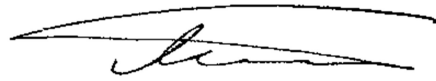


На правах рукописи



Попов Валерий Васильевич

**Разработка методов анализа нелинейной динамики  
дифференциального редуктора турбовинтового двигателя**

Специальность 1.1.7 Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор технических наук, доцент  
**Сорокин Фёдор Дмитриевич**

Официальные оппоненты: **Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН) — филиал ФГБУН Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН

**Красноруцкий Дмитрий Александрович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прочности летальных аппаратов Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Защита состоится «31» мая 2023 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.331.12 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Ваш отзыв на автореферат в 2-х экземплярах, заверенных печатью, просим направлять по указанному адресу.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте [www.bmstu.ru](http://www.bmstu.ru).

Телефон для справок: +7(499)263-66-39

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д.т.н., доцент



М.В. Мурашов

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Турбовинтовой двигатель (ТВД) является разновидностью газотурбинного двигателя, в котором энергия горячих газов через редуктор приводит во вращение воздушные винты. Необходимость использования редуктора обусловлена высокой скоростью вращения турбины и её малым крутящим моментом, в то время как воздушному винту требуются большой крутящий момент и меньшие обороты. Топливная эффективность турбовинтового двигателя на дозвуковых скоростях обеспечила ему широкое распространение, как в гражданской, так и в военной авиации.

По причине высоконагруженности и большой частоты вращения редуктор ТВД зачастую относят к критическим узлам, то есть его технические параметры определяют качество машины в целом. Например, при проведении модернизации ТВД специального самолета повышенной грузоподъемности в результате изменения массово-инерционных свойств биротативной винтовой группы возник повышенный износ центральной шестерни дифференциального редуктора, длящийся в течение первых 60-100 часов работы двигателя. После прекращения повышенного износа, редуктор становится источником полигармонического возбуждения, одна из гармоник которого совпадает с собственной частотой лопаток ступеней компрессора и приводит к их разрушению.

В связи с вышесказанным, важной задачей в процессе проектирования разрабатываемых и модернизации существующих ТВД является обеспечение прочности, надежности и долговечности редуктора с учётом экономической эффективности двигателя в целом. Одним из путей решения этой проблемы является широкое применение методов численного анализа с учётом всех элементов конструкций (зубчатые передачи, валы, подшипники, корпусные детали и т.д.) и режимов эксплуатации, включая и нестационарные.

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) в прямой постановке является основным видом численного анализа конструкций различного назначения. Однако его применение к решению задачи анализа нелинейной динамики механизмов с зубчатыми передачами крайне затруднительно в виду необходимости подробной дискретизации системы и учёта контактного взаимодействия, что значительно увеличивает временные и вычислительные затраты. Альтернативным подходом является использование метода динамики упругих многокомпонентных систем, именуемого в англоязычной литературе как *flexible multibody dynamics*. Этот метод основан на моделирование сложных элементов конструкций в виде эквивалентных нелинейных моделей меньшей размерности. Стоит отметить, что МКЭ в прямой постановке можно использовать для получения эквивалентных характеристик таких моделей или верификации.

**Цель диссертационной работы** заключается в выявлении причин возникновения повышенного износа при изменении массово-инерционных свойств дифференциального редуктора ТВД и определении способа его устранения на основе разработки и верификации методов анализа нелинейной динамики редуктора.

**Для реализации поставленной цели были решены следующие задачи:**

1. Разработана и верифицирована модель зубчатой передачи для решения задач нелинейной динамики дифференциального редуктора ТВД;
2. Разработана и верифицирована методика определения жесткости прямозубой зубчатой передачи с учетом модификации профиля;
3. Проведено расширенное моделирование дифференциального редуктора ТВД специального самолета повышенной грузоподъемности и продемонстрированы эффекты возникновения повышенного износа и полигармонического возбуждения, приводящие к резонансу;
4. Выполнено исследование динамических параметров модели, характеризующих износ, и предложено техническое решение по его устранению.

**Методы исследования.** В диссертации используются метод Ньютона-Рафсона для решения нелинейных уравнений равновесия, метод Ньюмарка для решения неявных уравнений динамики механических систем, метод конечного элемента, реализованный в комплексе ANSYS, для выполнения верификационных расчетов и метод Рунге-Кутты для численного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений.

**Научная новизна:**

1. Разработанная новая пространственная модель зубчатой передачи содержит рациональное количество степеней свободы по сравнению с альтернативными моделями, что обеспечивает увеличение производительности по временным и вычислительным затратам.
2. Предложен инкрементальный подход представления больших поворотов, который позволил избежать сингулярностей при описании пространственного вращения твердого тела.
3. Создана новая методика для определения жесткости прямозубых зубчатых передач, учитывающая модификацию профиля.

**Достоверность результатов** подтверждается строгостью использованных математических методов, верификацией разработанных алгоритмов по результатам других авторов и результатам моделирования с помощью МКЭ.

**Практическая значимость диссертации:**

1. Авторская модель зубчатой передачи позволяет проводить моделирование сложноструктурных механизмов и выполнять анализ нелинейной динамики, как при проектировании, так и при модернизации ТВД.

2. Сформулировано техническое решение о модификации профиля зубчатой передачи редуктора ТВД на основе разработанной методики определения жесткости.

