

Рахимов Даниэль Рустамович

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ПЛАСТИЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ**

1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Рахимов

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Научный
руководитель:**

доктор физико-математических наук, доцент,
Савельева Инга Юрьевна.

**Официальные
оппоненты:**

Сухомлинов Лев Георгиевич,
доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Комплекса прочности ОА «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения»

Лямина Елена Алексеевна,
кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

**Ведущая
организация:**

Федеральное автономное учреждение «Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова».

Защита состоится «17» июня 2025 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.331.05 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «__» ____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Аттетков
Александр
Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Современные композиционные материалы получили широкое распространение в авиационно-космической отрасли, машиностроении и других высокотехнологичных отраслях промышленности благодаря сочетанию высокой удельной прочности, жесткости и коррозионной стойкости. При этом их сложная микроструктура уже на начальных этапах силового нагружения приводит к возникновению необратимой деформации, обусловленной разрывами волокон, пластическими микродеформациями в матрице, микротрещинами и расслоениями. Значительные необратимые деформации могут развиваться и при тепловом воздействии из-за различий в температурных коэффициентах линейного расширения матрицы и наполнителя.

Эти процессы во многом обусловлены неравномерным распределением внутренних напряжений и отличны от механизмов деформирования, характерных для традиционных металлических сплавов. Недостаточное внимание к этим эффектам в расчетных моделях может привести к преждевременному разрушению конструкции или нерациональным конструктивным решениям, что особенно критично для космической отрасли, где надежность, весовое совершенство и стабильность размеров изделия при воздействии температурных колебаний играет первостепенную роль.

Большинство существующих моделей пластичности либо требуют специальных экспериментов для идентификации большого числа параметров, либо не в полной мере учитывают нелинейное поведение композиционных материалов при совместном воздействии силовых и температурных факторов. Это зачастую приводит к существенным расхождениям между расчетными и экспериментальными данными, что затрудняет проектирование и снижает надежность изделий.

Эндохронные теории пластичности, хорошо зарекомендовавшие себя для описания нелинейного поведения композиционных материалов благодаря тому, что пластическое деформирование в них начинается с начального этапа нагружения, отражая особенности поведения данного типа материалов, в настоящее время недостаточно развиты для описания процессов при неизотермическом нагружении. Модель эндохронной теории термопластичности, предложенная Б.С. Сарбаевым (2019), не имеет строгого математического обоснования и демонстрирует неудовлетворительное количественное согласование с экспериментальными данными в условиях неизотермического нагружения. Модели К. Валанис (1991), а также Н.Н. Головина и Г.Н. Кувыркина (1990), основанные на термодинамических подходах с внутренними параметрами состояния, также показывают слабое соответствие экспериментальным данным при неизотермическом нагружении.

В данной диссертации представлено дальнейшее развитие эндохронной теории пластичности композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения на основе термодинамического подхода с внутренними параметрами состояния. Разработка подобных моделей особенно актуальна в свете постоянно расширяющегося диапазона рабочих температур и

усложняющихся условий эксплуатации композиционных конструкций в современном промышленном производстве.

Таким образом, исследование направлено на повышение достоверности моделирования пластичности композиционных материалов при сложных термосиловых нагрузках, что критически важно для разработки прочных и надежных конструкций в передовых технологиях.

Целью работы является разработка математических моделей пластичности композитных материалов в условиях неизотермического нагружения на основе термодинамического подхода с внутренними параметрами состояния, а также создание алгоритмов и численных методов для определения материальных параметров моделей и моделирования термосилового нагружения.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить **задачи**:

1. Разработать математические модели пластичности изотропных и композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения на основе термодинамики неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния.

2. Вывести определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для изотропных и композиционных материалов, включая однонаправленные волокнистые композиционные материалы и слоистые композиты.

3. Разработать метод идентификации материальных параметров моделей, включающий алгоритм их экспериментального определения и программную реализацию.

4. Разработать численные методы для анализа определяющих соотношений и решения краевой задачи термопластичности, интегрировать их в программный комплекс «ABAQUS», а также провести верификацию моделей на основе сравнения результатов расчета с экспериментальными данными.

Научная новизна:

1. Разработаны новые математические модели пластичности изотропных и композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения на основе термодинамики неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния. Новая модель для ортотропных композиционных материалов позволяет учесть нелинейное поведение материалов как при силовом, так и при тепловом воздействиях. Получены определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для различных типов материалов в интегро-дифференциальной и матричной формах.

2. Предложен новый способ идентификации материальных параметров моделей на основе минимального количества экспериментальных испытаний.

3. Разработаны новые численные алгоритмы, обеспечивающие моделирование процессов пластического деформирования композитных материалов при термосиловом нагружении.

4. Проведена верификация модели на основе сравнения численных и экспериментальных данных, что подтвердило её эффективность и применимость для прогнозирования термомеханического поведения композитных материалов.

5. Реализована интеграция разработанной математической модели в программный комплекс «ABAQUS» с использованием пользовательской процедуры UMAT, что позволило успешно адаптировать модель для решения практических задач.

Практическая значимость работы:

1. Разработанные математические модели пластичности повышают точность прогнозирования термомеханического поведения композитных материалов, что способствует их более эффективному применению в высокотехнологичных отраслях промышленности.

2. Предложенная методика идентификации материальных параметров позволяет калибровать модель с минимальным числом экспериментов, снижая трудоемкость и затраты на испытания.

