

На правах рукописи

САВЕЛЬЕВА Инга Юрьевна

**РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ
СТРУКТУРНО-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

1.2.2. — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



Москва — 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Официальные оппоненты: **Карташов Эдуард Михайлович,**
Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Российский технологический университет МИРЭА (институт тонких химических технологий имени Н.В. Ломоносова)

Бураго Николай Георгиевич,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Колдоба Александр Васильевич,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт(национальный исследовательский университет)», заведующий кафедрой моделирования и технологий разработки нефтяных месторождений

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет

Защита состоится «__» _____ 2023 года в __ час. __ мин. на заседании диссертационного совета Д 24.2.331.05 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Аттетков
Александр
Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. В настоящее время развитие науки о конструкционных и функциональных материалах тесно связано с теоретическим исследованием современных композитов. Они являются структурно-чувствительными материалами, которые, как правило, нужно рассматривать как результат проектирования и оптимизации многомасштабных, многоуровневых структур. Управление внутренней структурой разрабатываемого материала — важнейшая задача современного материаловедения. Создание материалов с наперед заданными свойствами также по-прежнему актуальная задача.

Материал с размером зерна <100 нм относят к наноматериалам, тогда как ультрамелкозернистые материалы характеризуются размером зерен <500 нм. Термин «нанокompозит» подразумевает, что по крайней мере одна составляющая фаза имеет размер частиц менее 100 нм. Фактически, наноармирование можно сгруппировать в три широкие категории: 3D-нанонаполнители (такие как наночастицы), которые имеют близкую к шаровой форме с диаметром <100 нм; волокна или трубки диаметром менее 100 нм и отношением характерной длины к диаметру более 100 (углеродные нанотрубки, нитевидные кристаллы); пластинчатые нанонаполнители, которые могут представлять собой слоистые материалы толщиной порядка 1 нм.

Изменение характерного размера включения от микрометра до нанометра в структурно-чувствительных материалах изменяет отношение площади поверхности включения к объему на один или два порядка. Это означает, что доля атомов, расположенных на поверхностях разделов, увеличивается. При резком увеличении межфазной поверхности в свойствах такого материала все больше начинают преобладать свойства поверхности раздела или межфазной границы, что, в свою очередь, означает проявление свойств, не присущих классическим материалам.

Лабораторные исследования последних лет показали, что размерные эффекты, возникающие в мелкомасштабных структурах, могут оказывать существенное влияние на термомеханические характеристики. Подобные экспериментальные данные привели исследователей к необходимости создания адекватных теорий для анализа размерных эффектов, способных прогнозировать поведение материалов под воздействием физических полей различной природы.

Математическое моделирование в механике деформируемого твердого тела — наиболее практичный подход к описанию поведения материалов при различ-

ных внешних воздействиях. В классическом подходе механики сплошной среды материал состоит из множества идеализированно-бесконечно малых материальных частиц, каждая из которых является точкой массы и взаимодействует с соседними частицами. Поле напряжений в этом случае определяют на основе локальных аксиом Нолла для простых материалов и полагают, что напряжение в окрестности точки зависит от движения ближайших точек континуума (или поля деформации, возникающего за счет этого движения). Учет только ближайшего взаимодействия точек среды и определяет локальные свойства материала сплошной среды. Тем не менее, в различных теоретических и экспериментальных исследованиях описано существование дальних взаимодействий между несоседними структурными элементами. Кроме того, как природные, так и искусственные материалы имеют сложную внутреннюю структуру, в которой проявляются эффекты микро- и наномасштаба. Классическая механика деформируемого твердого тела не может описать физические явления, в которых дальнедействующие взаимодействия играют существенную роль. Другими словами, свойства и поведение материалов, описываемые классической механикой сплошной среды, инвариантны относительно масштабов времени и длины, и влияние внутренней структуры (характерных размеров внутренней структуры) не могут быть учтены.