**Внедрение.** Разработанная модель зубчатой передачи и методика определения жесткости зубчатой передачи были реализованы в программном продукте Dynamics R4 для решения задач роторной динамики турбомашин различного назначения, разработанном научно-техническим центром роторной динамики «Альфа-Транзит». В учебный процесс кафедры прикладной механики МГТУ им. Н. Э. Баумана внедрены следующие результаты диссертации:

- а) методика определения жесткости зубчатой передачи;
- б) инкрементальный подход представления больших поворотов.

Использование результатов диссертации подтверждено соответствующими актами о внедрении.

**На защиту выносятся следующие положения диссертации:**

1. Методика анализа нелинейной динамики редуктора ТВД специального самолета повышенной грузоподъемности.

2. Новая модель зубчатой передачи на основе инкрементального представления больших поворотов и её верификация.

3. Новая методика определения жесткости зубчатой передачи и её верификация.

4. Результаты численных расчетов динамического поведения дифференциального редуктора ТВД при различных конфигурациях его конструкции.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и были одобрены на XXII Всероссийской научно-технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации», Пермь, 2021; XXV Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова, Москва, 2020; на научно-технической конференции молодых специалистов «Авиационные двигатели и силовые установки», Москва, 2019; на международных конференциях «Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов», Москва, 2019, 2018, 2016 и 2015; на научных семинарах кафедры прикладной механики МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2018, 2017, 2016, 2015, 2014.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, в том числе 6 работ в изданиях, входящих в перечень ВАК при Минобрнауки России, и 2 работы в изданиях, индексируемых в Scopus.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и приложения. Общий объем составляет 132 страницы, 61 рисунок, 14 таблиц. Список используемой литературы содержит 128 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, приведена постановка задач и краткая аннотация содержания работы по разделам, дана оценка научной новизны и практической значимости полученных результатов и представлены методы исследования в диссертации.

**В первой главе** представлена краткая история появления и развития ТВД и описана проблема повышенного износа центральных шестерней дифференциального редуктора при модернизации ТВД специального самолета повышенной грузоподъемности. Выполнен обзор работ, посвященных математическому моделированию динамики зубчатых передач, из которых особо выделена модель А. Кардоны, и алгоритмам определения жесткости зубчатых передач. Рассмотрены различные модели стержневых элементов и подшипников, которые могут быть использованы для моделирования элементов конструкции редуктора.

**Вторая глава** посвящена разработке математической модели пространственной зубчатой передачи, предназначенной для решения задач нелинейной динамики. Основой математической модели является уравнение движения механической передачи в приращениях, полученное при использовании формализма Лагранжа

$$[M]\Delta\ddot{y} + ([C] + [G])\Delta\dot{y} + [K]\Delta y = F_{ext} - F_{inner} - F_{inerc} - F_{damp} + F_{fric}, \quad (1)$$

где  $\Delta y, \Delta\dot{y}, \Delta\ddot{y}$  – векторы приращений обобщенных координат и их первых и вторых производных по времени;  $F_{ext}$  – вектор обобщенных внешних сил;  $F_{inner}$  – вектор внутренних сил;  $F_{inerc}$  – вектор инерционных сил;  $F_{damp}$  – вектор диссипативных сил;  $F_{fric}$  – вектор сил трения;  $[M] = \frac{\partial F_{inerc}}{\partial \ddot{y}}$  – матрица масс;  $[G] = \frac{\partial F_{inerc}}{\partial \dot{y}}$  – матрица инерционных и гироскопических эффектов;  $[C] = \frac{\partial F_{damp}}{\partial \dot{y}}$  – матрица демпфирования;  $[K] = \frac{\partial F_{inner}}{\partial y}$  – матрица жесткости.

Зубчатая передача в своей начальной конфигурации (Рис.1) описывается с помощью радиус-векторов положения каждого из колес  $r_{a0}$  и  $r_{b0}$  до соответствующего геометрического центра и троек взаимно перпендикулярных ортов  $e_{10}^a, e_{20}^a, e_{30}^a$  и  $e_{10}^b, e_{20}^b, e_{30}^b$ , размещенных в этих центрах и направленных следующим образом: орт  $e_{10}$  смотрит в центр другого колеса, орт  $e_{30}$  перпендикулярен плоскости колеса и сонаправлен с осью колеса, орт  $e_{20}$  дополняет  $e_{10}, e_{20}, e_{30}$  до правой тройки векторов.

Описание больших поворотов в модели по аналогии с моделью Кардона происходит с помощью вектора Эйлера  $\vartheta$  и связанного с ним

тензора поворота  $\mathbf{L}(\mathfrak{g})$ , который можно рассматривать как тензорную функцию векторного аргумента

$$\mathbf{L}(\mathfrak{g}) = \mathbf{E} \cos(|\mathfrak{g}|) + \frac{1 - \cos(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|^2} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} + \frac{\sin(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} \mathfrak{g} \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичный тензор;  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  – диадное произведение векторов  $\mathfrak{g}$ ;

$\mathfrak{g} \times \mathbf{E}$  – кососимметричный тензор с сопутствующим вектором  $\mathfrak{g}$ .