3. Разработанные численные алгоритмы и программные решения, интегрированные в «ABAQUS», позволяют моделировать процессы пластического деформирования композитных материалов при неізотермическом нагружении, что повышает точность инженерных расчетов и сокращает время разработки новых материалов и конструкций.

Методы исследования. Основой для построения моделей пластичности послужили принципы термодинамики неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния, а также численные методы, применяемые для анализа и решения краевых задач.

Достоверность научных результатов обеспечивается строгостью и полнотой математического аппарата, а также согласованием результатов моделирования с расчетами других авторов и экспериментальными данными, опубликованными в научно-технических изданиях.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математические модели пластичности изотропных и композиционных материалов в условиях неізотермического нагружения, а также методы и алгоритм идентификации их материальных параметров.

2. Численные алгоритмы для анализа определяющих соотношений и решения краевой задачи при термосиловом нагружении композитных материалов.

3. Результаты верификации предложенных моделей для изотропных и композиционных материалов с использованием разработанного программного комплекса.

Апробация работы проводилась в обсуждениях на следующих конференциях: Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2022, 2024), XII Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2023), XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023), XXVIII Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Красноярск, 2023), VIII Международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, Армения, 2023)

и Международная конференция «Математическое моделирование, численные методы и инженерное программное обеспечение» (Москва, 2023).

Тема диссертации согласована с тематикой грантов, выделенных на фундаментальные исследования: FSN-2023-0012 «Разработка математических моделей и методов проектирования изделий ракетно-космической техники из перспективных конструкционных и функциональных материалов»; FSN-2024-0004 «Разработка математических моделей и методов проектирования изделий ракетно-космической техники из перспективных конструкционных и функциональных материалов».

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 6 научных работах, включая 3 статьи в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных изданий, и 3 публикации в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

Личный вклад соискателя. Все исследования, представленные в диссертационной работе, выполнены лично соискателем в рамках его научной деятельности. В диссертацию включены только те материалы из совместных публикаций, которые принадлежат соискателю, а заимствованные фрагменты обозначены ссылками на соответствующие источники.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы составляет 136 страниц, включая 35 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 158 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, раскрыты его научная новизна и практическая значимость, а также определен личный вклад соискателя.

Первая глава посвящена описанию нелинейного поведения композиционных материалов при термосиловом нагружении, а также вопросам моделирования их механического поведения.

В разделе 1.1 рассмотрены основные эффекты, возникающие в процессе деформации, и различия в механизмах пластического течения изотропных (металлических поликристаллических сплавов) и композиционных материалов. Показано, что необратимая деформация композиционных материалов обусловлена их структурной неоднородностью, включая неравномерное распределение внутренних напряжений и различие в температурных коэффициентах линейного расширения.

В разделе 1.2 представлен обзор существующих феноменологических моделей пластичности изотропных и композиционных материалов, проведен анализ места эндохронной теории среди других моделей пластичности и определены ключевые направления её дальнейшего развития.

Вторая глава посвящена построению математических моделей пластичности для изотропных и композиционных материалов в условиях

неизотермического нагружения на основе термодинамического подхода с внутренними параметрами состояния.

В разделе 2.1 получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности с внутренними параметрами состояния для изотропных и композиционных материалов. Они основаны на описании состояния рассматриваемой сплошной среды в окрестности произвольной точки пространства с использованием четырех термодинамических функций: массовых плотностей свободной энергии Гельмгольца A и энтропии h , тензора напряжений с компонентами σ_{ij} , а также вектора плотности теплового потока с компонентами q_i , где $i, j=1,2,3$. Аргументами этих функций приняты следующие реактивные переменные: тензор малой деформации с компонентами ε_{ij} , абсолютная температура T и набор тензорных внутренних параметров состояния с компонентами $\chi_{ij}^{(\alpha)} = \chi_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon_{kl}, T)$, где $k, l=1,2,3$; $\alpha=1, \dots, N$; N — количество внутренних параметров. Внутренние параметры состояния введены для описания микропроцессов на макроуровне.

Для получения выражения объемной плотности свободной энергии Гельмгольца $\rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)})$ примем, что компоненты тензора деформации и внутренних параметров состояния малы ($\|\varepsilon_{ij}\| \ll 1$ и $\|\chi_{ij}^{(\alpha)}\| \ll 1$). Тогда, разложив эту функцию в ряд по формуле Тейлора и ограничившись членами не выше второго порядка, получено следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}) = & \rho A(0, T, 0) + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ & + \rho \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}} \right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} + \rho \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \chi_{kl}^{(\alpha)}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} \chi_{kl}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \rho \sum_{\alpha, \beta=1}^N \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)} \partial \chi_{kl}^{(\beta)}} \right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} \chi_{kl}^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (1)$$

В диссертации предложено рассмотреть два тензорных внутренних параметра состояния со следующими компонентами: $\chi_{ij}^{(S)}$, характеризующими возникновение необратимой деформации при силовом нагружении, и $\chi_{ij}^{(T)}$, описывающими необратимые изменения при тепловом воздействии. В качестве эволюционных уравнений для этих параметров использованы кинетические уравнения следующего вида:

$$\tau_{ijk}^{(S)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(S)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(S)} = \bar{\chi}_{ij}^{(S)}, \quad \tau_{ijk}^{(T)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(T)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(T)} = \bar{\chi}_{ij}^{(T)}. \quad (2)$$

Здесь $\tau_{ijk}^{(S)} = \tau_{jik}^{(S)}(T)$, $\tau_{ijk}^{(T)} = \tau_{jik}^{(T)}(T)$ — компоненты положительно определенных тензоров времен релаксации внутренних параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ соответственно; $\bar{\chi}_{ij}^{(S)}$, $\bar{\chi}_{ij}^{(T)}$ — их установившиеся значения; z — внутреннее время, дифференциал которого определен выражением $dz = d\xi / f(\xi)$, где $d\xi$ — приращение меры

внутреннего времени, определяемое как $d\xi = \sqrt{P_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} + m^2 dT^2}$; $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$ — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров модели; $m = m(T)$ — материальный параметр модели, описывающий необратимое деформирование при изменении температуры; $f(\xi) = 1 + \beta\xi$ — материальная функция; $\beta = \beta(T)$ — материальный параметр модели.