Обобщенная механика деформируемого твердого тела позволяет избежать вышеупомянутых ограничений классического подхода. Различные обобщенные модели — такие как микроморфные, микрополярные, нелокальные и др. — дают возможность учесть так называемые нелокальные эффекты (дальнедействующие взаимодействия в твердом теле, микро-/наномасштабные явления, дисперсионные свойства материала). В моментных обобщенных моделях «источниками» нелокальности выступают тензор микросмещений, градиент микродеформаций и дисторсии и т.п. Основная сложность использования всех этих теорий заключается в том, что определяющие соотношения содержат большое количество материальных коэффициентов и параметров, определение которых весьма затруднительно и требует развития подходов и моделей для установления этих коэффициентов и параметров.

Другой класс моделей обобщенной механики для моделирования дальнедействующих эффектов в среде, т.е. пространственной нелокальности, предполагает использование интегральных выражений типа свертки. В этом случае модели обычно называют нелокальными моделями.

Необходимость применения нелокальной термодинамики необратимых про-

цессов в физических науках и технике восходит к середине прошлого века в попытке уловить экспериментальные эффекты, не предсказанные гипотезой Био–Фурье. Действительно, экспериментальные наблюдения за температурным полем на границах раздела металлов, а также за изменением параметров проводимости в окрестности термостатированных областей показывает локализацию температурных градиентов вблизи границы.

Для объяснения подобных экспериментальных данных были предложены различные модификации гипотезы Био–Фурье. Так, исследование решений гиперболического уравнения теплопроводности, полученного на основе модификации гипотезы Био–Фурье и позволившего учесть конечную скорость распространения теплоты, описаны в работах советских и российских (А.В. Лыков, Э.М. Карташов, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, В.А. Кудинов, И.В. Кудинов, В.Ф. Формалев и др.) и зарубежных исследователей (П. Вернотта, К. Каттанео, D.Y. Tzou).

Модификация гипотезы Био–Фурье с использованием двух временных параметров (время релаксации теплового потока и температуры) предложена в работах D.Y. Tzou. Эта модель представляет собой частный случай более общей интегральной модели, рассмотренной Г.Н. Кувыркиным и полученной исходя из модели с использованием внутренних параметров состояния. Отметим, что описанные выше модели позволяют учитывать только временные эффекты (конечную скорость распространения теплоты, запаздывание при аккумуляции теплоты), и не учитывают пространственные нелокальные эффекты.

Интегральные соотношения неравновесной термодинамики, учитывающие нелокальность по пространству, представлены в работах А.С. Eringen. Нелокальность в этих соотношениях учтена посредством модификации теплофизических характеристик. Градиентные модели упругости и термоупругости (имеющие более высокий порядок по сравнению с уравнениями классических теорий), а также их использование при моделировании композитных структур исследованы в работах В.В. Васильева, С.А. Лурье, П.А. Белова, С. Polizzotto, А.А. Pisano и др. В работах С.Л. Соболева проанализированы основные свойства локально-неравновесных моделей в форме уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов, порядок которых возрастает с увеличением степени отклонения системы от локального равновесия. В работах G. Chen исследовано баллистико-диффузионное уравнение теплопроводности, полученное на основе уравнения Больцмана для времен релаксации. Другая модель нелокальной теплопроводности, удерживающая при разложении в ряд большее количество сла-

гаемых, предложена D.Y. Tzou. Отметим, что такие модели являются частными случаями более общей интегральной постановки.

Таким образом, из вышесказанного следует, что на сегодняшний день нет теоретически обоснованных и практически апробированных математических моделей термомеханики, которые бы с единых позиций позволяли учитывать процессы, протекающие на микро- и наноровнях, а также временные и пространственные эффекты, которые возникают вследствие особенностей внутренней структуры.

Объектом исследования в диссертации являются математические модели нелокальной термомеханики в структурно-чувствительных средах.

Предметом исследования являются математические модели, содержащие интегро-дифференциальные уравнения, которые описывают процесс теплопроводности и напряженно-деформированное состояние в структурно-чувствительном твердом теле и позволяют оценивать эффективные термомеханические характеристики.

