

УДК 533.65

На правах рукописи

БАТТУЛГА ЭНХЖАРГАЛ

**МЕТОДИКА ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ
АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА С УЧЕТОМ
МНОГОФАКТОРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**

Специальность 2.5.12. – Аэродинамика и процессы теплообмена летательных
аппаратов

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук



Москва – 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

Научный руководитель:

Сидняев Николай Иванович

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Высшей математики», ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Официальные оппоненты:

Кушнер Алексей Гурьевич

д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Физико-математических методов управления физического факультета», ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Воропаев Сергей Николаевич

к.т.н., начальник теоретического отдела, Научно-производственный центр противовоздушной обороны, Корпоративный центр по перспективным проектам и науке, АО «Концерн «Калашников»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится «__» 2025 г. в __:__ на заседании диссертационного совета 24.2.331.08 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, Госпитальный переулок, дом 10, корпус СМ, ауд. 407м.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте <https://www.bmstu.ru>.

Автореферат разослан «__» 2025г.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенных гербовой печатью, просьба направлять по адресу: 105005, г.Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.331.08.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.т.н., доцент

Луценко А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Актуальность исследования определяется повышением требований производителей летательной техники к точности и достоверности экспериментальных данных, получаемых в аэrodинамических трубах. Требования, в свою очередь, диктуются повышением как безопасности полета летательных аппаратов, так и экономической эффективности летательных аппаратов (ЛА). Наиболее высокие требования предъявляются к коэффициенту сопротивления. В последние десятилетия происходит неуклонное расширение сферы приложения математических методов планирования эксперимента. Эти методы успешно используются для повышения эффективности экспериментальных исследований, поиска оптимальных технологических режимов производственных процессов, выбора конструктивных параметров изделий, состава многокомпонентных систем и т. д. В последнее время актуальной стала проблема измерения с помощью тензометрических весов аэродинамических нагрузок, действующих на модели летательных аппаратов (ЛА) и их элементы в аэродинамических трубах. Вследствие упругости чувствительных элементов весы представляют собой динамическую систему. Этим обусловлена сложность решаемой проблемы: измерение динамических нагрузок осуществляется динамической системой. Инерционные и центробежные нагрузки вносят систематические погрешности при определении аэродинамических сил и моментов в эксперименте и должны быть исключены из результатов измерений. Задача определения сил и моментов при непрерывном изменении угла атаки модели с небольшой скоростью решена для статического случая, когда данные измерений усредняются на небольшом интервале времени. Выполненный обзор литературы показывает, что существующие методы в основном применимы для узкого класса задач и нет единого подхода к решению задачи измерения аэродинамических нагрузок с учетом взаимного влияния сил и моментов. В существующих методах не используются физические модели, адекватно отражающие систему «модель — тензометрические весы — поддерживающее устройство». В диссертации разработан математический метод, который позволяет определять взаимное влияние сил и моментов с помощью тензометрических весов во всем рабочем диапазоне углов атаки, включая нулевой. Метод основан на применении известной физической модели тензометрических весов в виде упругих арок с демпфированием. Задача измерения нагрузок решена для общего случая, когда система координат тензометрических весов является связанный. В пересчете аэродинамических коэффициентов при переходе из измерительной системы координат в скоростную возникает дополнительная погрешность в определении коэффициентов, обусловленная погрешностью измерения углов тангажа, крена и рыскания. Измерительная система «модель — тензометрические весы — поддерживающее устройство» приводят к появлению погрешностей.

В диссертации предложена математическая модель учета влияния измерения углов атаки, тангажа и крена на точность и адекватность полученной модели. Разработан новый универсальный метод измерения обработки результатов испытаний углов тангажа сил и моментов моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах. Метод позволяет определять взаимовлияние сил и моментов в широком

диапазоне углов атаки.

Отбор и адаптация методов теории планирования эксперимента (ТПЭ) для решения задач экспериментальной аэrodинамики, разработки приборов и технологических процессов всегда производились с учетом особенностей предмета исследования, в числе которых можно отметить следующие, характерные для всех указанных выше классов задач:

- групповой способ изготовления экспериментальных устройств различного назначения, требующий специфической статистической обработки результатов аэродинамического эксперимента;
- наличие многих показателей надежности, коррелированных между собой;
- наличие показателей надежности, связанных с длительными испытаниями, затрудняющих использование процедур последовательного поиска оптимального решения;
- наличие переменных факторов различного типа, которые необходимо рассматривать совместно (качественные, количественные и коррелированные переменные);
- наличие ограничений на изменения концентраций компонент и пределов варьирования газодинамических факторов, задающих область исследования аэродинамических моделей часто сложной формы. Наибольшее число задач разработки аэродинамических исследований ставились и решались как задачи оптимизации.

По мере усложнения рассматриваемых областей исследования и проверки гипотез о несимметричных по степеням факторов математических моделей, стало необходимым применение планов, построенных численными методами и позволяющих более полно учесть априорную информацию о аэродинамических характеристиках.

На начальной стадии исследования газодинамических параметров при наличии многих переменных и при неизвестной области оптимума на первом этапе обычно решались задачи выделения главных факторов в аэродинамическом эксперименте с использованием дробных реплик или планов Плакетта – Бермана, а затем осуществлялось шаговое движение к оптимуму с использованием обобщенного критерия.

К настоящему времени с использованием теории планирования эксперимента (ТПЭ) решено большое количество задач по газовой динамике, имеющих важное научное и практическое значение. На этапе разработки качественного состава различных газодинамических параметров использовались латинские планы, разноуровневые факторные планы. Здесь часто встает проблема учета взаимодействий уровней качественных факторов, которая, полагаю, недостаточно разработана. В этих задачах, как правило начинали с планирования на локальных симплексах, выделяемых внутри заданных многогранников с привлечением профессиональных соображений разработчика, и использовали симплекс-решетчатые планы.