Ограничившись следующим видом компонент тензоров времен релаксации:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} = \begin{cases} \tau_{ijkl}^{(S)}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l, \end{cases} \quad \tau_{ijkl}^{(T)} = \begin{cases} \tau_{ijkl}^{(T)}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l, \end{cases}$$

получены решения системы дифференциальных уравнений (2):

$$\chi_{ij}^{(S)} = \bar{\chi}_{ij}^{(S)} - \int_0^z \exp(-a_{ijkl}^{(S)}(z-z')) \frac{\partial \bar{\chi}_{ij}^{(S)}}{\partial z'} dz', \quad \chi_{ij}^{(T)} = \bar{\chi}_{ij}^{(T)} - \int_0^z \exp(-a_{ijkl}^{(T)}(z-z')) \frac{\partial \bar{\chi}_{ij}^{(T)}}{\partial z'} dz',$$

где $a_{ijkl}^{(S)} = 1/\tau_{ijkl}^{(S)}$, $a_{ijkl}^{(T)} = 1/\tau_{ijkl}^{(T)}$ — компоненты тензоров 4-го ранга материальных параметров.

Установившиеся значения внутренних параметров определены с учетом природы пластической деформации, различающейся для изотропных и композиционных материалов. Для изотропных пластически несжимаемых материалов приняты равенства: $\bar{\chi}_{ij}^{(S)} = X_{ijkl} e_{kl}$, $\bar{\chi}_{ij}^{(T)} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, где X_{ijkl}, Y_{ijkl} — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга; e_{kl} — компоненты девiatorа деформации. Для ортотропных композиционных материалов установлены следующие соотношения: $\bar{\chi}_{ij}^{(S)} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, $\bar{\chi}_{ij}^{(T)} = Y_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)}$, где $\varepsilon_{kl}^{(T)} = \int_{T_0}^T \alpha_{kl}^{(T)}(T') dT'$ — компоненты тензора температурной деформации; $\alpha_{kl}^{(T)} = \alpha_{kl}^{(T)}(T)$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения; T_0 — температура естественного состояния.

Из достаточных условий реализуемости термомеханического процесса, а также уравнения (1) были получены следующие определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - M_{ijkl} \chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl} \chi_{kl}^{(T)}, \quad (3)$$

где $C_{ijkl} = C_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных упругих жесткостей; $M_{ijkl} = M_{ijkl}(T)$, $N_{ijkl} = N_{ijkl}(T)$ — компоненты тензоров 4-го ранга, учитывающие влияние внутренних параметров состояния.

Из тех же условий получено уравнение теплопроводности:

$$\rho c \dot{T} = TW_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v + \delta_D + \delta_D^*, \quad (4)$$

где c — эффективная удельная массовая теплоемкость; W_{ij} — компоненты симметричного тензора 2-го ранга; q_v — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков) теплоты; δ_D, δ_D^* — диссипативные функции.

Уравнения (3) и (4) совместно с уравнениями равновесия, соотношениями Коши, а также начальными и граничными условиями формируют связанную краевую задачу термопластичности композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения. В дальнейшем рассматривалась несвязанная краевая задача, для чего было принято допущение: $W_{ij} = 0$. В конце раздела проведен анализ диссипативного неравенства, на основе которого сформулированы ограничения на введенные тензорные величины.

В разделе 2.2 определяющие соотношения приведены к упрощенной форме, соответствующей эндохронной теории термопластичности, и представлены для различных типов материалов: изотропных, композиционных, однонаправленных волокнистых и слоистых композитов.

Для изотропных материалов соотношение (3) преобразовано к виду:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \int_0^z \exp(-a_0(z-z')) \frac{\partial e_{ij}}{\partial z'} dz' + K(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{(T)}) \delta_{ij},$$

где $\mu = E/(2(1+\nu))$ — модуль сдвига; $K = E/(3(1-2\nu))$ — модуль всестороннего сжатия; $E = E(T)$ — нормальный модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $a_0 = a_0(T)$ — материальный параметр модели; δ_{ij} — компоненты единичного тензора второго ранга (символ Кронекера). При этом соотношение для меры внутреннего времени в случае изотропного материала имеет вид:

$$d\xi = \sqrt{2/3} de_{ij} de_{ij}.$$

Для композиционных материалов соотношение (3) преобразовано к виду:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \int_0^z \exp(-a_{klmn}^{(S)}(z-z')) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz' - C_{ijkl} \int_0^z \exp(-a_{klmn}^{(T)}(z-z')) \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'} dz' = \sigma_{ij}^{(S)} - \sigma_{ij}^{(T)}, \quad (5)$$

где $m, n = 1, 2, 3$; $\sigma_{ij}^{(S)}, \sigma_{ij}^{(T)}$ — компоненты вспомогательных тензоров напряжений, определяемые как:

$$\sigma_{ij}^{(S)} = C_{ijkl} \int_0^z \exp(-a_{klmn}^{(S)}(z-z')) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz', \quad \sigma_{ij}^{(T)} = C_{ijkl} \int_0^z \exp(-a_{klmn}^{(T)}(z-z')) \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'} dz'.$$

Из соотношения (5) следует, что пластическое деформирование начинается с самого начала нагружения, а при $z \rightarrow 0$ материал ведет себя упруго, что соответствует соотношению: $\partial \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_{kl} = C_{ijkl}$.

