1-u^2)\sin i](1+u^2)-u^2=0. \tag{68'}$$

Отсюда заключаемъ, что разсматриваемая кривая пересѣчетъ меридіанъ еще, вообще говоря, въ четырехъ точкахъ H_1, H_2, H_3, H_4. Относительно этихъ точекъ можетъ быть дано геометрическое толкованіе. Изложимъ его для положительнаго i.

Вообразимъ на фиг. (14) нѣкоторыя косоугольныя оси координатъ $z'ox'$, въ которыхъ ось ox' образуетъ съ нашею осью oz уголъ i, а ось oz' направлена въ сторону прямопротивоположную оси oz. Какая-нибудь точка M меридіана, опредѣляемая угломъ θ, будетъ имѣть относительно этихъ осей координаты:



Фиг. 14.

$$z' = \frac{\sin(\theta - i)}{\sin i},$$

$$x' = \frac{\sin\theta}{\sin i}.$$

Опредѣляя отсюда $\sin\theta$ и $\sin(\theta - i)$ и подставляя въ ур. (68), найдемъ:

$$\frac{4}{h \sin i} . x' - z'^2 = 0. \tag{69}$$

Это ур. показываетъ, что искомыя точки H_1, H_2, H_3, H_4 суть точки пересѣченія меридіана AC съ параболой, ось которой параллельна ox' и которая прикасается въ точкѣ o къ прямой zz'. Такъ какъ $cs^2\varphi > 1$, то по (67) для всѣхъ точекъ сферической кривой первая часть ур. (68) должна быть болѣе нуля, а слѣдовательно должна быть болѣе нуля и первая часть ур. (69). Это показываетъ, что концы дугъ θ, соотвѣтствующіе точкамъ нашей сферической кривой, лежатъ на отрѣзахъ меридіана CA, заключенныхъ внутри начертанной параболы, т. е. разсматриваемая сферическая кривая должна состоять, вообще говоря, изъ двухъ вѣтвей, изъ которыхъ одна заключена между параллельными кругами, проходящими чрезъ точки H_1 и H_2, а другая заключена между параллельными кругами, проходящими чрезъ точки H_3 и H_4. На фиг. (14) первая вѣтвь имѣетъ въ H_0 кратную точку, а вторая вѣтвь представляетъ нѣкоторую замкнутую кривую.

Если $i=0$, то точки H_0 и H_1 сливаются съ C, и кривая получаетъ здѣсь точку возврата. Уравненіе (67) принимаетъ при этомъ упрощенный видъ:

$$cos\varphi=\frac{\sqrt{h}}{2}\sqrt{sin\theta}. \tag{70}$$

Вышеупомянутая парабола обращается при этомъ въ двѣ параллельныя прямыя, изъ которыхъ одна есть ось oz. Такъ какъ вторая часть ур. (70) получаетъ одинаковыя значенія при θ и при $\pi-\theta$, то разсматриваемая сферическая кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, симметричныхъ относительно плоскости экватора xoy. Замѣняя въ ур. (70) $\sqrt{sin\theta}$ на r, найдемъ полярное уравненіе траекторіи точки N:

$$r=\frac{2}{\sqrt{h}}cos\varphi,$$

которое представляетъ окружность, проходящую чрезъ точку o и имѣющую центръ на оси ox. Кривая, получаемая изъ этой окружности чрезъ замѣну всѣхъ радіусовъ на векторы второй степени, будетъ улитка Паскаля, которая представитъ проекцію на плоскость xoy линіи пересѣченія сферы съ конусомъ вертикальной линіи. Если точки H_2 и H_3 или H_3 и H_4 между собою сливаются, то разсматриваемая сферическая кривая состоитъ изъ одной вѣтви съ двумя кратными точками или изъ вѣтви съ одною кратною точкою и изъ одной отдѣльной точки.