Таким образом, можно констатировать, что использование ТПЭ в задачах экспериментальной аэродинамики и измерительных процессов проектирования

ЛА, является актуальнейшей задачей и существует необходимость по улучшению показателей качества и надежности разрабатываемых методов исследования в среднем в 1.5 - 5 раз по сравнению с аналогами; сокращение возможных экспериментальных затрат на решение поставленных задач в среднем в 1.5 - 3 раза; сокращение времени, необходимого для получения научно-обоснованного технического решения, в среднем на 30 - 40 %; оптимизация технического решения.

Цель работы – повышение точности определения статических и нестационарных аэrodинамических характеристик моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах. Разработка критериев и моделей для оценки надежности и эффективности при реализации решения задач теории планирования эксперимента для проведения вычислительного аэродинамического эксперимента.

Основные задачи диссертационной работы:

Для достижения поставленной цели в работе предложены и созданы математические модели для измерительных устройств, методы определения систематических погрешностей и методы их оценки из результатов измерений, а именно:

1. Разработка расчетных и экспериментальных методов исследования обтекания моделей летательных аппаратов и их фрагментов установившимся потоком.

2. Планирование расчетных и экспериментальных исследований аэродинамических характеристик моделей летательных аппаратов и их элементов, разработка методов расчета этих характеристик.

3. Разработка критериев и моделей полного факторного эксперимента в аэродинамических трубах и с использованием дробных экспериментов. Провести анализ факторных аэродинамических экспериментов и композиционных планов с повторными наблюдениями.

4. Проведение статистической обработки экспериментальных данных аэродинамических экспериментов с учетом взаимного влияния сил и моментов с использованием генерирующих соотношений высокой дробности.

5. Разработка методов обработки результатов измерения донного давления и трения при определении стационарных газодинамических характеристик в аэродинамических трубах

6. Разработка методов учета влияния скоростного напора, числа Маха, Рейнольдса и поддерживающих устройств моделей ЛА на аэродинамические характеристики.

Объект исследования. Для решения задач экспериментальной аэродинамики при выполнении диссертационной работы были использованы методы многомерного статистического анализа, математического анализа, функционального анализа, вычислительной математики, методы численного моделирования, методы теории планирования эксперимента, методы теории надежности.

Предмет исследования - оптимальные структурные и конструктивные параметры приборной базы аэромеханического эксперимента. Структурные

элементы аэродинамической установки для измерения аэродинамических сил и параметров набегающего потока.

Методология и методы исследований - разработанные методики основывается на подходе многокритериальной оптимизации и методах обработки многофакторных экспериментальных аэродинамических характеристик с учетом проверки адекватности. Построение математической модели обработки измерений-верификация математической модели измерений. Разработаны методы измерений статических и нестационарных газодинамических характеристик моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах, которые верифицированы с экспериментами и проверены в аэродинамических установках.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Содержание диссертации соответствует паспорту научной специальности 2.5.12. Аэrodинамика и процессы теплообмена летательных аппаратов, в частности, следующим направлениям исследований:

«Теоретические, расчетные и экспериментальные исследования обтекания летательных аппаратов, объектов авиационной и ракетно-космической техники и их частей установившимися и неустановившимися потоками газовых сред» — 1;

«Разработка средств и методов экспериментальных исследований, аэродинамических и тепловых исследований (методики, установки, летный эксперимент)» — 10;

«Экспериментальные и теоретические исследования силового, теплового и физико-химического взаимодействия газообразных сред с поверхностями элементов конструкции из различных конструкционных материалов» — 11.

Научная новизна диссертационной работы:

1. Создание новых научно-обоснованных методик планирования эксперимента, совокупность которых является решением актуальной прикладной проблемы при обеспечении оптимальных режимов эксплуатации сложных аэродинамических установок.

2. Разработка, обоснование алгоритмов решения задач планирования эксперимента, эффективные аналитические методы с применением ЭВМ по расчету аэродинамических характеристик. Реализация эффективных аналитических методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента на основе данных аэродинамического эксперимента.

3. Установление наиболее существенных факторов, влияющих на режимы эксплуатации аэродинамических установок. Определение взаимосвязи с использованием дробных реплик и критерии оптимальности планов с использованием теории планирования эксперимента.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что:

1. На основании разработанных методов показано влияние основных факторов на условиях обтекания аэродинамических моделей. Разработаны новые методики и алгоритмы интерпретации натурного аэромеханического эксперимента на основе его математической модели, анализа и теории планирования эксперимента.

2. Сформулированы и обоснованы основные требования, предъявляемые к аэродинамическим весам, используемые в аэродинамических трубах. Определено влияние параметров внешнего потока на управление обтеканием поверхностей летательных аппаратов (ЛА). Созданы методики обработки экспериментальных данных, позволившие провести оптимизацию аэродинамических характеристик моделей летательных аппаратов.

3. Разработаны, обоснованы и протестированы эффективные аналитические методы с применением ЭВМ по расчету исследуемых аэродинамических характеристик с учетом набегающего потока и проведен комплексный анализ. Предложены методики и алгоритмы в виде проблемно-ориентированных программ для проведения вычислений газодинамических параметров.

Положения, выносимые на защиту:

На защиту выносятся методы определения аэродинамических характеристик моделей летательных аппаратов с помощью тензометрических весов в аэродинамических трубах с высокой точностью с использованием теории планирования эксперимента.

1. Результаты статистической обработки экспериментальных данных аэродинамического эксперимента с учетом взаимного влияния сил и моментов с использованием генерирующих соотношений высокой дробности.

2. Методы обработки результатов измерения донного давления и трения при определении нестационарных газодинамических характеристик в аэродинамических трубах

3. Метод учета влияния поддерживающих устройств моделей ЛА на газодинамические характеристики потока, скоростной напор, числа Маха и Рейнольдса в аэродинамических трубах.