Отметим, что при выводе уравнений (5) предполагалась температурная зависимость всех параметров. Однако далее принято, что для композиционных материалов температурозависимыми являются только компоненты $C_{ijkl}, \alpha_{ij}^{(T)}, P_{ijkl}$ и β , тогда как остальные величины считаются неизменными.

Для наглядности выражение (5) преобразовано к дифференциальной форме записи и представлено в матричном виде для трехмерного случая нагружения:

$$\{d\sigma\} = [C]\{d\varepsilon\} - ([a^{(S)}][S]\{\sigma^{(S)}\} - [a^{(T)}][S]\{\sigma^{(T)}\})dz + \frac{d[C]}{dT}[S]\{\sigma\}dT - [C]\{\alpha^{(T)}\}dT,$$

где $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{\sigma^{(T)}\}, \{\sigma^{(S)}\}$ — векторы напряжений, деформации и вспомогательных напряжений соответственно, определяемые как

$$\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T, \quad \{\sigma^{(S)}\} = (\sigma_{11}^{(S)}, \sigma_{22}^{(S)}, \sigma_{33}^{(S)}, \sigma_{23}^{(S)}, \sigma_{13}^{(S)}, \sigma_{12}^{(S)})^T,$$

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T, \quad \{\sigma^{(T)}\} = (\sigma_{11}^{(T)}, \sigma_{22}^{(T)}, \sigma_{33}^{(T)}, \sigma_{23}^{(T)}, \sigma_{13}^{(T)}, \sigma_{12}^{(T)})^T;$$

$[a^{(S)}]$ и $[a^{(T)}]$ — матрицы материальных параметров, задаваемые как

$$[a^{(S)}] = \text{diag}(a_{11}^{(S)}, a_{22}^{(S)}, a_{33}^{(S)}, a_{44}^{(S)}, a_{55}^{(S)}, a_{66}^{(S)}), \quad [a^{(T)}] = \text{diag}(a_{11}^{(T)}, a_{22}^{(T)}, a_{33}^{(T)}, a_{44}^{(T)}, a_{55}^{(T)}, a_{66}^{(T)});$$

$\{\alpha^{(T)}\} = (\alpha_{11}^{(T)}, \alpha_{22}^{(T)}, \alpha_{33}^{(T)}, 0, 0, 0)^T$ — вектор температурных коэффициентов линейного расширения; $[C] = [S]^{-1}$ — матрица эффективных упругих жесткостей; $[S]$ — матрица коэффициентов податливости, имеющая вид:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix},$$

где E_{11}, E_{22}, E_{33} — нормальные модули упругости ортотропного материала вдоль соответствующих осей; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига в соответствующих плоскостях; ν_{ij} — коэффициенты Пуассона. Перечисленные характеристики рассмотрены в качестве приведенных параметров композиционного материала и могут быть определены, например, с использованием правила смесей. Матрица $[P]$ по структуре аналогична матрице коэффициентов податливости.

Дополнительно получены определяющие соотношения для двух типов композиционных материалов: однонаправленного волокнистого монослоя, размер которого в одном направлении существенно меньше двух других, и слоистого композита, состоящего из изотропных и ортотропных монослоев. В первом случае материал смоделирован как сплошное ортотропное тело, армированное под заданным углом, в условиях плоского напряженного состояния, при этом линейной деформацией вдоль третьей оси, обусловленной эффектом Пуассона, пренебрегли. Во втором случае для описания слоистого композита использованы две гипотезы: гипотеза о среднем напряжении пакета, вытекающая из уравнений равновесия элемента пакета, и гипотеза о совместном деформировании слоев.

Третья глава посвящена разработке методов и методик определения материальных параметров моделей эндохронной теории пластичности.

В разделе 3.1 проведен анализ пропорционального неизотермического нагружения изотропных материалов. Результаты показали, что рассматриваемая модель позволяет описать материал с линейным упрочнением. На основе полученных данных установлено, что материальные параметры модели a_0 и β могут быть определены экспериментально по результатам одноосного растяжения или кручения при фиксированной температуре T . В случае одноосного растяжения:

$$a_0(T) = \frac{3}{2} \frac{E}{(1+\nu)\sigma_*} \left(\frac{1 - E_T/E}{1 - ((1-2\nu)/3)E_T/E} \right), \quad \beta(T) = \frac{E_T}{\sigma_* [1 - ((1-2\nu)/3)E_T/E]},$$

где $E_T = E_T(T)$ — модуль упрочения при растяжении; $\sigma_* = \sigma_*(T)$ — напряжение в точке пересечения асимптоты кривой деформирования с осью ординат.

В разделе 3.2 проведен комплексный анализ определяющих соотношений для композиционных материалов, включающий два этапа: силовое и термосиловое нагружение.

Для анализа силового нагружения рассмотрены модели, представленные в Таблице 1.