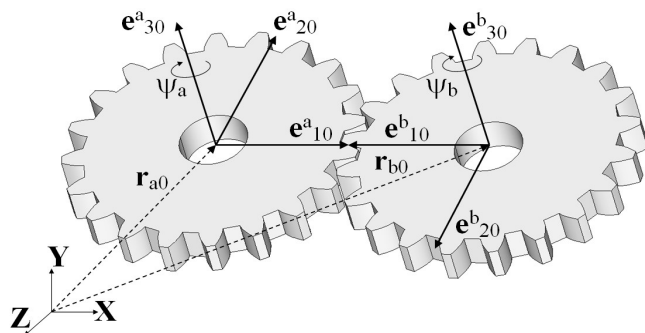


Рис. 1. Исходное положение зубчатой передачи

Использование вектора Эйлера в качестве способа описания больших поворотов неминуемо ведет к ограничению, обусловленному вырождением тензора, связывающего угловые скорости с производной вектора Эйлера (тензор П.А. Жилина). Для обхода этого ограничения используется инкрементальный способ описания вращения

путем разделения полного поворота на большой накопленный и малый дополнительный повороты. В начале шага итерационного процесса, либо шага интегрирования по времени положение и повороты всех узлов конструкции заданы. Это значит, что известны тензоры (матрицы) поворотов всех узлов. В процессе итераций либо численного интегрирования накопленную часть поворота произвольного узла (в виде тензора  $\mathbf{R}_0$ ) предлагается оставлять неизменной, а изменять только дополнительную часть (в виде вектора Эйлера  $\mathfrak{g}$ ). По завершению шага (итераций, либо интегрирования) вектор Эйлера с помощью функции (2) превращается в тензор дополнительного поворота и перемножается с тензором накопленного поворота.

Обобщая вышесказанное на модель зубчатой передачи, можно заключить, что перемещение каждого из колес описывается с помощью векторов линейных перемещений центров  $\mathbf{u}_a$  и  $\mathbf{u}_b$ , тензоров больших поворотов  $\mathbf{R}_a$  и  $\mathbf{R}_b$ , которые не меняются на шаге интегрирования, и векторов Эйлера малых дополнительных поворотов  $\mathfrak{g}_a$  и  $\mathfrak{g}_b$ . Вектор состояния передачи состоит из линейных перемещений и малых дополнительных поворотов каждого из колес, поэтому содержит 12 компонент

$$\mathbf{y} = \left( \mathbf{u}_a \ \mathfrak{g}_a \ \mathbf{u}_b \ \mathfrak{g}_b \right)^T. \quad (3)$$

Положение колёс в актуальной конфигурации описывается через новые радиус-векторы  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{r}_B$ , а также орты  $\mathbf{e}_{10}^A$ ,  $\mathbf{e}_{20}^A$ ,  $\mathbf{e}_{30}^A$  и  $\mathbf{e}_{10}^B$ ,  $\mathbf{e}_{20}^B$ ,  $\mathbf{e}_{30}^B$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_a &= \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a \\ \mathbf{r}_b &= \mathbf{r}_{b0} + \mathbf{u}_b \\ \mathbf{e}_i^a &= \mathbf{L}(\mathfrak{g}_a) \cdot \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{e}_{i0}^a, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{e}_i^b &= \mathbf{L}(\mathfrak{g}_b) \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{e}_{i0}^b, \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}\tag{4}$$

После совершения движения орты  $\mathbf{e}_{10}^a$  и  $\mathbf{e}_{10}^b$  в общем случае не направлены в точку контакта. Само положение точки контакта при упругом взаимодействии колёс не может быть строго определено в виду деформации контактирующих зубьев. В связи с этим определяется орт  $\mathbf{e}_{1ref}$ , указывающий в условную точку контакта – точку на делительной окружности бóльшего по диаметру колеса, которая является актуальной точкой контакта в случае жестких обоих колёс. Из-за упругости зацепления и перемещений центров колес орты  $\mathbf{e}_{1ref}^a$  и  $\mathbf{e}_{1ref}^b$  указывают в разные точки условного контакта. Данное расхождение описывается вектором упругого рассогласования

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{r}_{b0} + \mathbf{u}_b + \rho_b \mathbf{e}_{1ref}^b) - (\mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a + \rho_a \mathbf{e}_{1ref}^a),\tag{5}$$

где  $\rho_a$  и  $\rho_b$  – радиусы делительных окружностей колеса  $a$  и  $b$  соответственно.

Проекция вектора  $\Delta \mathbf{u}$  на направление нормали к зубу дает величину относительного контактного смещения зубьев

$$\Delta s = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} + \Delta x_{error},\tag{6}$$

где  $\Delta x_{error}$  – добавка к величине кинематической ошибки передачи, учитывающая допуски и несовершенства ее изготовления и вычисляемая как

$$\Delta x_{error} = X \cdot (1 - \cos(z_a \psi_a)),\tag{7}$$

где  $z_a$  – количество зубьев колеса  $a$ ;  $X$  – амплитуда погрешности изготовления, выбираемая в зависимости от точности зубчатых колес.

Упругая энергия деформации, с учетом боковых зазоров в передаче, определяется по следующему соотношению



$$\begin{aligned} \frac{b}{2} < \Delta s \Rightarrow U &= \frac{k_m \left( \Delta s - \frac{b}{2} \right)^2}{2}, \quad -\frac{b}{2} < \Delta s < \frac{b}{2} \Rightarrow U = 0, \\ -\frac{b}{2} > \Delta s \Rightarrow U &= \frac{k_m \left( \Delta s + \frac{b}{2} \right)^2}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $k_m$  – коэффициент жесткости зубчатой передачи,  $b$  – величина зазора.