Достоверность научных положений и выводов обеспечена математической строгостью выполнения выкладок и преобразований, проверкой наиболее ответственных выводов с применением адекватных математических моделей. Новые математические модели, алгоритмы и теория планирования эксперимента проверялись на адекватность с использованием данных натурного аэродинамического эксперимента. Положения и выводы, сформулированные в работе подтверждены наблюдениями и опытами, обоснованы путем рассмотрения их физического содержания и, полученными другими авторами. Разработанные методы основаны на известных соотношениях аэродинамики. В диссертации решены смешанные задачи экспериментальной аэродинамики, сводящиеся к теории планирования, свойства решений которых известны. Методы верифицированы широко распространенными опытами и апробированы в аэродинамической установке.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались в МГТУ им. Н.Э. Баумана (кафедра ФН-1) и на V Межвузовской конференции аспирантов, соискателей и молодых ученых «Наука, технологии и бизнес» (Москва, 2023); Одиннадцатой международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы создания космических систем дистанционного зондирования земли», ВНИИЭМ (Москва, 2023); Шестнадцатой

Всероссийской конференции молодых ученых и специалистов «Будущее машиностроения Россия» (Москва, 2023); Международной конференция «Математическое моделирование, численные методы и инженерное программное обеспечение» (МСЕ-2023) МГТУ им.Н.Э.Баумана (Москва, 2023); Международной научной конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» Fundamental and applied problems of mechanics/ (FAPM-2023) МГТУ им.Н.Э.Баумана (Москва, 2023); VII всероссийской научно-практическая конференция «Системы управления полным жизненным циклом высокотехнологичных платформ, высоко-технологичной продукции в машиностроении: современные вызовы, новые источники роста» (Москва, 2023, 2024 и 2025), VIII Всероссийской научно-практической конференции «Системы управления полным жизненным циклом высокотехнологичной продукции в машиностроении: новые источники роста» (Москва, 17 апреля 2024 г и 7 апреля 2025 г); XIV Всероссийском совещании по проблемам управления Россия, Москва, ИПУ РАН (Москва, 17-20 июня 2024); «International Conference on Mathematics and Digital Technology (ICMDT) », the 50th anniversary of the Institute of Mathematics and Digital Technology, Mongolian Academy of Sciences, (Улан-Батор, Монголия, 20-22 сентября 2024); XXII Всероссийской научной конференции «Нейрокомпьютеры и их применение» (Москва, 26 ноября 2024); Первая конференция молодых ученых и специалистов из Монголии в России «Возможности и их решения-2025», Посольство Монголии в Российской Федерации (Москва, 28 марта 2025 г.); Всероссийской конференции с международным участием, Роль социальной функции философии образования: Изменения и перспективы (г. Новосибирск, 25 апреля 2025 г.), VI международной конференции «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Москва, 15-19 июня 2025 г.).

Публикации: По теме диссертационной работы опубликовано 10 научных работ [1-10], 3 из которых опубликовано в изданиях, входящих в перечень SCOPUS [1-3], 7 из которых опубликовано в изданиях, входящих в перечень Вышей аттестационной комиссии РФ [4-10].

Структура и объем работы: Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, и списка литературы. Работа представлена на 206 страницах основного текста, включающего 51 рисунков, 23 таблиц и списка литературы из 135 наименований и приложений на 0 страницах, включающих 0 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы работы, сформулирована цель и задачи исследования, показана научная новизна и практическая ценность диссертации, перечисляются положения, выносимые на защиту, а также приводятся сведения об апробации работы.

Глава 1 является базовой. В ней представлен методологический подход к решению задач с обработкой экспериментальных результатов аэродинамического эксперимента, описаны применение и перспективы разработки, сформулированы

характерные области применения обработки экспериментальных данных при аэродинамических испытаниях.

В главе рассмотрены задачи анализа и обработки информации современного состояния перспективных методов теории планирования эксперимента применительно к аэродинамическим установкам. Определены основные задачи и предметная область исследования. Проведен структурно-параметрический анализ используемой информации, полученной при аэродинамических испытаниях. Представлены некоторые результаты исследований по актуальным методам решения задач аэромеханики летательных аппаратов. Проведено исследование функций отклика и проверка гипотезы адекватности полных и дробных факторных экспериментов. Развиты основные положения метода наименьших квадратов применительно к линейным моделям наблюдений неполного ранга. Сформулированы требования к виду матрицы известных коэффициентов линейной модели наблюдений полного ранга, позволяющей получить линейные несмещенные оценки для заданной системы параметрических функций. Это дает возможность выделить в общем виде класс дробных реплик, пригодных для получения таких оценок. Построены полуреплики с различной разрешающей способностью (рисунок 1), обобщенные определяющие контрасты для реплик высокой дробности, задаваемых составными генерирующими соотношениями.

Отмечено, что для некоторых задач регрессионного анализа и планирования эксперимента приближенные решения системы являются неустойчивыми: малые изменения исходных данных могут приводить к недопустимо большим изменениям решений. Рассмотрены некоторые частные задачи, возникающие в особых ситуациях, когда, например, в результате ошибки не учтены наблюдения в ротатабельном плане. К числу таких частных задач отнесена также задача крутого восхождения.