Таблица 1. Параметры моделей пластичности при силовом нагружении

Наим.	$\tau_{ijkl}^{(S)}$	$a_{ijkl}^{(S)} = 1/\tau_{ijkl}^{(S)}$	β	Цель исследования
Модель №1	$\tau_0^{(S)} \delta_{ik} \delta_{jl}$	$1/\tau_0^{(S)} \delta_{ik} \delta_{jl}$	0	Влияние компонент тензора P_{ijkl} и одного времени релаксации
Модель №2	$\tau_{ijkl}^{(S)}$	$a_{ijkl}^{(S)}$	0	Влияние нескольких времен релаксации
Модель №3	$\tau_{ijkl}^{(S)}$	$a_{ijkl}^{(S)}$	$\beta(T_0)$	Влияние нескольких времен релаксации и параметра β

Для анализа определяющих соотношений выполнено моделирование пропорционального нагружения, по результатам которого сформулированы следующие выводы.

1. В модели №1 с одним временем релаксации $\tau_0^{(S)}$ коэффициенты поперечной деформации остаются неизменными при деформировании. В случае нескольких времен релаксации (модели №2 и №3) эти коэффициенты могут как увеличиваться, так и уменьшаться.

2. Компоненты тензора материальных параметров $P_{ijkl}(T_0)$ определяют экспериментально по результатам одноосного растяжения, чистого сдвига и двухосного растяжения вдоль соответствующих направлений. Для модели №1 указанные компоненты пропорциональны квадрату $\tau_0^{(S)}$.

3. Компоненты тензора $a_{ijkl}^{(S)}$ определяют либо по данным анализа коэффициентов поперечной деформации, либо на основе результатов

экспериментов на трехосное нагружение и комбинированное растяжение со сдвигом. При использовании модели с одним временем релаксации этот параметр не влияет на моделирование нелинейного поведения.

4. Материальный параметр $\beta(T_0)$ определяет наклон асимптоты диаграмм деформирования. При $\beta = 0$ асимптота является горизонтальной.

Для анализа термосилового нагружения рассмотрены модели, представленные в Таблице 2.

Таблица 2. Параметры моделей пластичности при термосиловом нагружении

Наим.	$a_{ijkl}^{(S)}$	$a_{ijkl}^{(T)}$	$C_{ijkl}, \alpha_{ij}^{(T)}, P_{ijkl}$	m	β
Модель №1Т	$\frac{1}{\tau_0^{(S)}} \delta_{ik} \delta_{jl}$	$\frac{1}{\tau_0^{(T)}} \delta_{ik} \delta_{jl}$	$C_{ijkl} = \text{const}, \alpha_{ij}^{(T)} = \text{const},$ $P_{ijkl} = \text{const}, i, j, k, l = 1, 2, 3$	m	0
Модель №1ТМ	$\frac{1}{\tau_0^{(S)}} \delta_{ik} \delta_{jl}$	$\frac{1}{\tau_0^{(T)}} \delta_{ik} \delta_{jl}$	$C_{ijkl} = C_{ijkl}(T), \alpha_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}^{(T)}(T),$ $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$	m	0
Модель №3ТМ	$a_{ijkl}^{(S)}$	$a_{ijkl}^{(T)}$	$C_{ijkl} = C_{ijkl}(T), \alpha_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}^{(T)}(T),$ $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$	m	$\beta(T)$

Модель №1Т получена на основе модели №1 путем учета нелинейного деформирования при тепловом воздействии. В ней исследовано влияние скалярных времен релаксации $\tau_0^{(S)}$ и $\tau_0^{(T)}$, а также параметра m на поведение материала при термосиловом нагружении. Модель №1ТМ получена из модели №1Т путем введения температурной зависимости для величин $C_{ijkl}, \alpha_{ij}^{(T)}, P_{ijkl}$. В рамках данной модели проанализировано совместное влияние скалярных времен релаксации $\tau_0^{(S)}, \tau_0^{(T)}$, параметра m , а также температурно-зависимых характеристик. Модель №3ТМ получена из модели №3 путем учета нелинейного деформирования при тепловом воздействии. В ней рассмотрено влияние нескольких времен релаксации $\tau_{ijkl}^{(S)}, \tau_{ijkl}^{(T)}$, а также зависимости β от температуры.

Для исследования определяющих соотношений проведены следующие моделируемые эксперименты.

1. Тепловое воздействие в условиях свободного расширения. В этом эксперименте проанализированы кривые температурного деформирования $\varepsilon_{ij}(T)$ и компоненты тензора обобщенных температурных коэффициентов линейного расширения $\tilde{\alpha}_{ij}^{(T)}(T) = d\varepsilon_{ij}/dT$ при различных значениях материальных параметров.

2. Нагружение после теплового воздействия и термоциклирования. В этом эксперименте проанализированы зависимости компонент деформации $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ и модулей упругости $\tilde{E}_m(T) = d\sigma_m/d\varepsilon_m$ при различных значениях материальных параметров, где n — направление ортотропии (здесь правило суммирования по повторяющемуся индексу не действует).

Для обеспечения непрерывности по температуре компоненты тензора $P_{ijk}(T)$ и материальный параметр $\beta(T)$ заданы следующим образом:

$$P_{ijk}(T) = P_{ijk}(T_0) \cdot \Omega(T), \quad \beta(T) = \beta(T_0) + \Psi(T),$$

где $P_{ijk}(T_0)$, $\beta(T_0)$ — материальные параметры при температуре естественного состояния, определяемые из анализа силового нагружения; $\Omega(T)$, $\Psi(T)$ — функции, непрерывные по температуре, причем $\Omega(T_0) = 1$ и $\Psi(T_0) = 0$. В общем случае функция $\Omega(T)$ может иметь тензорный вид.