Цель исследования. Целью исследования является разработка и исследование иерархии математических моделей термомеханических процессов в структурно-чувствительных материалах, позволяющих учесть временные и пространственные нелокальные эффекты, сложную внутреннюю структуру материала, форму и концентрацию упрочняющего элемента.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач.**

1. Разработка определяющих соотношений математических моделей термомеханических процессов в нелокальной среде с внутренними параметрами состояния в интегро-дифференциальной и вариационной формах.
2. Разработка и программная реализация численных алгоритмов решения задач нелокальной термомеханики в одномерных и двумерных постановках.
3. Разработка соотношений для оценки эффективных свойств дисперсных структур в зависимости от различных форм включений.
4. Разработка определяющих соотношений для оценки критических ситуаций в элементах конструкций с использованием двойственных вариационных форм математических моделей теплопроводности.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использованы методы аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений и численного решения интегро-дифференциальных уравнений, метод конечных эле-

ментов для задач термомеханики, вариационные методы, методы вычислительной математики.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантирует строгость использования математического аппарата, сравнением расчетов с известными теоретическими результатами и аналитическими решениями, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Разработаны определяющие соотношения новых математических моделей, описывающих термомеханические процессы с учетом пространственной и временной нелокальностей в структурно-чувствительных материалах, в том числе соотношения двойственных вариационных форм математических моделей процессов стационарной теплопроводности и термоупругости в области произвольной формы с учетом пространственных нелокальных эффектов.

2. Исследованы аналитические решения одномерных задач стационарной теплопроводности для неограниченной в своей плоскости пластины и деформировании цилиндрического стержня с учетом пространственной нелокальности.

3. Получены оценки, в том числе двусторонние, эффективных коэффициентов теплопроводности, упругих модулей и температурного коэффициента линейного расширения композитов, позволившие учесть тип и объемную концентрацию армирующих включений, особенности теплового контакта и теплопереноса между включениями и матрицей, наличие промежуточного слоя, взаимное расположение, возможную анизотропию включений.

4. Разработанные интегральная и вариационная формы математических моделей установившейся теплопроводности позволили оценить целесообразность использования конкретных материалов в элементах конструкций, надежное функционирование которых связано с температурным состоянием материала.

5. Для исследования полей температуры, деформации и напряжений в структурно-чувствительном материале разработаны одномерные и двумерные численные алгоритмы нелокального метода конечных элементов.

6. Разработаны программные комплексы UnlockTermElast 1D и NonLocFEM, в которых численные алгоритмы нелокального метода конечных элементов использованы для моделирования термомеханического поведения материала под различным внешним воздействием.

Теоретическая и практическая ценность диссертации состоит в воз-

возможности учета на уровне математической модели сложной внутренней структуры материала и анализа ее влияния на температурное и напряженно-деформированное состояние твердого тела, а также на эффективные термомеханические характеристики. Разработанный собственный программный комплекс позволяет решать широкий класс задач нелокальной термоупругости в твердых телах произвольной формы. Программный комплекс с открытым исходным кодом дает возможность как модифицировать существующие, так и добавлять в дальнейшем новые программные модули.

Положения, выносимые на защиту

1. Иерархия математических моделей, позволяющих описать термомеханические процессы с учетом пространственной и временной нелокальностей в структурно-чувствительных материалах, в том числе двойственный вариационный формы математических моделей процессов стационарной теплопроводности и термоупругости в области произвольной формы с учетом пространственных нелокальных эффектов.

2. Иерархия математических моделей для оценки эффективных коэффициентов теплопроводности композитов, упругих модулей и температурного коэффициента линейного расширения, позволяющих учесть тип и объемную концентрацию армирующих включений, особенности теплового контакта и теплопереноса между включениями и матрицей, наличие промежуточного слоя, взаимное расположение, возможную анизотропию включений.

3. Численные алгоритмы нелокального метода конечных элементов для построения решений одномерных и двумерных задач термомеханики.