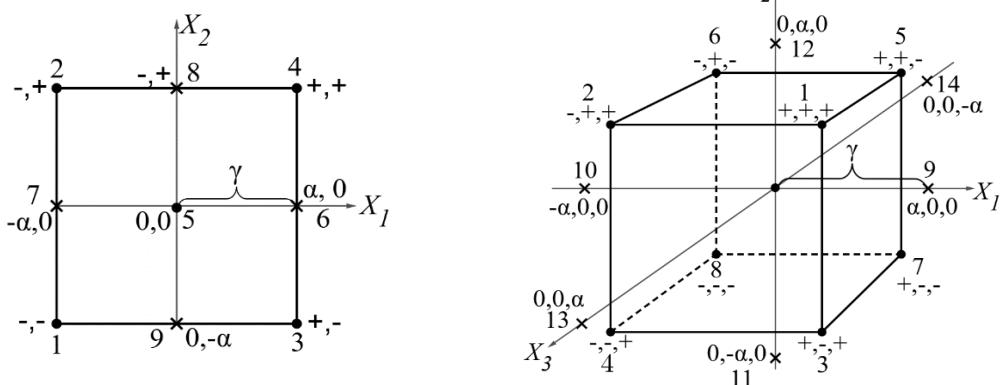


Рисунок 1. Расположение точек центральных ортогональных композиционных планов второго порядка для двух (а) и трёх (б) факторов.

Изучены представления диаграммы, которые имеют геометрический образ, связанный с физическим состоянием изучаемой системы. При полном описании системы возникает трудность, связанная с тем, что сумма независимых переменных нормирована, $\sum_i x_i = 1$, приходится специальным образом выбирать математическую модель.

При квадратичном и кубическом приближении модель задается уравнениями

$$y = \sum \beta_i x_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j; y = \sum \beta_i x_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i < l} \gamma_{ij} x_i x_j (x_i - x_j) + \sum_{i < j < l} \beta_{ijl} x_i x_j x_l.$$

В главе 2 проведено оценивание функций отклика, линейных относительно неизвестных параметров. Выявлена связь функций с линейными моделями наблюдений. При анализе изучаемых многофакторных экспериментов проверяется гипотеза H_0 , состоящая в том, что $M\{Y\} = X^\circ b^\circ$, против альтернативной $H_1: M\{Y\} \neq X^\circ \beta^\circ$, где $\beta^\circ = (\beta_0^\circ, \beta_1^\circ, \dots, \beta_{p_0}^\circ)'$. Для проверки гипотезы H_0 определялось отношение s_r^2 / s_e^2 . Величина s_e^2 представляет собой несмещенную оценку σ^2 и равна $s_e^2 = 1/(N-n)(Y'Y - \bar{Y}'V^{-1}\bar{Y})$, $\bar{y}_l = m^{-1} \sum_{s=1}^m y_{ls}$, ($l = 1, 2, \dots, n$), где $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)'$. Так как $V^{-1} = mI_n$, то $s_e^2 = \frac{1}{N-n} \left(\sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m y_{ls}^2 - m \sum_{l=1}^n \bar{y}_l^2 \right)$.

Оценка s_r^2 дисперсии σ^2 , связанная с неадекватностью модели равна $s_r^2 = Q_1/(n-r)$, где r – ранг матрицы X° . Величина $Q_1 = \bar{Y}'V^{-1}\bar{Y} - \beta^\circ X^\circ \bar{Y}$ где β° – МНК-оценка вектора β° , $X^\circ = (x_{jl}^\circ)$ ($l = 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, p_0$) – матрица, состоящая из n различных строк матрицы X° .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $\frac{s_r^2}{s_e^2} = \frac{(N-n) \left(m \sum_{l=1}^n \bar{y}_l^2 - N \sum_{j=0}^{p_0} (\beta_j^\circ)^2 \right)}{(n-r) \left(\sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m y_{ls}^2 - m \sum_{l=1}^n \bar{y}_l^2 \right)} > F_{\alpha; n-r, N-n}$.

Проверка гипотезы адекватности модели возможно лишь при ненасыщенном планировании, т.е. когда $\text{rank } X^\circ = r < n$ – числа различных точек плана.

В главе 3 исследуются центральные композиционные планы (ЦКП) второго порядка, в том числе и не ортогональные. Показано, что если ЦКП не является планом Бокса, то изменением «звездного» плеча α и преобразованием функции отклика можно сделать его ортогональным. В таблице 1 представлен соответствующий план. Чтобы добиться соблюдения свойства симметричности следует перейти от x_i^2 к центрированным величинам $x_i^* = x_i^2 - x_{i cp}^2$, где $x_{i cp}^2 = 1/N \sum x_{iu}^2$, $i = 1, 2, \dots, k$. Среднее значение $x_{i cp}^2$ для всех x_i^2 одинаково $x_{i cp}^2 = c = c(\alpha) = (N_0 + 2\alpha^2)/N$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда от исходной квадратичной модели можно перейти к модели:

$$\begin{aligned} \eta &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k + \beta_{11} (x_1^2 - x_{1 cp}^2 + x_{1 cp}^2) + \dots + \\ &+ \beta_{kk} (x_k^2 - x_{k cp}^2 + x_{k cp}^2) = d_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k + \beta_{11} x_1^* + \dots + \beta_{kk} x_k^*. \end{aligned}$$

В качестве примера рассматривается модель статистической обработки результатов аэродинамического эксперимента. Изучаемая аэродинамическая модель устанавливается в аэродинамической трубе с использованием донной державки. Чувствительные элементы выполнены вместе с телом тензовесов как одно целое и ориентированы так, чтобы деформации элементов, вызванные соответствующей составляющей аэродинамической силы или момента, были максимальными. Конструкция тензовесов такова, что позволяет измерять силы и моменты относительно заданной точки. Эта задача для Y , M_z и для Z , M_y решается

при помощи двух упругих элементов, установленных так, что по отношению друг к другу они выполняют роль кинематического элемента.

Таблица 1. Матрица комбинаторного плана

План	Матрица независимых переменных X^*									
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	x_1^*	x_2^*	x_3^*
ПФЭ 2^3	+	-	-	-	+	+	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	-	-	-	-	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	-	+	-	-	+	-	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	+	-	+	-	-	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	-	-	+	+	-	-	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	-	+	-	+	-	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	-	+	+	-	-	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	+	+	+	+	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	+	+	+	+	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
Центр плана	+	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$

Математическая модель весового эксперимента.