На основе проведенного анализа термосилового нагружения установлено, что при отсутствии необратимой деформации или петель гистерезиса после теплового воздействия материальные параметры удовлетворяют равенствам: $\alpha_{ijk}^{(T)} = \alpha_{ijk}^{(S)}$ и $m = 0$. Зависимости $\alpha_{ij}^{(T)}(T)$ и $E_m(T)$ от температуры могут быть определены стандартными методами из экспериментов на свободный нагрев и одноосное растяжение при различных температурах. При наличии необратимой деформации или петель гистерезиса после теплового воздействия алгоритм определения материальных параметров становится итерационным, а зависимости для $\alpha_{ij}^{(T)}(T)$ и $E_m(T)$ не могут быть определены стандартными методами. В этом случае: параметры $\alpha_{ijk}^{(T)}$, m и $\alpha_{ij}^{(T)}(T)$ определяют из эксперимента на термоциклирование; а $E_m(T)$ — из данных экспериментов на одноосное растяжение при разных температурах. В обоих случаях функции $\Omega(T)$, $\Psi(T)$ определяют из экспериментов на одноосное растяжение при разных температурах.

Ввиду положительной определенности тензоров $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{a}}^{(S)}$ для идентификации материальных параметров при силовом нагружении предложено использовать метод минимизации целевой функции, сочетающий модифицированный метод Ньютона для поиска локального минимума и алгоритм глобального поиска для нахождения глобального минимума.

Целевая функция имеет следующий вид:

$$\Phi = F + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{f_i}, \quad f_i = \begin{cases} f_i, & f_i \geq \zeta_i, \\ [1/\zeta_i + (\zeta_i - f_i)/\zeta_i^2]^{-1}, & f_i < \zeta_i, \end{cases}$$

где f_i — ограничение; n — количество ограничений; R_i — весовая функция; ζ_i — малый параметр; F — функция отклонений расчетных кривых от экспериментальных данных, определяемая как:

$$F = \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} \varphi_i \sum_{j=1}^{N_{\text{point}}} \frac{1}{N_{\text{point}}} (\sigma_j^{(i)\text{exp}} - \sigma_j^{(i)\text{calc}})^2,$$

где N_{exp} , N_{point} — количество экспериментов и экспериментальных точек соответственно; φ_i — функция влияния i -го эксперимента; $\sigma_j^{(i)\text{exp}}$, $\sigma_j^{(i)\text{calc}}$ — экспериментальное и расчетное напряжения соответственно.

На основе анализа разработана методика и алгоритм определения материальных параметров модели, ставшие основой авторского программного комплекса «Расчет напряженно-деформированного состояния композитных материалов за пределами упругости».

В разделе 3.3 представлено описание общей схемы, структуры и функционального назначения авторского программного комплекса.

Четвертая глава посвящена применению эндохронной теории пластичности для расчета напряженно-деформированного состояния композиционных материалов при термосиловом нагружении.

В разделе 4.1 разработаны численные алгоритмы для анализа определяющих соотношений различных типов материалов: изотропных и композиционных материалов, включая однонаправленные волокнистые композиционные материалы и слоистые композиты. Алгоритмы основаны на методе последовательных приближений. Для подтверждения их корректности и точности, а также достоверности и применимости математических моделей выполнено моделирование термосилового нагружения различных материалов.

В качестве первого материала рассмотрен трансверсально-изотропный композит SCS-6/RBSN, представляющий собой реакционно-связанный нитрид кремния, армированный волокнами карбида кремния (Рис. 1, а). Экспериментальные исследования этого материала показывают, что диаграммы температурного деформирования содержат нелинейные участки и петли гистерезиса. Кроме того, при охлаждении после термообработки в материале накапливаются термические напряжения, начиная с температуры 1200°C.

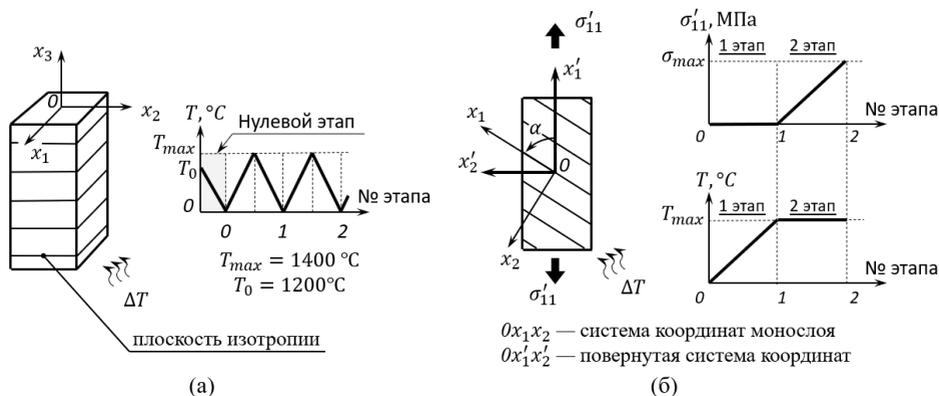


Рис. 1. Расчетная схема SCS-6/RBSN (а) и AS4/PEEK (б)

Материальные параметры SCS-6/RBSN определены в соответствии с методикой, описанной в разделе 3. В качестве моделируемого эксперимента рассмотрены три цикла нагрева-охлаждения с предварительным охлаждением после термообработки (нулевой этап). Полученные результаты приведены на Рис. 2. Анализ графиков показывает хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными значениями.