Условіе равенства двухъ корней ур. (68) (или 68′) можетъ быть выражено тѣмъ, что искомая величина θ удовлетворяетъ одновременно ур. (68) и уравненію:

$$\frac{2}{h}\cos\theta - \sin(\theta-i)\cos(\theta-i)=0. \tag{71}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ, что

$$tgi=-\frac{tg\theta}{2tg^2\theta+1}, \tag{72}$$

$$3\sin^2\theta - h\sin\theta + 1 = 0.$$

Опредѣляя изъ послѣдняго ур. (72) величину $tg\theta$ и подставляя въ первое, найдемъ связь между tgi и h, при которой происходитъ сліяніе точекъ H_2 и H_3 или H_3 и H_4. Такъ какъ первая часть ур. (68) положительна для точекъ, лежащихъ внутри вышеописанной параболы, и имѣетъ отрицательное значеніе для точекъ, лежашихъ внѣ этой параболы, то случай сліянія точекъ H_2 и H_3 характеризуется условіемъ *min.* первой части ур.(68), а случай сліянія точекъ H_3 и H_4—условіемъ *max.* этой части.

Это соотвѣтствуетъ верхнему или нижнему знаку неравенства:

$$-2\sin\theta - h\cos2(\theta-i) \gtrless 0.$$

На основаніи ур. (68) это неравенство приводится къ виду:

$$6\sin\theta - h \lessgtr 0. \tag{73}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\sin\theta < \frac{h}{6}$$

при сліяніи точекъ H_2 и H_3 и

$$\sin\theta > \frac{h}{6}$$

при сліяніяхъ точекъ H_3 и H_4.

Прибавимъ къ этому, что на основаніи первой форм. (72) при $i<\frac{\pi}{2}$ будемъ имѣть $\theta>\frac{\pi}{2}$.

Если движеніе тѣла началось такъ, что вертикальная линія проходитъ чрезъ слившіяся точки H_3 и H_4, то она все время движенія будетъ сохранять въ тѣлѣ неизмѣнное мѣсто и слѣдовательно явится перманентною осью вращенія. Это вращеніе будетъ устойчивымъ по отношенію къ весьма малому измѣненію постоянныхъ i и h, такъ какъ всякое измѣненіе обращаетъ разсматриваемую нами отдѣльную точку сферической кривой въ нѣкоторый весьма малый замкнутый контуръ. Что касается до случая, въ которомъ вертикальная линія проходитъ въ начальный моментъ чрезъ слившіяся точки H_2 и H_3, то онъ соотвѣтствуетъ тоже вращенію около перманентной оси (что будетъ выяснено ниже); только это вращеніе неустойчиво, такъ какъ малое измѣненіе i и h заставляетъ сферическую кривую разложиться на двѣ конечныя вѣтви, и вертикальная линія начинаетъ свое движеніе въ тѣлѣ по той или другой полости конуса, соотвѣтствующаго этимъ вѣтвямъ.

Вопросъ объ отысканіи перманентныхъ осей тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, не представляетъ особыхъ затрудненій и обстоятельно изслѣдованъ въ сочиненіяхъ Стауде [1]) и Б. К. Млодзѣевскаго [2]). При этомъ изслѣдованіи обнаружилось, что мѣстомъ перманентныхъ осей вращенія въ тѣлѣ при заданныхъ направленіи прямой, соединяющей центръ тяжести съ неподвижною точкою, является нѣкоторый конусъ втораго порядка. Для случая С. В. Ковалевской упомянутый конусъ распадается на двѣ плоскости zx и yx, изъ которыхъ только первая соотвѣтствуетъ конечнымъ угловымъ скоростямъ.

Предположимъ, что перманентная ось вращенія совпадаетъ съ вертикалью oH, образующею съ осью oz уголъ θ, и установимъ связь между θ и угловою скоростью Ω изъ того условія, что скорость, сообщаемая концу главнаго момента количествъ двяженія отъ вращенія Ω, геометрически равна моменту вращающей пара отъ силы тяжести. Это требуетъ, чтобы

---

[1]) *Staude.* Crelle Bd. 113.