Для описания участка поверхности отклика аэродинамических нагрузок со значительной кривизной обычно используют полиномы второго порядка в виде:

$$\eta(x, \beta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2. \quad (1)$$

Планы активного аэродинамического эксперимента, позволяющие определить оценки коэффициентов математической модели в виде полиномов второго порядка (1), называются планами второго порядка. Причем всю процедуру, вплоть до получения оценки такой математической модели включительно, называют планированием второго порядка.

Необходимым и достаточным условием построения ортогональных композиционных планов (ОЦКП) второго порядка является взаимная ортогональность каждой пары вектор-столбцов матрицы базисных функций симметричного ЦКП. В указанной матрице при произвольной величине осевого плеча α , условие ортогональности выполняется для каждой пары вектор-столбцов, содержащей любой фактор x_i или любое взаимодействие $x_i x_j$ факторов. Выполнение условия ортогональности не зависит от числа N_0 центральных точек.

Введение центрированных квадратичных функций приводит к преобразованию оценки математической модели

$$\hat{y}(x, b) = b_0 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n b_{ii} + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} (x_i^2 - \lambda_2) = \tilde{b}_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (2)$$

Звездное плечо получим из выражения $(N_1 + 2n + N_0)N_1 = (N_1 + 2\alpha^2)^2$, откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{(N_1 + 2n + N_0)N_1} - N_1}{2}}, \quad N_1 = 2^{n-p} (p \geq 0). \quad (3)$$

Таким образом, если выбрать величину осевого плеча α для модели (2), равную величине, подсчитанной по формуле (3), то вектор-столбцы любых двух новых квадратичных функций \tilde{x}_i^2 и \tilde{x}_j^2 ($i, j = 1 \dots n; i \neq j$) будут ортогональны.

Проведение эксперимента по ОЦКП на аэродинамической установке реализуется после выбора основных уровней и шагов варьирования по всем управляемым факторам. Основная точка (центр плана) берется возможно ближе к центру области экспериментирования, в которой решается задача идентификации функции отклика. Число m повторных наблюдений в точках спектра ОЦКП выбирается в соответствии с требуемой степенью \sqrt{m} уменьшения ошибки оценки истинного значения отклика в этих точках.

Проверка значимости оценок коэффициентов регрессии проводится по t -критерию с $v = N(m-1) = (N_1 + 2n + N_0)(m-1)$ степенями свободы. При ортогональном планировании (ОЦКП) статистически незначимые оценки из уравнения (5) исключаются, при этом пересчет остальных, значимых, оценок не требуется. Предсказанные значения отклика в точках x_g ($g = 1 \dots N$) спектра ОЦКП определяются по формуле:

$$\hat{y}_g = \hat{y}(x_g, b) = \hat{b}_0 + \sum_{i=1}^n (x_i)_g b_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n b_{ij} (x_i x_j)_g + \sum_{i=1}^n b_{ii} (\tilde{x}_i^2)_g. \quad (4)$$

Использование оценки математической модели (4) для предсказания величины отклика в произвольной точке области экспериментирования вызывает большие неудобства из-за наличия в этом уравнении центрированных квадратичных функций \tilde{x}_i^2 вместо обычных x_i^2 . Для перехода к уравнению (4) необходимо вычислить величину b_0 . Согласно выражению $\tilde{b}_0 = b_0 - \lambda_2 \sum_{i=1}^n b_{ii}$, где λ_2 момент. Дисперсию оценки b_0 вычисляют по формуле:

$$S^2\{b_0\} = S^2\{\tilde{b}_0\} + n\lambda_2^2 S^2\{b_{ii}\} = \frac{S^2\{\bar{y}\}}{N} \left[1 + \frac{(N_1 + 2\alpha^2)_n^2}{2\alpha^4 N} \right].$$

Качество зависит от таких факторов, как лобовое сопротивление X_1 , момент тангажа X_2 , боковая сила; X_3 коэффициент, характеризующий форму лобового профиля; угол крена X_4 , подъемная сила X_5 (таблица 2). Качество оценивается величиной углов атаки и возникающими моментами относительно центра давления модели, величины которых определяются предварительным расчетом по распределению давления.

В качестве объекта исследования за отклик y - значения качества при различны углах аэродинамической модели.

Таблица 2. Матрица базисных функций для ОЦКП $n=3$ ($N_0=1$)

g	1	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2
1	1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	1	1	1
2	1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	1	1	1
3	1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	1	1	1
4	1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	1	1	1
5	1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	1	1	1
6	1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	1	1	1
7	1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	1	1	1
8	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	1	1	1
9	1	-1.215	0	0	0	0	0	1.475	0	0
10	1	-1.215	0	0	0	0	0	1.475	0	0
11	1	0	-1.215	0	0	0	0	0	1.475	0
12	1	0	+1.215	0	0	0	0	0	1.475	0
13	1	0	0	-1.215	0	0	0	0	0	1.475
14	1	0	0	+1.215	0	0	0	0	0	1.475
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Априори было установлено, что поверхность отклика имеет значительную кривизну в области экспериментирования. Поэтому для решения задачи идентификации функции отклика применен ОЦКП с ядром плана ДФЭ 2^{5-1} . На основании предварительных экспериментов определены основные уровни и шаги варьирования по каждому фактору, приведенные в таблице 3. В этой же таблице приведена матрица базисных функций, соответствующая уравнению (4).

Таблица 3. Матрица базовых функций для плана ОЦКП (с ядром ДФЭ 2^{5-1}) и статистическая обработка результатов эксперимента

Варьируемые факторы	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Основной уровень X_{i0} ($x_{i0} = 0$)	4	4	4	4	4.5
Шаг варьирования ΔX_i	1	1.5	1.5	0.5	1.5
Верхний уровень X_{iB} ($x_{iB} = +1$)	5	5.5	5.5	2.5	6
Нижний уровень X_{iH} ($x_{iH} = -1$)	3	2.5	2.5	1.5	3
Плечо $+\alpha$ ($x_i = +1,547$)	5.5	6.3	6.3	2.8	6.8
Плечо $-\alpha$ ($x_i = -1,547$)	2.5	1.7	1.7	1.4	2.2

Для ослабления влияния неконтролируемой неоднородности в условиях опытов и неуправляемого временного дрейфа на результаты исследования точки спектра ОЦКП рандомизировали.