Кинетическая энергия зубчатой передачи является квадратичной формой линейных и угловых скоростей, при этом роль матрицы квадратичной формы играет матрица масс в локальной системе координат  $[\mathbf{M}_0]$ , повернутая до актуального положения, и с учётом соотношения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & & \\ & \mathbf{B}_a & & \\ & & \mathbf{E} & \\ & & & \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}_a)$$

$$\mathbf{B}_b = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}_b)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{E} \frac{\sin(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|} + \frac{|\boldsymbol{\vartheta}| - \sin(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|^3} \boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta} + \frac{1 - \cos(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2} \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b$  – поступательные скорости центров колес,  $\boldsymbol{\omega}_a, \boldsymbol{\omega}_b$  – угловые скорости колес,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$  – тензор П.А. Жилина, выглядит следующим образом

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{N}] [\mathbf{M}_{stat}] [\mathbf{N}]^T \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$[\mathbf{M}_{stat}] = [\mathbf{R}_I] [\mathbf{M}_0] [\mathbf{R}_I]^T; \quad [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a & & & \\ & \mathbf{B}_a & & \\ & & \mathbf{L}_b & \\ & & & \mathbf{B}_b \end{bmatrix},$$

где матрица  $[\mathbf{M}_{stat}]$  не зависит от поворотов на данном инкрементном шаге;  $[\mathbf{N}]$  – матрица, аккумулирующая функции, зависящие от малых поворотов  $\boldsymbol{\vartheta}_a, \boldsymbol{\vartheta}_b$ ;  $[\mathbf{R}_I]$  – глобальная матрица поворота без учета малых поворотов

$$[\mathbf{R}_I] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \mathbf{R}_0 & & & \\ & \mathbf{R}_a \mathbf{R}_0 & & \\ & & \mathbf{R}_b \mathbf{R}_0 & \\ & & & \mathbf{R}_b \mathbf{R}_0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$\mathbf{R}_0$  – тензор поворота от декартовых координат к исходному состоянию;  $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b$  – тензоры больших накопленных поворотов первого и второго узлов.

Согласно соотношению (10) и обычным положениям аналитической механики искомой матрицей обобщенных масс текущего положения

зубчатой передачи является следующее произведение матриц

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{N}][\mathbf{M}_{stat}][\mathbf{N}]^T. \quad (12)$$

При анализе зубчатых передач с зазорами необходимо учитывать диссипацию энергии в момент контакта зубьев после выборки зазора. Рассмотрим линейные скорости колёс  $a$  и  $b$  в условной точке контакта:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ref}^a &= \mathbf{v}_a + \rho_a \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{e}_{1ref}^a \\ \mathbf{v}_{ref}^b &= \mathbf{v}_b + \rho_b \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_{1ref}^b. \end{aligned} \quad (13)$$

Разница между скоростями в точке контакта является относительной скоростью скольжения колёс

$$\mathbf{v}_{slid} = \mathbf{v}_{ref}^a - \mathbf{v}_{ref}^b. \quad (14)$$

Проекция скорости скольжения на нормаль к поверхности зуба даёт выражение для величины скорости удара вдоль линии зацепления

$$\Delta v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{slid}, \quad (15)$$

которая связана непосредственно с диссипативной функцией зубчатой передачи

$$-\frac{b}{2} < \Delta s \Rightarrow \Phi = \frac{b_m \cdot \Delta v^2}{2}, \quad \frac{b}{2} \geq \Delta s \geq -\frac{b}{2} \Rightarrow \Phi = 0, \quad \frac{b}{2} > \Delta s \Rightarrow \Phi = \frac{b_m \cdot \Delta v^2}{2}, \quad (16)$$

где  $b_m$  – коэффициент демпфирования.

Компоненты векторов и матриц в уравнении (1) получаются путём формального дифференцирования выражений (8), (10) и (16) по компонентам векторов состояний  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$  и  $\ddot{\mathbf{y}}$

$$\begin{aligned} F_{inner\ i} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}; & F_{damp\ i} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_i}; & F_{merc\ i} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i}; \\ K_{ij} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j}; & C_{ij} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j}; & G_{ij} &= \frac{\partial F_{merc\ i}}{\partial \dot{y}_j}. \end{aligned} \quad (17)$$

Стоит отметить, что для выражений (17) были получены замкнутые аналитические соотношения, однако они являются довольно громоздкими и в полном объеме не представлены.

Сила трения в зацеплении определяется как взятая с обратным знаком ненулевая проекция орта вектора относительной скорости скольжения на плоскость перпендикулярную нормали к зубу колеса и умноженная на величину нормальной силы в зацеплении и коэффициент трения между зубьями  $\mu_f$ :

$$\mathbf{F}_{fric} = -\mu_f F_n \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_{slid}}{|(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_{slid}|}. \quad (18)$$

Для верификации модели эвольвентной зубчатой передачи проводились следующие верификационные операции:

- сравнение с анализом динамики трансмиссии с прямозубой передачей по примеру из работы А. Кардона (Рис.2, а);
- сравнение с анализом динамики прямозубой передач по экспериментальным результатам из работы А. Кубо (Рис.2, б);
- сравнение с анализом динамики планетарного редуктора по результатам из работы Р. Августа (Рис.2, в).