4. Программные комплексы UnlockTermElast 1D, NonLocFEM, в которых реализованы разработанные одномерные и двумерные численные алгоритмы нелокального метода конечных элементов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы доложены и обсуждены на следующих научных конференциях, школах, семинарах:

Школа-семинар «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках» под руководством Академика РАН А.И. Леонтьева (Санкт-Петербург, 2007, 2017), Школа-семинар «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях» под руководством Академика РАН А.И. Леонтьева (Жуковский, 2009), Международная школа-конференция молодых ученых «Механика 2009» (Ереван, 2009), Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2009),

Международная школа «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2010), Российская национальная конференция по теплообмену (Москва, 2010, 2014, 2018, 2022), Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (Саратов, 2010), Минский международный форум по тепломассообмену (Минск, 2016), Международная конференция «Topical Problems of Continuum Mechanics» (Армения, 2012, 2015, 2016, 2017, 2019, 2021), Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2016, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022), Международная научная конференция «Фундаментальные и Прикладные Задачи Механики» (Москва, 2017), Международная конференция «International Conference on Computational Heat, Mass and Momentum Transfer» (Краков, Польша, 2018; Рим, Италия, 2019), Международная конференция «International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics» (Родос, Греция, 2018, 2019, 2021).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, выполненных в рамках грантов Президента РФ МК-6618.2013.8 «Разработка математических моделей термомеханических процессов и методов оценки термомеханических свойств структурно-чувствительных материалов», МК-6573.2015.8 «Разработка математических моделей и численных методов исследования термомеханических процессов в элементах конструкций из структурно-чувствительных материалов», МК-1069.2018.8 «Разработка математических моделей новых структурно-чувствительных материалов с учетом особенностей их производства», грантов РФФИ 18-38-00618 мол_а «Разработка математических моделей и численных методов исследования термомеханических процессов в структурно-чувствительных материалах», РФФИ 18-38-20108 мол_а_вед «Разработка математических моделей функционирования структурно-чувствительных материалов на основе численных решений и асимптотических представлений определяющих уравнений», государственных заданий вузам Минобрнауки РФ проекты 9.2422.2017/ПЧ «Разработка математических моделей, изготовление и исследование экспериментальных образцов новых структурно-чувствительных материалов при воздействии физических полей различной природы», 0705-2020-0032 «Разработка фундаментальных подходов на основе явления самоорганизации для создания структурно-чувствительных систем, необходимых для создания функциональных материалов, перспективных для применения в оптических и радиотехнических изделиях нового поколения», 0705-2020-0047 «Теория дифференциальных уравнений, кра-

евые задачи, связанные задачи анализа и теории приближений и некоторые их приложения», FSFN-2023-0012 «Разработка математических моделей и методов проектирования изделий ракетно-космической техники из перспективных конструкционных и функциональных материалов».

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 69 научных статьях. Все статьи опубликованы в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science, либо включенных в перечень ВАК РФ.

Личный вклад соискателя. Все исследования, представленные в диссертационной работе, выполнены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 375 страницах, содержит 118 иллюстраций и 3 таблицы. Библиография включает 373 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор литературы по нелокальным термомеханическим моделям для твердого тела, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые диссертантом на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе на основе соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов получены определяющие уравнения нелокальной среды с внутренними параметрами состояния.

В разделе 1.1 описан переход от решетчатой модели дискретной системы с ближним и дальним взаимодействиями к нелокальной механике деформируемого твердого тела.

В разделе 1.2 получены определяющие уравнения нелокальной среды с внутренними параметрами состояния на основе описания состояния рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки пространства четырьмя термодинамическими функциями: массовыми плотностями свободной энергии A и энтропии h , тензором напряжений с компонентами σ_{ji} и вектором плотности теплового потока с составляющими q_i , $i, j = 1, 2, 3$.