Проверка статистической значимости полученных оценок проводилась с помощью t-критерия. Для этого определялись оценки значения t_j ($j=0 \dots 20$). В данном случае квантиль распределения Стьюдента $t_{1-g/2} (\nu = 27 \cdot 2 = 54) = 2.003$ при $q=0.05$. Некоторые оценки $b_4, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{34}, b_{35}, b_{33}, b_{44}$ следует считать статистически незначимыми. Значимость большинства оценок при парных

взаимодействиях и квадратичных членах еще раз подтверждает правильность описания процесса полиномом второй степени. Итак, получена следующая оценка математической модели:

$$\hat{y}_g(x, b) = 12.805 + 0.48x_1 + 0.878x_2 + 1.083x_3 + 0.379x_5 + 0.361x_1x_2 + 0.477x_2x_3 - 0.344x_2x_4 - 0.393x_2x_5 - 0.373x_4x_5 + 0.488x_1^2 - 0.548x_2^2 - 0.882x_5^2.$$

Для проверки гипотезы об адекватности математической модели и функции отклика вычисляем $\sum_{g=1}^{27} (\bar{y}_g - \hat{y}_g)^2 = 10.644$ и определяем $S_{omk}^2 = 0.7603$.

Так как $F = 1.6998 < F_{1-q}(14.54) = 1.9$, (где $F_{1-q}(14.54) - (1-q)$ %-й квантиль распределения Фишера (при $q = 0,05$) с числами степеней свободы $v_1 = 14, v_2 = 54$, то проверяемая гипотеза об адекватности математической модели и функции отклика не противоречат результатам наблюдений отклика.

В результате получаем окончательную оценку математической модели:

$$\hat{y}(x, b) = 13.530 + 0.480x_1 + 0.878x_2 + 1.083x_3 + 0.379x_5 + 0.361x_1x_2 + 0.477x_2x_3 - 0.344x_2x_4 - 0.393x_2x_5 - 0.373x_4x_5 + 0.488x_1^2 - 0.548x_2^2 - 0.882x_5^2,$$

где в соответствии с условиями данного эксперимента (табл. 4) нормированных (x_i) и натуральные (X_i) значения факторов связаны соотношениями:

$$x_1 = \frac{X_1 - 4}{1}; x_2 = \frac{X_2 - 4}{1}; x_3 = \frac{X_3 - 4}{1.5}; x_4 = \frac{X_4 - 2.0}{0.5}; x_5 = \frac{X_5 - 4}{1.5}.$$

Результаты моделирования хорошо согласуются с известными результатами. Полученная формула, может быть, использования при решении практических задач экспериментальной аэродинамики.

В главе 4 проведена оценка параметров поверхностного трения методами теории планирования эксперимента. Приводится пример математического описания влияния существенных факторов на коэффициент сопротивления трения $c_f / 2$. Экспериментально установлено, что на $c_f / 2$ для течения в пограничном слое вдоль шероховатой поверхности влияют следующие восемь существенных факторов: $X_1 = u_e$ — скорость течения потока газа; $X_2 = \Delta T$ — температура газа; $X_3 = St_x \cdot 10^3$ — число Стантона; $X_4 = \delta$ — ширина обтекаемой пластины; $X_5 = Re_x \cdot 10^{-6}$ — число Рейнольдса; $X_6 = k_s^+$ — параметр эквивалентной песочной шероховатости; $X_7 = M_2 / M_1$ — отношение молекулярного веса вдуваемого газа к молекулярному весу газа в набегающем потоке; X_8 — линейная координата x вдоль шероховатой (проницаемой) поверхности пластины. Для получения необходимой зависимости целесообразно использовать план эксперимента с варьированием факторов на двух уровнях (таблица 4).

Следует отметить, что фактор X_1 описывает влияние скорости течения потока на коэффициент трения. Фактор X_2 характеризует разность температур пластины и обтекающего ее потока газа. Фактор X_4 описывает влияние геометрических размеров пластины, X_6 — характеризует высоту неровностей шероховатой проницаемой поверхности. Выходом u является величина $(c_f / 2) \cdot 10^3$.

Таблица 4. План эксперимента с варьированием факторов на двух уровнях

Факторы	$X_1, \text{м/с}$	$X_2, ^\circ\text{C}$	X_3	$X_4, 10^{-3} \text{м}$	X_5	$X_6, 10^{-3} \text{м}$	X_7	$X_8, \text{м}$
Основной уровень X_0	40	-6	1.7	1.0	1.5	0.79	1.00	1.0
Интервал варьирования (ΔX_i)	10	2	1.1	0.1	1.0	0.04	0.75	0.5
Нижний уровень $X_i = -1$	30	-4	0.6	0.9	0.5	0.75	0.25	0.5
Верхний уровень $X_i = +1$	50	-8	2.8	1.1	2.5	0.83	1.75	1.5