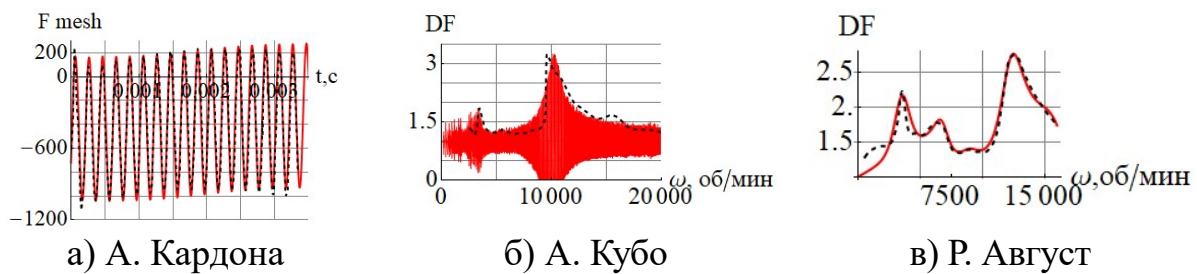


Рис. 2. Результаты сравнения верификационных тестов, полученных с помощью авторской модели (красный) с результатами других авторов (черный)

Сопоставления результатов, полученных в тестовых задачах, с результатами из работ других авторов дает возможность утверждать, что верификация модели успешно пройдена.

**В третьей главе** разработана методика определения функции жесткости прямозубой эвольвентной зубчатой передачи. Переменная жесткость  $k_m$  в зубчатых передачах является одним из основных возбуждающих факторов, поэтому её корректное определение необходимо при моделировании зубчатых механизмов, наряду с выбором соответствующей математической модели. Для введения самого понятия жесткости зубчатой передачи рассматривается прямозубое эвольвентное зацепление (Рис.3).

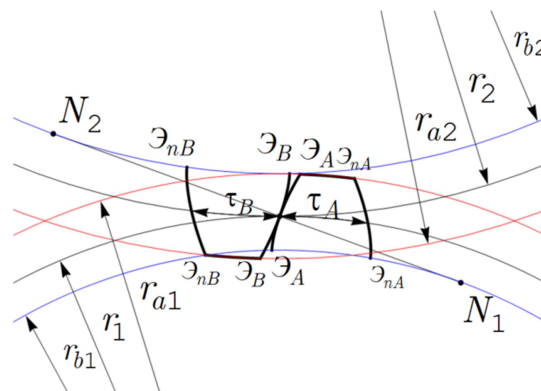


Рис. 3. Прямозубое эвольвентное зацепление  
Эвольвентный профиль  $\mathcal{E}_A \mathcal{E}_A$  колеса  $A$  описывается через

параметрические выражения

$$\begin{pmatrix} x_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \\ y_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 (\cos \varphi - \varphi \sin \alpha \sin (\alpha + \varphi)) \\ r_1 (\sin \varphi + \varphi \sin \alpha \cos (\alpha + \varphi)) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $r_1 = \frac{mz_A}{2}$  – делительный радиус колеса  $A$ ,  $m$  – модуль зубчатых колес,  $z_A$  – количество зубьев колеса  $A$ ,  $\alpha$  – угол давления,  $\varphi$  – параметр эвольвенты, принимающий значения  $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ .

Положение эвольвентного профиля колеса  $B$ , находящегося в зацеплении с колесом  $A$ , можно найти по следующим выражениям

$$\begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \\ y_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_2 (\cos \varphi - \varphi \sin \alpha \sin (\alpha + \varphi)) \\ r_2 (\sin \varphi + \varphi \sin \alpha \cos (\alpha + \varphi)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_w \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где  $a_w = r_1 + r_2$  – межосевое расстояние.

Зацепление колеса  $A$  с колесом  $B$  происходит в точке  $K$ , которая находится на линии зацепления  $N_1N_2$ . В этой точке параметр эвольвенты для профиля  $\mathcal{A}\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}\mathcal{B}$  равен  $\varphi_a = \varphi_b = 0$ .

При повороте колеса  $A$  на некоторый угол  $\gamma$  профили зубьев изменяют своё положение (Рис.4) и их точка касания смещается вдоль линии зацепления и занимает новое положение  $K'$ . После анализа пересечений профилей и линии зацепления, можно показать, что параметры  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$ , соответствующие координате точки  $K'$  в выражениях (19) и (20) для профилей  $\mathcal{A}\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}\mathcal{B}$ , будут равны  $\gamma$  и  $\frac{z_1}{z_2}\gamma$  соответственно.

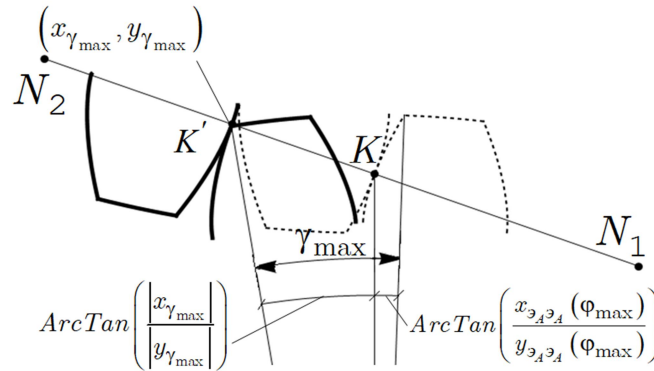


Рис. 4. Изменение положения профилей при повороте колес

Жесткость зуба определяется через контактные деформации  $\delta_{\text{кон}}$ , деформации изгиба зуба  $\delta_{\text{изг}}$  и деформации тела колеса  $\delta_{\text{тел}}$ . Жесткость пары зубьев, входящих в зацепление, определяется через податливости, соответствующие деформациям, возникающим в каждом колесе и контактирующих зубьях

$$k_m = \frac{1}{\delta_{кон} + \delta_{изгА} + \delta_{телА} + \delta_{изгБ} + \delta_{телБ}}. \quad (21)$$

В случае многопарного зацепления, общая жесткость складывается из жесткостей отдельных пар зубьев

$$k_m = \sum_{i=1}^n k_{m i}. \quad (22)$$

Контактная податливость в зубчатом зацеплении определяется по расчетной схеме контакта двух упругих цилиндров с параллельными осями по образующей и выражается как

$$\delta_{кон} = \frac{4}{\pi E_{np} L}, \quad (23)$$

где  $E_{np}$  – приведенный модуль упругости первого рода,  $L$  – длина контакта.