Аргументами этих функций приняты следующие реактивные переменные:

- тензор деформации с компонентами

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^{(l)} + \varepsilon_{kl}^{(nl)}, \quad k, l = 1, 2, 3,$$

где

$$\varepsilon_{kl}^{(l)} = p_1 \varepsilon_{kl}^{\circ}, \quad \varepsilon_{kl}^{(nl)} = p_2 \int_V \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{kl}^{\circ}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'),$$

$\varepsilon_{kl}^{\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$ — компоненты симметричного тензора малой деформации, u_k — составляющие вектора перемещения; p_1, p_2 — вес локальной и нелокальной составляющих, $p_1 + p_2 = 1$, $p_2 \in [0, 1)$; $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — функция нелокального влияния;

- абсолютная температура T ;
- внутренние параметры термодинамического состояния: скалярный χ , векторный с составляющими χ_k и тензорный с компонентами χ_{kl} . При этом χ — термодинамическая температура, ассоциированная с локально неравновесными процессами аккумуляции теплоты; χ_k — составляющие вектора, характеризующего распространение теплоты и ассоциированного с решеточным (фононным) или другим преобладающим физическим процессом теплопроводности, $|\chi_k| \ll 1$; χ_{kl} — компоненты тензора, определяющего эффекты вязкости на микроуровне, $\|\chi_{kl}\| \ll 1$.

Такой подход предполагает учет пространственной нелокальности посредством модификации соотношения, определяющего деформацию в бесконечно малой окрестности точки пространства, а не посредством свойств отдельных микро- и наноструктурных элементов. С точки зрения эксперимента на «макроуровне» первый подход представляется более эффективным и приемлемым для подтверждения.

Для внутренних параметров состояния кинетические уравнения выбраны в линейном приближении

$$t_T^* \dot{\chi} + A_{\chi} \chi = \bar{\chi}, \quad t_q^* \dot{\chi}_k + \chi_k = \bar{\chi}_k, \quad t_{\sigma}^* \dot{\chi}_{kl} + \chi_{kl} = \bar{\chi}_{kl}, \quad (1)$$

где t_T^* , t_q^* , t_{σ}^* — времена релаксации соответствующих параметров состояния; $\bar{\chi}$, $\bar{\chi}_k$, $\bar{\chi}_{kl}$ — функции, определяющие равновесные значения параметров состояния. Термодинамическую температуру χ определяет спектр частот и амплитуд колебаний атомов на свободной поверхности микро- и наноструктурных элемен-

тов, а коэффициент A_χ зависит от отношения площади свободной поверхности и полной площади поверхности элемента, $0 < A_\chi \leq 1$. Векторный внутренний параметр состояния с составляющими χ_k позволяет учесть процессы теплопереноса, протекающие на микроуровне, а тензорный с компонентами χ_{kl} — вязкие свойства среды, проявляющиеся на микроуровне.

В силу необходимых и достаточных условий реализуемости термомеханического процесса и соотношений (1) получено соотношение, определившее **модель стандартной линейной нелокальной термоупругой среды** с учетом температурной деформации и релаксационных эффектов, проявляющихся на микроуровне:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & C_{ijkl} \left(p_1 \varepsilon_{kl}^\circ + p_2 \int_V \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{kl}^\circ(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - \\ & - E_{ijmn} \left(p_1 \varepsilon_{mn}^\circ + p_2 \int_V \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{mn}^\circ(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \right) + \\ & + E_{ijmn} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_\sigma^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(p_1 \varepsilon_{mn}^\circ + p_2 \int_V \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{mn}^\circ(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \right) dt', \quad (2) \end{aligned}$$

где C_{ijkl} — компоненты тензора коэффициентов упругости, E_{ijmn} — компоненты тензора коэффициентов вязкости. Без учета внутренних параметров состояния соотношение (2) принимает вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(p_1 \varepsilon_{kl}^\circ + p_2 \int_V \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{kl}^\circ(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) \quad (3)$$

и определяет связь компонент тензора напряжений и компонент тензора малой деформации в случае **линейной нелокальной термоупругой среды**. Положив в (3) $\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ равной δ -функции Дирака с соответствующим аргументом, соотношение (3) переходит в закон Дюамеля — Неймана.