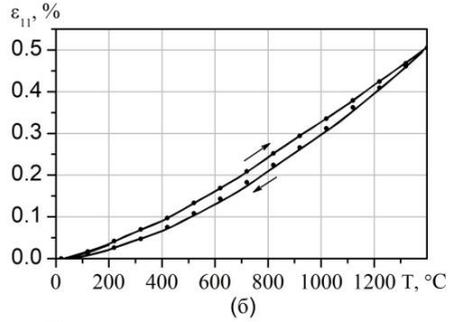
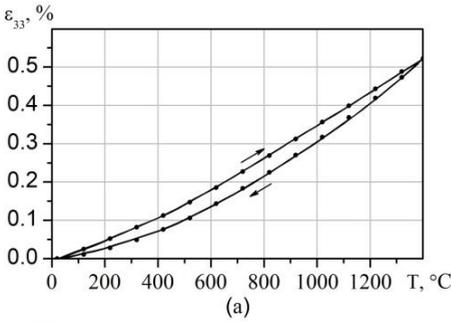
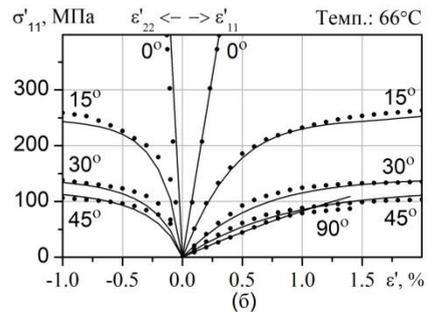
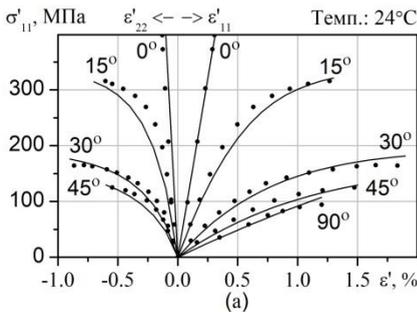


Рис. 2. Кривые температурного деформирования: вдоль волокон (а), поперек волокон (б). Сплошная линия — расчет, точки — эксперимент (R.T. Bratt, A.R. Palczer; 1997)

Проведенный анализ влияния предварительного (нулевого) этапа на результаты моделирования термоциклирования подтвердил важность учета начальных микронапряжений, возникающих при охлаждении материала от температуры обработки до комнатной температуры. Игнорирование этих напряжений может привести к значительным расхождениям между расчетными и экспериментальными данными, а следовательно, к некорректной оценке эксплуатационных характеристик материала.

В качестве второго материала рассмотрен однонаправленный волокнистый композиционный материал AS4/PEEK с различными углами армирования α (Рис. 1, б). Этот материал обладает высокой термостойкостью, поэтому в материале не возникает необратимой деформации и петель гистерезиса при тепловом воздействии.

В качестве моделируемого эксперимента рассмотрим внесосевое растяжение при различных температурах. Расчет выполнен в два этапа: 1-ый этап — предварительный нагрев, 2-ой этап — растяжение при постоянной температуре. Полученные результаты приведены на Рис. 3. Графики имеют хорошее согласование расчетных значений с экспериментальными данными.



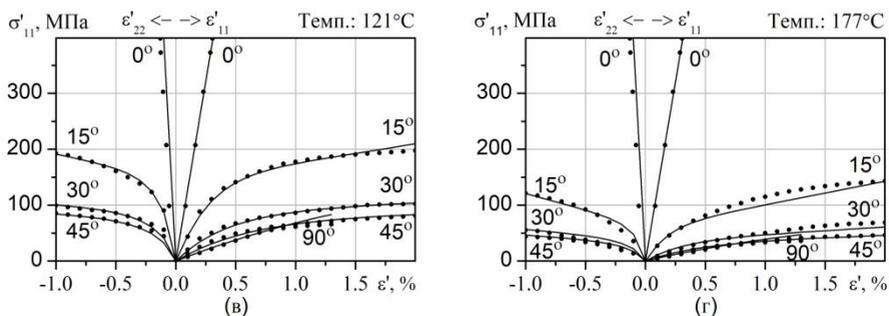


Рис. 3. Диаграммы деформирования AS4/PEEK при температурах: 24°C (а), 66°C (б), 121°C (в), 177°C (г). Сплошная линия — расчет, точки — эксперимент (С.Т. Sun, К.К. Yoon; 1991)

Дополнительно в диссертации представлено моделирование поведения алюминиевого сплава 7075-T6 и разномодульного трансверсально-изотропного композиционного материала ATJ-S Graphite при термосиловом нагружении. Результаты, полученные для сплава 7075-T6, показывают удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных при малой деформации и хорошее соответствие при развитой деформации. Моделирование ATJ-S Graphite показало высокую степень согласования с экспериментальными данными.

В разделе 4.2 для решения краевой задачи термопластичности композиционных материалов при неизотермическом нагружении использован метод конечных элементов. В рамках этого подхода получены расчетные зависимости на основе эндохронной теории пластичности, для решения которых разработан алгоритм, использующий метод начальных напряжений.

Для адаптации математической модели к решению практических задач разработана пользовательская процедура UMAT, обеспечивающая интеграцию эндохронной теории пластичности в программный комплекс «ABAQUS». Сравнение результатов расчетов с данными, полученными в разделе 4.1, показало их полное совпадение, что подтверждает корректность модели.