Изгибная податливость зубьев определяется через решение методом Ритца задачи об изгибе пластины переменного сечения с учетом сдвиговых деформаций. Упругая энергия деформации изгиба пластины с учетом сдвиговых добавок записывается как

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{y_{\max}} \int_0^b \left( k_{xz} G h \gamma_{xz}^2 + k_{xy} G h \gamma_{xy}^2 + D \left( \chi_x^2 + 2\mu \chi_x \chi_y + \chi_y^2 + 2(1-\mu) \chi_{xy}^2 \right) \right) dx dy, \quad (24)$$

где  $\chi_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}$ ,  $\chi_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}$ ,  $\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right)$  – соответствующие

кривизны и кручение, отвечающие за изгиб пластины;

$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \vartheta_x$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \vartheta_y$  – соответствующие осреднённые деформации

поперечного сдвига,  $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость,  $k_{xz}$  и

$k_{xy}$  – геометрические коэффициенты для сдвига (оба принимаются равными 6/5),  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $b$  – длина зуба.

Определение податливости тела колеса сводится к решению задачи о нагружении диска в окружном направлении силой, распределенной по ширине зуба (Рис.5).

Перемещения диска представляются в виде разложения в тригонометрические ряды по угловой координате

$$\begin{cases} u = \sum_{k=0}^n u_k^s(r) \sin k\varphi \\ v = \sum_{k=0}^n v_k^c(r) \cos k\varphi \end{cases}. \quad (25)$$

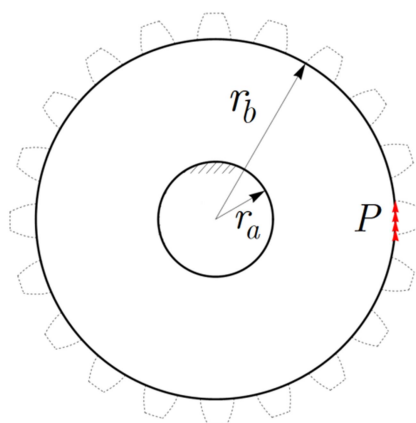


Рис.5. Расчетная схема для определения податливости тела зубчатого колеса

Разрешающие уравнения получены из принципа Лагранжа, а с помощью метода матричной экспоненты найдены аналитические решения для каждой  $k$ -ой гармоники разложения в ряд. Податливость тела колеса определяется как

$$\delta_{\text{тел}} = \frac{\sum_{k=0}^n v_k^c(r_b)}{P}. \quad (26)$$

Для проверки предложенного алгоритма рассчитывались функции жесткости прямозубых эвольвентных зубчатых передач внешнего и внутреннего зацеплений с помощью разработанной методики и МКЭ (Рис.6).

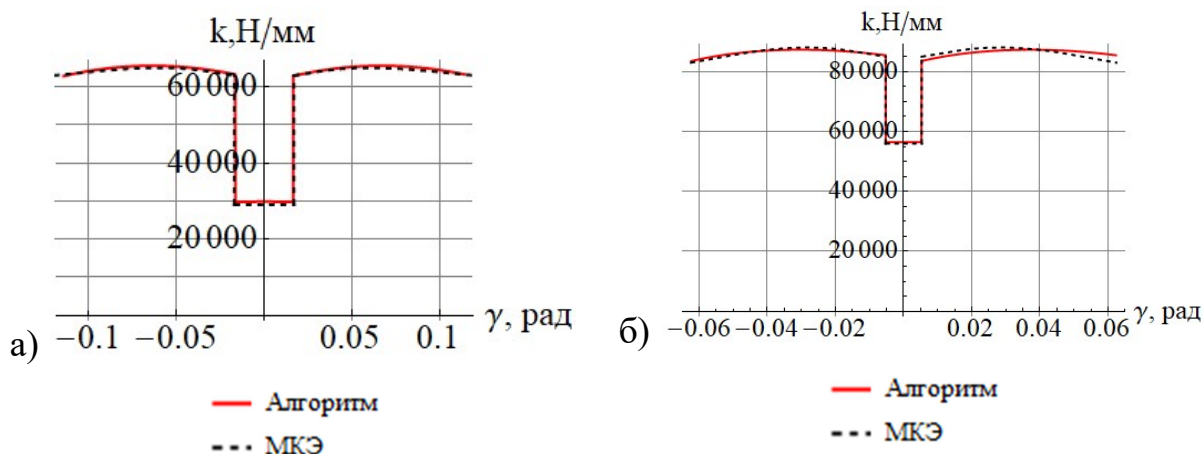


Рис. 6. Функции жесткости прямозубой эвольвентной передачи внешнего (а) и внутреннего (б) зацеплений

Сравнение двух решений в обеих конфигурациях показывает хорошее соответствие между ними, что говорит об адекватности разработанного алгоритма.

**В четвёртой главе** представлено практическое применение разработанных модели зубчатой передачи и методики определения жесткости для исследования динамики дифференциального редуктора ТВД самолета повышенной грузоподъемности.