После обработки статистики, для всех перечисленных факторов были определены основные уровни, соответствующие некоторым усредненным условиям проведения эксперимента, и интервалы варьирования, с помощью которых для удобства последующих операций эти факторы приводятся к безразмерным (кодированным) переменным по соотношениям вида $x_i = (X_i - X_0)/\Delta X_i$ (таблица 4). Для построения дробной реплики ядра выбраны следующие генерирующие соотношения: $x_6 = x_2x_3x_4x_5$; $x_7 = x_1x_3x_4x_5$; $x_8 = x_1x_2x_5x_6$. Величина звездного плеча для случая ротатабельного плана определяется как $\alpha = 2^{(8-3)/4}$, где $N_0 = 2^{8-3}$ — количество опытов в ядре плана. Таким образом, общее число опытов в данном плане $N = 2^{8-3} + 2 \cdot 8 + 10 = 58$. Для оценки дисперсии воспроизводимости и проверки адекватности модели использовались опыты в центре плана ($n_0 = 10$). Проверку адекватности полученной модели осуществляли с помощью F -критерия:

$$F = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s^2 \{y\}}; s_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{n-d} \sum_{u=1}^N n_u (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 ,$$

где $n = N - n_0 + 1$ — число различных точек плана. Для уровня значимости 0,05 и числа степеней свободы числителя $n - d = 49 - 17 = 32$ и знаменателя $n_0 - 1 = 9$ табличное значение критерия Фишера составляет $F_{\text{kp}} = 2.2$. Так как $F = 0.045/0.036 = 1.25 < F_{\text{kp}}$, то можно полагать, что полученная модель адекватно описывает опытные данные. Окончательно, на основании проведенного эксперимента, получена следующая математическая модель, позволяющая определять значение коэффициента поверхностного трения проницаемой пластины, обтекаемой газом, при соблюдении вышеуказанных условий проведения эксперимента:

$$\hat{y} = 2.412 - 0.149x_1 + 0.02x_2 + 0.009x_3 + 0.005x_4 + 0.003x_5 - 0.006x_6 - 0.007x_7 + 0.004x_8 - 0.032x_1^2 - 0.0491x_2^2 - 0.013x_3^2 - 0.002x_4^2 + 0.005x_5^2 + 0.038x_6^2 + 0.036x_7^2 + 0.002x_8^2.$$

Переводя полученное соотношение в натуральный масштаб, после преобразований получаем следующую эквивалентную модель:

$$(c_f / 2) \cdot 10^3 = 20.78 - 0.089u_e - 0.147\Delta T - 0.045(St_x \cdot 10^3) + 0.45\delta - 0.012Re_x \cdot 10^{-6} - 37.675k_s^+ - 0.137M_2 / M_1 - 0.008x_8 - 0.032u_e^2 + 1.225 \cdot 10^{-2}\Delta T^2 - 1.074 \cdot 10^{-2}(St_x \cdot 10^3)^2 - 0.2\delta^2 + 0.005(Re_x \cdot 10^{-6})^2 + 23.75(k_s^+)^2 + 0.064(M_2 / M_1)^2 + 0.008x_8^2.$$

На рисунке 2 в качестве примера приведены зависимости функции отклика от параметров набегающего потока газа и состояния обтекаемой поверхности. Графические зависимости представляют собой функции двух факторов, остальные

шесть факторов зафиксированы на их основных уровнях. Связь между теплообменом и трением, установленная для проницаемой поверхности, является следствием одинакового воздействия определяющих параметров потока на условия теплообмена и сопротивление (рисунок 2).

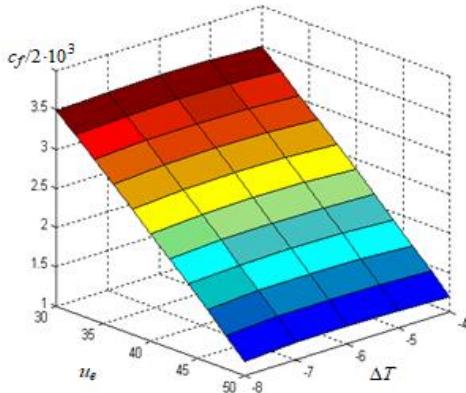


Рисунок 2. Зависимости коэффициента сопротивления трения шероховатой пластины, обтекаемой потоком газа, от разности температур пластины и потока X_2 и скорости потока X_1 (в натуральных переменных), числа Рейнольдса X_5 и геометрического размера пласти

При вычислении числа Стантона вместо толщины скоростного пограничного слоя с поправкой на толщину теплового пограничного слоя бралась толщина потери импульса с поправкой на толщину потери энергии.

Особенности течения в донной области экспериментальных моделей летательных аппаратов

Исследованная в настоящей работе коническая модель в аэродинамической трубе с помощью донной державки с относительным диаметром $d_1 / d_m = 0.25$, можно считать тонкой. Державка для крепления цилиндрической удлиненной модели (рисунок 3) имела внутренний канал для подвода в модель сжатого воздуха, что обусловило величину $d_1 / d_m = 0.5$. Кроме того, на внешней поверхности державки были уложены дренажные трубки, которые увеличили эффективную величину $d_1 / d_m = 0.525$.

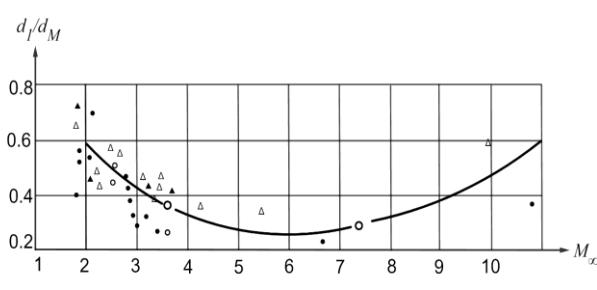


Рисунок 3. Результаты измерения донного давления от числа Маха в случае свободного полета ($d_1 / d_M = 0$): сфера, полусфера-цилиндр; \blacktriangle – цилиндр с плоским торцом, \circ – острый конус Δ – острый конус, \bullet – сфера, полусфера-цилиндр.