В разделе 1.3 получены различные выражения для составляющих q_i вектора плотности теплового потока. В случае учета пространственной нелокальности и конечной скорости распространения теплоты

$$q_i = -p_1 \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} - p_2 \lambda_{ij}^{(T)} \int_V \varphi_q(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial T(\mathbf{x}')}{\partial x_j'} dV(\mathbf{x}') -$$

$$\begin{aligned}
& + p_1 \lambda_{ij}^{(T)} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial T(\mathbf{x}, t')}{\partial x_j} \right) dt' + \\
& + p_2 \lambda_{ij}^{(T)} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\int_V \varphi_q(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial T(\mathbf{x}', t')}{\partial x'_j} dV(\mathbf{x}') \right) dt'.
\end{aligned}$$

Закон сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности с учетом соотношения для q_i примет следующий вид:

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c'_\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial t} = -T C_{jikl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \delta_D + q_V,$$

где c_ε ; c'_ε — удельные массовые теплоемкости при постоянной деформации, характеризующие аккумуляцию теплоты при изменении абсолютной и термодинамической температур.

В разделе 1.4 описаны свойства функции нелокального влияния $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, которая есть функция расстояния между точками \mathbf{x} и \mathbf{x}' . Приведены широко используемые зависимости для $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ в двумерном случае.

В разделе 1.5 выполнена оценка влияния эффекта пространственной нелокальности на примерах одномерных задач.

Рассмотрена задача об определении установившегося температурного поля для неограниченной в своей плоскости пластины в случае постоянного значения коэффициента теплопроводности и радиуса нелокальности, равного толщине $h = \text{const}$ пластины. На поверхностях пластины заданы значения температуры. Функция влияния выбрана в виде $\varphi(x', x) = (1 - |x' - x|/h) / h$. В безразмерных параметрах и переменных такая задача примет вид:

$$(1 - p_2) \frac{d^2 \Theta(\zeta)}{d\zeta^2} + p_2 \frac{d}{d\zeta} \left(\int_0^1 \varphi(\zeta', \zeta) \frac{d\Theta(\zeta')}{d\zeta'} d\zeta' \right) = 0, \quad (4)$$

$$\Theta(0) = 1, \quad \Theta(1) = -1, \quad (5)$$

$$\varphi(\zeta', \zeta) = (1 - |\zeta' - \zeta|) = (1 - (\zeta' - \zeta) \text{sign}(\zeta' - \zeta)).$$

Интеграл в уравнении (4) вычислен аналитически, и уравнение преобразовано к однородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка,

для которого с учетом граничных условий (5) получено аналитическое решение:

$$\Theta(\zeta) = \operatorname{sh} \beta \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) / \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}, \quad \beta = \sqrt{2p_2/(1-p_2)},$$

где $p_2 \in [0, 1)$ — параметр пространственной нелокальности процесса теплопереноса.

На примере этой же задачи выполнено сравнение термических сопротивлений пластины при наличии и отсутствии эффекта пространственной нелокальности с использованием отношения

$$Y^{(-1)} = R^*/R_* = \frac{qh/\lambda^{(T)}}{T_0 - T_h} = -\frac{\beta(1-p_2)}{4} \left(2 \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} + \beta \right).$$

Показано, что при возрастании параметра p_2 при фиксированной разности температур на поверхностях пластины плотность теплового потока убывает практически линейно, т.е. возрастает термическое сопротивление пластины.

Аналитические решения также получены для задачи об идеальном контакте двух неограниченных в своей плоскости пластин. Показано, что учет эффекта пространственной нелокальности приводит к росту значений температуры в зоне контакта.

На примере одномерной задачи о деформировании цилиндрического линейно упругого стержня и вертикальной колонны выполнена оценка влияния эффекта пространственной нелокальности на поле перемещения, деформации и напряжений. Установлена существенная неравномерность его деформированного состояния при однородном напряженном состоянии.