Создание модели редуктора (Рис.7) выполнялось в комплексе Dynamics

R4 с решателем DynFE, которые разрабатываются научно-техническим центром по роторной динамике ООО «Альфа-Транзит». Модель зубчатой передачи реализована в Dynamics R4 в качестве элемента моделирования.

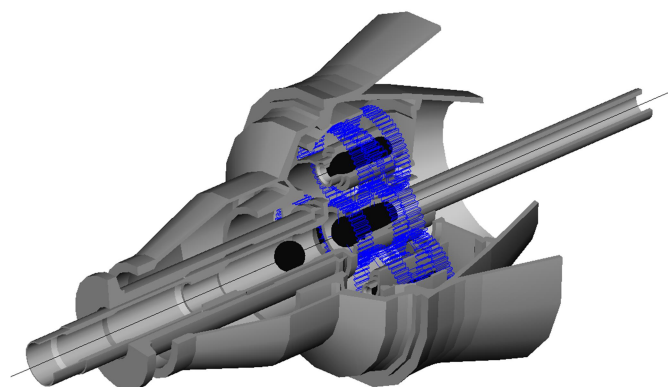


Рис. 7. Модель редуктора в Dynamics R4

Элементы корпуса, валов и сателлитов моделируются с помощью балочных элементов для больших движений. Подшипниковые узлы, а также часть переднего и заднего валов редуктора промоделированы с помощью элемента гибкой связи с предварительной оценкой жесткостных

характеристик с помощью МКЭ.

Модель редуктора исследовалась путём определения сил в зацеплениях при его раскрутке от 0 до 10000 об/мин на входном валу в двух вариантах – до модификации биротативной винтовой группы и после (Рис.8). При этом выделялось значение усилия на крейсерском режиме работы ТВД 8300 об/мин.

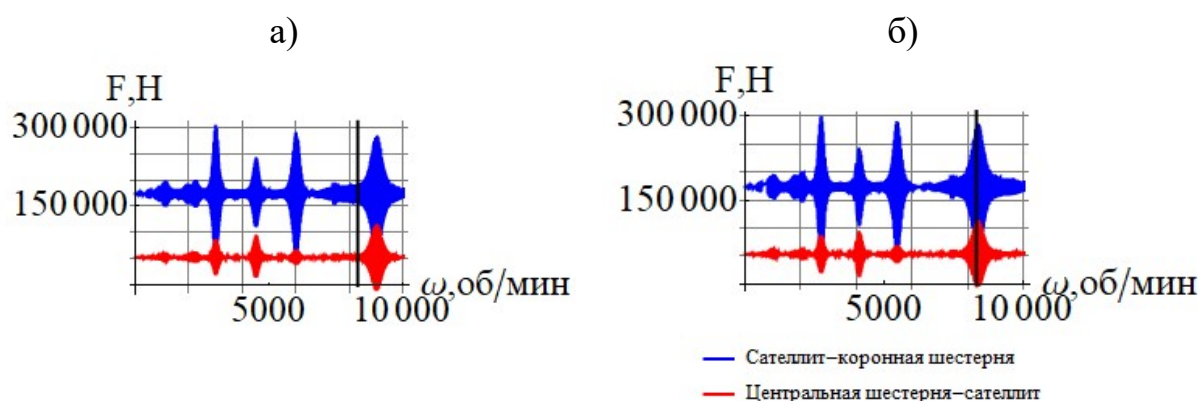


Рис. 8. Графики сил в зацеплении в зависимости от скорости вращения ротора в ТВД до (а) и после (б) модификации

В модифицированном варианте ТВД в районе номинальной скорости вращения ротора 8300 об/мин сила в зацеплении попадает в субгармонический резонанс и величина нагрузки возрастает в 2,1 раз по сравнению с вариантом до модификации, а коэффициент запаса по контактным напряжениям в передаче «Центральная шестерня - сателлит» становится равным 0,85. Процесс износа зубьев описывается через постепенное уменьшение их толщины с соответствующим увеличением бокового зазора.

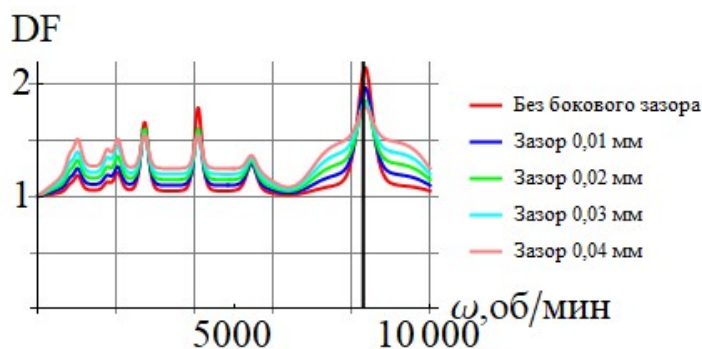


Рис. 9. Графики коэффициентов динамичности в зацеплении «центральная шестерня-сателлит» модифицированного ТВД при различных величинах бокового зазора

Результаты вычисления сил в зацеплении при различных величинах боковых зазоров (Рис.9) на крейсерской скорости показывают, что при величине бокового зазора в 0,03 мм прекращается износ на центральной шестерне, что соответствует величине 0,027 мм полученной с помощью методов вибродиагностики в

работах других авторов.

В спектральном составе функции изменения силы в зацеплении «центральная шестерня – сателлит» во времени при работе на постоянном режиме скорости 8300 об/мин и величине бокового зазора в 0,03 мм содержится гармоника 2657 Гц величиной 404 Н. Данная гармоника совпадает с собственной частотой лопаток ступеней компрессора и является причиной усталостного разрушения в модифицированном варианте ТВД.