В разделе 4.3 рассмотрено применение эндохронной теории пластичности для анализа металлокомпозитных баллонов высокого давления. Экспериментальные исследования таких баллонов свидетельствуют о нелинейном деформировании как силовой оболочки, так и лайнера. Лайнер находится в трехосном напряженном под действием не только осевого и окружного напряжений, но и радиального напряжения, вызванного воздействием: с одной стороны — рабочего давления, с другой — контактного давления, сравнимого по величине с рабочим.

Для учета этих факторов в разделе приведены модифицированные соотношения, включающие влияние радиального напряжения в металлическом слое. В целях валидации полученных соотношений и алгоритма численного интегрирования проведен анализ экспериментально исследованной цилиндрической части алюминиевого баллона давления, усиленной кольцевым слоем из стеклопластика.

Результаты расчета внутренних силовых факторов в слоях в зависимости от давления с учетом и без учета радиального напряжения представлены на Рис. 4. Анализ графиков показывает хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных при учете радиального напряжения. Однако в случае его игнорирования погрешность вычислений составляет 15 % для изотропного и 20 % для композиционного слоя.

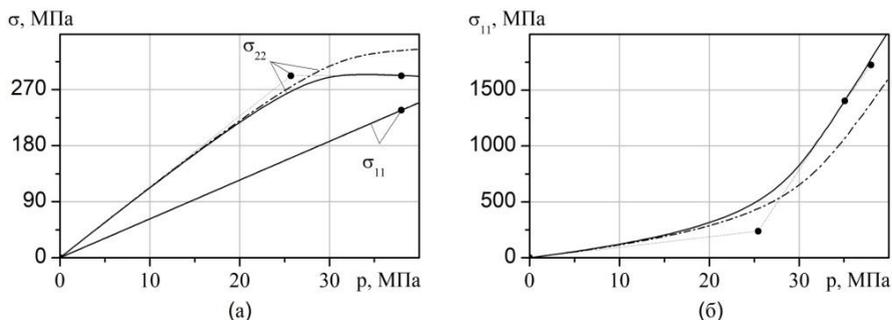


Рис. 4. Зависимости от давления меридиональных и окружных напряжений в металлическом слое (а) и напряжения вдоль волокон в композиционном слое (б):
 сплошная линия — с учетом радиального напряжения;
 штрихпунктирная линия — без учета радиального напряжения;
 точки — эксперимент (V.V. Vasiliev; 2009)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработаны новые математические модели пластичности изотропных и композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения на основе термодинамики неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния. Модель для ортотропных композиционных материалов позволяет учесть нелинейное поведение материала как при силовом, так и при тепловом воздействиях. В интегро-дифференциальной и матричной формах получены определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для изотропных и композиционных материалов, в том числе для однонаправленных волокнистых композиционных материалов и слоистых композитов.

2. Проведен комплексный анализ определяющих соотношений в условиях силового и термосилового нагружения. В ходе исследования выявлено влияние материальных параметров на нелинейное поведение материала и определен минимальный набор экспериментов, необходимый для идентификации параметров моделей. Разработаны методика, алгоритм и программный комплекс для определения материальных параметров моделей изотропных и композиционных материалов.

3. Разработаны новые численные алгоритмы для анализа определяющих соотношений изотропных и композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности. Предложен алгоритм решения краевой задачи

методом конечных элементов. Реализована интеграция определяющих соотношений в программный комплекс «ABAQUS» с использованием пользовательской процедуры UMAT, что позволило успешно адаптировать математическую модель для решения практических задач.

4. Выполнено моделирование термосилового нагружения различных типов материалов. Полученные результаты имеют хорошее согласование с экспериментальными данными, что подтверждает достоверность и применимость разработанных математических моделей и численных алгоритмов для прогнозирования термомеханического поведения композитных материалов в условиях сложного нагружения.

5. Разработана методика и проведен расчет напряженно-деформированного состояния металлокомпозитного баллона высокого давления. С этой целью были построены и использованы модифицированные соотношения эндохронной теории для изотропного материала, учитывающие влияние радиального напряжения, действующего на металлический слой.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н., Рахимов Д.Р. Проектирование высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2022. Т. 54. № 4. С. 14–24. (0,9 п.л./0,5 п.л.)

2. Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н., Рахимов Д.Р. Расчет металлокомпозитного баллона давления с использованием эндохронной теории пластичности для изотропного материала // Композиты и наноструктуры. 2022. Т. 55. № 3. С. 179–190. (1,0 п.л./0,6 п.л.)

3. Kuvyrkin G.N., Rakhimov D.R. Computational algorithm for studying the constitutive relations of the endochronic theory of thermoplasticity for isotropic materials // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2024. Vol. 65. No. 3. P. 496–501. (0,6 п.л./0,4 п.л.)

4. Kuvyrkin G.N., Rakhimov D.R. Application of the finite element method to the endochronic theory of thermoplasticity for isotropic materials in a plane stress state // Journal of Physics: Conference Series. 2024. Vol. 2817. No. 012031. (0,6 п.л./0,4 п.л.)

5. Рахимов Д.Р. Анализ определяющих соотношений эндохронной теории пластичности ортотропных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2025. Т. 118. № 1. С. 65–81. (1,0 п.л.)

6. Зимин В.Н., Рахимов Д.Р., Савельева И.Ю. Анализ определяющих соотношений эндохронной теории пластичности ортотропных композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения // Композиты и наноструктуры. 2025. Т. 17. № 1. С. 22–34. (1,2 п.л./0,8 п.л.)

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023682914. Расчет напряженно-деформированного состояния композитных материалов за пределами упругости / Д.Р. Рахимов. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ: 07.11.2023.