Во второй главе для разработанных в главе 1 математических моделей термоупругой и термовязкоупругой среды разработаны численные алгоритмы для построения решений одномерных и двумерных задач на основе метода конечных элементов. Эти численные алгоритмы реализованы в виде собственного программного обеспечения.

В разделе 2.1 описаны построения численных алгоритмов нелокального метода конечных элементов для двумерной задачи теплопроводности и двумерной задачи упругости в твердом теле с учетом пространственной и временной нелокальностей.

Основная проблема, которая возникает при решении данных задач, — это учет взаимодействия довольно отдаленных друг от друга узлов сетки. В работе описан алгоритм аппроксимации зоны нелокального влияния, который позволил учесть связь узлов, попавших в область нелокального взаимодействия.

На Рис. 1 *а* изображен условный портрет аппроксимированной зоны нелокального влияния для элемента, помеченного крестом. Реальная зона влияния изображена окружностью, аппроксимированная зона выделена серым цветом, центры элементов помечены точками. Условное изображение итогов ансамблирования матрицы показано на Рис. 1 *б*.

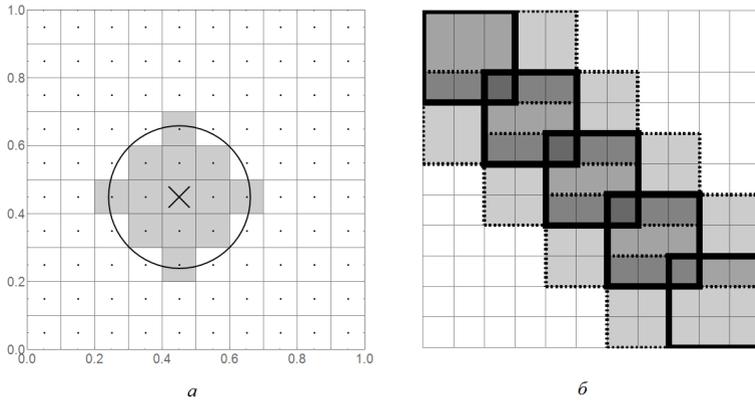


Рис. 1. Аппроксимация зоны влияния (*а*) и условный портрет матрицы после ансамблирования (*б*)

Сплошными линиями обведены матрицы элементов, соответствующие классическому уравнению теплопроводности, пунктирными — элементы матрицы, которые появляются при учете нелокальных эффектов. Итоговая матрица симметрична и сильно разреженная, но заметно более плотная, чем в классическом варианте, причем увеличение плотности матрицы напрямую зависит от радиуса нелокального воздействия.

В разделе 2.2 рассмотрены численные решения одномерных задач нелокальной термомеханики.

На примере задачи о распределении температуры в неограниченной в своей плоскости пластине проанализировано влияние параметров нелокальности (веса и радиуса) на значения возникающего в пластине теплового потока, а также на термическое сопротивление. Показана согласованность численных решений с полученными в главе 1 аналитическими решениями.

Также рассмотрена задача о динамических температурных напряжениях, возникающих в упругом теле, на границе которого задан высокоинтенсивный нагрев. Решение задачи проведено с учетом временной и пространственной нелокальности. Показано, что с увеличением значений параметра, обратно пропорци-

онального скорости распространения теплоты, на кривых распределения температуры появляется четко выраженный максимум. Увеличение вклада нелокальных пространственных эффектов приводит к большей задержке в распространении теплоты по глубине пластины. При этом максимальное значение температуры повышается.

В рамках одномерной постановки рассмотрена динамическая задача термовязкоупругости. Уравнения движения и теплопроводности с соответствующими краевыми условиями в безразмерном виде выглядят следующим образом:

$$R^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \bar{t}^2} + R^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{t}^2} = (1 - \xi) \left(p_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + p_2 \int_{z-\bar{r}}^{z+\bar{r}} \varphi(z, z') \frac{\partial^2 \sigma}{\partial (z')^2} dz' \right) +$$