Для зубьев зацепления «центральная шестерня-сателлит» предложена модификация профилей зубьев, которая позволяет избежать повышенного износа и появление нежелательной гармоники, приводящей к усталостному разрушению.

### Основные результаты и выводы

1. В диссертации разработана методика анализа нелинейной динамики редуктора турбовинтового двигателя, которая может быть распространена на любые аналогичные конструкции из разных областей техники.
2. Предложены уточненная математическая модель и алгоритм определения жесткости для эвольвентной прямозубой зубчатой передачи. Разработанные модель и алгоритм были успешно верифицированы по результатам других авторов и прямого КЭ - моделирования.
3. Для решения проблемы особых углов при применении вектора Эйлера разработан и внедрен в расчетные алгоритмы способ инкрементального разделения конечного поворота на тензор большого накопленного поворота и вектор малого дополнительного.
4. С использованием разработанных модели и алгоритма проведен анализ динамики дифференциального редуктора ТВД, выявлены причины повышенного износа центральной шестерни после модификации ТВД и предложено техническое решение по изменению конструкции для устранения вышеуказанных проблем.



### Список публикации по теме диссертации

1. Popov V. V., Sorokin F. D. Modelling of gears for nonlinear dynamics analysis // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 747. Is. 1. P. 12–29. (0,69 п.л./0,4 п.л.)
2. Numerical determination of contact forces in radial roller bearings with flexible rings / Popov V.V. et al. //Russian Aeronautics. 2018. Vol. 61. Is. 4. P. 567-578. (1,38 п.л./0,7 п.л.)
3. Попов В. В., Сорокин Ф. Д., Иванников В. В. Разработка пространственной модели зубчатой передачи с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для решения нелинейных задач динамики авиационных трансмиссий //Труды МАИ. Эл № ФС 77-69492. 2020. №. 112. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=116336> (дата обращения: 01.12.2022) (3,46 п.л./2,85 п.л.)
4. Попов В. В., Сорокин Ф. Д., Иванников В. В. Конечный элемент гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для задач нелинейной динамики конструкций летательных аппаратов //Труды МАИ. Эл № ФС 77-69492. 2018. №. 99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=91790> (дата обращения: 01.12.2022) (2,65 п.л./2,1 п.л.)
5. Попов В. В., Сорокин Ф. Д., Иванников В. В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов //Труды МАИ. Эл № ФС 77-69492. 2017. №. 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (дата обращения: 01.12.2022) (3,23 п.л./2,5 п.л.)
6. Учет контактных взаимодействий при моделировании жесткостных свойств роликовых подшипников / Попов В. В. [и др.] //Вестник Московского авиационного института. 2015. Т. 22. №. 2. С. 137–141. (0,92 п.л./0,3 п.л.)
7. Дегтярев С. А., Леонтьев М. К., Попов В. В. Совершенствование методики определения матрицы податливости «белочьего колеса» в опорах роторов авиационных газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15. №. 1. С. 163–170. (1,04 п.л. / 0,8 п.л.)
8. Дегтярев С. А., Леонтьев М. К., Попов В. В. К определению податливости «белочьего колеса» в опорах роторов авиационных газотурбинных двигателей //Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2014. №. 4 (46). С.52-60. (1,15 п.л./ 0,9 п.л.)
9. Попов В.В., Дегтярев С.А. Моделирование динамического поведения дифференциального редуктора турбовинтового двигателя // XXII Всероссийская научно-техническая конференция «Аэрокосмическая

техника, высокие технологии и инновации – 2021».: Материалы конференции. Пермь. 2021. Т.1. С. 126–129. (0,46 п.л./0,3 п.л.)

10. Сорокин Ф.Д., Попов В.В., Низаметдинов Ф.Р. Торможение ротора, вызванное прохождением через резонанс // XXVI Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред».: Материалы симпозиума. Москва. 2020. Т.1. С.208–210. (0,35 п.л./0,1 п.л.)

11. Попов В. В. Математическая модель прямозубой эвольвентной зубчатой передачи для решения задач динамики трансмиссий авиационных двигателей //Всероссийская научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов «Авиационные двигатели и силовые установки»: материалы конференции. 2019. С. 161–163. URL: [https://ciam.ru/konferencii-i-seminary/sbornik\\_tezisov\\_dokladov\\_2019\\_3.pdf](https://ciam.ru/konferencii-i-seminary/sbornik_tezisov_dokladov_2019_3.pdf) (дата обращения: 01.12.2022) (0,23 п.л.)

12. Попов В. В. К исследованию динамики авиационных трансмиссий //XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2019): материалы конференции. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2020. С. 163–166. (0,46 п.л.)

13. Попов В. В. Математическая модель динамики прямозубой эвольвентной зубчатой передачи //XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2018): материалы конференции. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2019. С. 354–356. (0,46 п.л.)

14. Попов В. В. Определение нормального контактного смещения прямозубой эвольвентной зубчатой передачи при моделировании движения зубчатых механизмов //XXVIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2016): материалы конференции. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2017. С. 85–88. (0,46 п.л.)

15. Попов В. В., Сорокин Ф. Д. Определение жесткостной функции эвольвентной прямозубой зубчатой передачи для моделирования движения зубчатых механизмов //XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2015): материалы конференции. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2015. С. 117–120. (0,46 п.л./0,3 п.л.)