Предполагаем, что на относительное донное давление P_δ / P_∞ влияют четыре фактора: 1. $X_1 = M_\infty$ – число Маха набегающего потока, 2. $X_2 = d_1 / d_m$ – отношения диаметров державки и миделя, 3. $X_3 = L_1 / D$ – отношение длины и диаметра державки, 4. $X_4 = d_r / d_m$ – относительный диаметр горла следа. Для получения необходимой зависимости целесообразно использовать план эксперимента с варьированием факторов на двух уровнях (см. таблица 5). Нормирование X_i связаны с натуральными следующими соотношениями:

$$X_1 = (X_1 - 5.5) / 4.5; X_2 = (X_2 - 0.5) / 0.5; X_3 = (X_3 - 4.25) / 0.15; X_4 = (X_4 - 0.45) / 0.15.$$

Таблица 5. Исходные данные

Интервал варьирования и уровень факторов	X_1	X_2	X_3	X_4
Основной уровень	5.5	0.5	4.25	0.45
Нижний уровень (-1)	1	0	2.7	0.3
Верхний уровень (+1)	10	1	5.8	0.6
Интервал варьирования	4.5	0.5	0.15	0.15

Для сокращения объема работы эксперимент проводился по дробному факторному плану (ДФП) 2^{4-1} с заменой $X_4 = X_1X_2$. Таким образом, математическое описание функции отклика заданной области:

$$Y = 4.291 + 0.599 \cdot x_1 + 0.165x_2 + 0.159x_3 + 2.715 \cdot 10^{-2}x_4 + 5.67 \cdot 10^{-2}x_1x_3 + 7.8 \cdot 10^{-3}x_2x_3.$$

Основные результаты работы.

1. Разработаны теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследования обтекания моделей летательных аппаратов, и их фрагментов установившимся потоком.
2. Проведены расчетные и экспериментальные исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов и их элементов, разработаны методы расчета этих характеристик.
3. Систематизированы математические модели, численные алгоритмы в теории планирования эксперимента с использованием данных аэродинамического эксперимента. Предложены принципы моделирования аэродинамических моделей на эмпирическом уровне и оценены ошибки оценивания. Проведена проверка гипотезы адекватности для многомерной математической модели при неравномерном дублировании аэродинамических экспериментов.
4. Разработаны критерии и модели полного факторного эксперимента в аэродинамических трубах и дробных реплик. Предложены интервалы варьирования и кодовые значения переменных аэродинамических параметров. Проведен анализ факторных аэродинамических экспериментов и факторные эксперименты с повторными наблюдениями. Проведена проверка гипотезы адекватности полученных математических моделей.
5. Разработаны и обоснованы методы построения и алгоритмы для центральных композиционных планов. Получены ортогональные центрально-композиционные планы второго порядка для аэродинамических моделей. Проверена гипотеза адекватности модели при наличии повторных испытаний в аэродинамических трубах в центре плана.
6. Представлены результаты статистической обработки экспериментальных данных аэродинамического эксперимента с учетом взаимного влияния сил и моментов с использованием генерирующих соотношений высокой дробности.
7. Разработаны методы обработки результатов измерения донного давления и трения при определении нестационарных газодинамических характеристик в аэродинамических трубах.
8. Получен метод учета влияния поддерживающих устройств моделей ЛА на

аэродинамические характеристики, а именно скоростной напор, числа Маха и Рейнольдса.

Труды по теме диссертации.

1. Battulga E., Sidnyaev N. I. Methodology for Introducing Corrections in Statistical Studies Based on Control Charts // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2024, Vol. 53, No. 1, pp. 88–95. DOI: 10.1134/S1052618824010126 (0.8 п. л./0.4 п.л.).
2. Battulga E., Sidnyaev N. I. Mathematical modeling of compositional rotatable plans in problems of mechanics // Journal of Institute of Mathematics and Digital Technology. 2024. Vol. 6 No. 1. pp. 84–98. DOI: 10.5564/jimdt.v6i1.3595 (0.9 п. л./0.45 п.л.).
3. Battulga E., Sidnyaev N. I. Method of Control Point Charts in Statistical Product Control // Russian Engineering Research. 2025. Vol. 45, No. 5, pp. 584–590. DOI: 10.3103/S1068798X25700777 (0.6 п. л./0.3 п.л.).
4. Баттулга Э., Сидняев Н.И., Методология обнаружения и удаления аномальных значений в статистических исследованиях // Надежность. 2024. №1. С. 4-9. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-1-4-9> (0.8 п. л./0.4 п.л.).
5. Баттулга Э., Сидняев Н.И., Прогнозирование остаточного срока активного существования космического аппарата // Космическая техника и технологии. 2024. №4(47). С.101-110 (0.8 п. л./0.4 п.л.).
6. Баттулга Э., Сидняев Н. И., Метод планирования нормальных контрольных и определятельных испытаний бортового оборудования летательных аппаратов на безотказность // Физические основы приборостроения. 2024 Т. 13. № 3(53). С. 76-91. DOI: 10.25210/jfop-2403-BYYWLX. EDN: BYYWGX (1.0 п. л./0.5 п.л.).
7. Баттулга Э., Сидняев Н.И. Статистическая обработка тензометрических испытаний аэродинамических сил // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2025. № 2 (152). С. 32—42. DOI: 10.36652/0042-4633-2025-104-3-189-196 (1.5 п. л./0.75 п.л.).
8. Баттулга Э., Сидняев Н.И. Типы случайных процессов, связанных со сложным событием. Практические приложения // Математическое образование. 2025. № 1 (113). С. 57-68 (1.0 п. л./0.5 п.л.).
9. Баттулга Э., Сидняев Н.И. Особенности течения в донной области экспериментальных моделей летательных аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации, 2025, вып. 5. EDN LSVYIJ DOI 10.18698/2308-6033-2025-5 (1.6 п. л./0.8 п.л.).
10. Баттулга Э., Анализ результатов исследования тепловых потоков на поверхности сублимирующих поверхностей при обтекании потоком газа // «Политехнический молодежный журнал» МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2025. №3 (98)/2025. С.12-30 (1.4 п. л.).