[2]) *Б. К. Млодзѣевскій.* Труды отдѣленія физическихъ наукъ О. Л. Е. Т. VII.

$$Ma^2\Omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{Ma^2}{2}\,\Omega^2 \sin\theta\cos\theta = gx\cos\theta,$$

откуда получаемъ:

$$\sin\theta = \frac{2g\bar{x}}{\Omega^2 a^2}.$$

Сравнивая это уравненіе съ ур. (65′) видимъ, что второе при $\mu=0$ приводится къ первому. Это показываетъ намъ, что *всѣ перманентныя вращенія въ задачѣ С. В. Ковалевской принадлежатъ къ случаю Делоне.* На основаніи форм. (40) имѣемъ:

$$\Omega^2 \sin\theta = 1.$$

Если теперь приложимъ къ случаю существованія перманентной оси первую форм. (47), то найдемъ изъ нея:

$$\Omega^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) = h.$$

Исключеніе Ω^2 изъ двухъ вышенаписанныхъ формулъ приводитъ насъ ко второй форм. (72). Такимъ образомъ перманентныя оси соотвѣтствуютъ (фиг. 14) случаю сліянія точекъ H_2 и H_3 или H_3 и H_4, при чемъ рѣшая первое ур. (72) видимъ, что одинъ изъ его корней будетъ болѣе $\frac{h}{6}$, а другой менѣе, т. е. одинъ будетъ соотвѣтствовать сліянію точокъ H_2 и H_3, а другой H_3 и H_4.

Если неравенство (73) обращается въ равенство

$$h = 6\sin\theta,$$

то парабола (фиг (14)) будетъ имѣть соприкосновеніе 2-го порядка къ кругу и три точки ея пересѣченія съ кругомъ H_2, H_3, H_4 сливаются между собою. Подставляя вышенаписанную величину h во вторую форм. (72) получаемъ уравненіе, изъ котораго находимъ, что

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Линія поресѣченія конуса вертикальной линіи со сферою будетъ имѣть кратную точку въ H_1 и точку возврата въ точкѣ, представляющей сліяніе точекъ H_2, H_3, H_4. Движеніе твердаго тѣла, при которомъ конусъ вертикальной линіи имѣетъ указанный видъ, было изслѣдовано Б. К. Млодзѣевскимъ, который показалъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ всѣ элементы, характеризующіе движеніе тѣла, выражаются алгебраическими раціональными функціями времени. Положеніе вертикали, проходящей чрезъ точку возврата, соотвѣтствуетъ перманентной оси вращенія. Вращеніе это относительно измѣненія постоянныхъ i и h будетъ, вообще говоря, неустойчиво. Анализъ Млодзѣевскаго показываетъ, что при движеніи по разсматриваемому конусу вертикальной линіи вертикаль oH приближается къ положенію перманентной оси, но достигаетъ этого положенія только по прошествіи безконечно большаго времени. Такое же обстоятельство имѣетъ мѣсто для случая сліянія точекъ H_2 и H_4.

§ 11. Для полнаго рѣшенія задачи о движеніи въ случаѣ Делоне мы должны еще опредѣлить θ и ψ въ функціи времени. Такъ какъ (фиг. 13) вся скорость точки C происходитъ только отъ вращенія r, то проекція этого компонента скорости на горизонтальную прямую, перпендикулярную oS, будетъ выражать скорость точки C по направленію дуги HC. Вслѣдствіе этого

$$\frac{d\theta}{dt} = r\sin\varphi = \sqrt{\sin\theta}\,\sin\varphi.$$

Подставляя сюда выраженія $\sin\varphi$, получаемое изъ форм. (67), находимъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\sin\theta - \frac{h}{4}\sin^2(\theta - i)}, \tag{74}$$

что съ помощію подстановки (форм. (68'))

$$tg\,\frac{\theta - i}{2} = u$$

приводитъ къ эллиптическому интегралу:

$$t+\tau=\int\frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \qquad (74')$$

что же касается до угла ψ, то онъ найдется по форм. (64), положивъ въ ней $\nu=0$, $r=\sqrt{sin\theta}$ и замѣнивъ въ ней величину $cos\varphi$ изъ форм. (67). Это даетъ намъ:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\sqrt{h}}{2}\frac{sin(\theta-i)}{sin\theta} \qquad (75)$$

Исключая время изъ форм. (74) и (75), получимъ дифференціальное уравненіе конуса, представляющаго мѣсто въ пространствѣ оси oC:

$$d\psi=\frac{\sqrt{h}}{2}\frac{sin(\theta-i)}{sin\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{sin\theta-\frac{h}{4}\,sin^2(\theta-i)}}. \qquad (76)$$

Это уравненіе съ помощію перемѣннаго u выражается такъ:

$$d\psi=\frac{\sqrt{h}}{2}\left[cos i+\frac{1-u^2 sin\, i}{2u}\right]^{-1}\frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \qquad (76')$$

Такъ какъ ось oC въ случаѣ С. В. Ковалевской есть полярная ось эллипсоида инерціи, то мы будемъ звать разсмотрѣнный конусъ *конусомъ полярной оси*. Все движеніе тѣла происходитъ такъ, что конусъ вертикальной линіи, соединенный съ тѣломъ, скользитъ чрезъ вертикальную линію, а ось неравныхъ моментовъ инерціи скользитъ по конусу полярной оси. Въ виду того, что задача объ опредѣленіи въ функціяхъ времени элементовъ, характеризующихъ положеніе тяжелаго твердаго тѣла въ пространствѣ въ случаѣ Делоне, разрѣшена въ сочиненіи Г. Г. Аппельрота [1]), мы не станемъ здѣсь заниматься разборомъ форм. (74) и (75). Скажемъ только въ заключеніе нѣсколько словъ, о случаѣ $i=0$ [2]), въ которомъ ко-

[1]) Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки. Часть II, § 5.

[2]) Это соотвѣтствуетъ въ изложеніи Делоне случаю $3l_1=2l^2$.

нусъ вертикальной линіи имѣетъ улиткообразный видъ (ур. 70). Этотъ случай получается, если направимъ ось oC вертикально и сообщимъ тѣлу около нея нѣкоторую начальную угловую скорость. Форм. (74) даетъ намъ при $i=0$ (начальное значеніе ψ беремъ за нуль)

$$\psi=\frac{\sqrt{h}}{2}\,t\,, \tag{77}$$

откуда слѣдуетъ, что въ случаѣ $i=0$ *вертикальная плоскость, проходящая чрезъ ось неравныхъ моментовъ инерціи, вращается равномѣрно около вертикальной линіи* [1]).

Если вообразимъ въ этой вращающейся плоскости колеблющійся около точки o физическій маятникъ, для котораго разстояніе центра тяжести отъ точки провѣса есть $\bar{x}$, а моментъ инерціи Ma^2, то, обозначая чрезъ θ уголъ вертикальной прямой, перпендикулярной къ этому маятнику, найдемъ, что

$$\frac{Ma^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=M\bar{x}g\sin\theta-\frac{Ma^2}{2}\,\frac{h}{4}\,\sin^2\theta+const.$$

Беремъ $const=0$ въ предположеніи, что въ горизонтальномъ положеніи маятникъ не имѣетъ скорости въ плоскости oHC и пишемъ согласно форм. (40):

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\sin\theta-\frac{h}{4}\sin^2\theta}. \tag{78}$$

Такъ какъ форм. (78) совпадаетъ съ форм. (74) при $i=0$, то заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ конусъ полярной оси и конусъ, описанный вышеупомянутымъ маятникомъ, будутъ вертикальною плоскостью oHC усѣкаться по взаимно перпендикулярнымъ образующимъ.

---

[1]) Это свойство впервые указано Г. Г. Аппельротомъ. Задача о движеніи . . . стр. 112.