$$+ \xi \int_0^{\bar{t}} \exp \left(-\frac{\bar{t} - \bar{t}'}{D_\sigma^2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} \left(p_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + p_2 \int_{z-\bar{r}}^{z+\bar{r}} \varphi(z, z') \frac{\partial^2 \sigma}{\partial (z')^2} dz' \right) d\bar{t}',$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \int_0^{\bar{t}} \exp \left(-\frac{\bar{t} - \bar{t}'}{D_T^2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} d\bar{t}',$$

$$\bar{t} = 0: \quad \theta(z, 0) = 0, \quad \dot{\theta}(z, 0) = 0, \quad \sigma(z, 0) = 0, \quad \dot{\sigma}(z, 0) = 0;$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \theta}{\partial z} + \int_0^{\bar{t}} \exp \left(-\frac{\bar{t} - \bar{t}'}{D_T^2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} \frac{\partial \theta}{\partial z} d\bar{t}' = q_0(\bar{t}), \quad \sigma(0, \bar{t}) = 0;$$

$$z = \bar{h}: \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} - \int_0^{\bar{t}} \exp \left(-\frac{\bar{t} - \bar{t}'}{D_T^2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} \frac{\partial \theta}{\partial z} d\bar{t}' = 0, \quad \sigma(\bar{h}, \bar{t}) = 0.$$

Здесь $z = \frac{x_1}{\sqrt{at_0}}$, $\bar{t} = \frac{t}{t_0}$, $\theta = \frac{T - T_0}{T^*}$, $T^* = A \frac{t_0^m \sqrt{at_0}}{\lambda^{(T)}}$, $a = \frac{\lambda^{(T)}}{\rho c}$, $q_0(\bar{t}) = M \bar{t}^m e^{(-m\bar{t})}$, $M = \frac{m^m}{(m-1)!}$, $\sigma = \frac{\sigma_{11}}{(3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} T^*}$, $R^2 = \frac{a\rho}{(\lambda + 2\mu)t_0}$, $\xi = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение вязких и упругих механических свойств, $\xi = 0$ соответствует линейно упругой среде; $D_q^2 = \frac{t_r}{t_0}$ — безразмерный параметр, характеризующий время релаксации теплового потока, $D_\sigma^2 = \frac{t_\sigma^*}{t_0}$ — безразмерный параметр, пропорциональный времени релаксации тензорного внутреннего параметра состояния.

Распределение напряжения по глубине неограниченной в своей плоскости

пластины представлено на Рис. 2 для двух моментов времени $\bar{t} = 2$ и $\bar{t} = 4$ при различных значениях параметра нелокальности p_1 и двух значений параметра D_σ^2 . Отмечено, что во всех случаях увеличение вклада пространственных

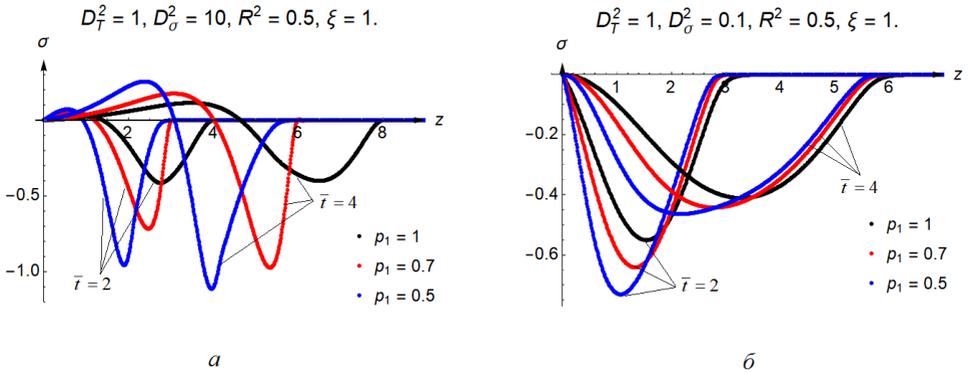


Рис. 2. Распределение напряжений по глубине пластины

нелокальных эффектов приводит к некоторому запаздыванию в распределении нормальных напряжений по глубине пластины с одновременным увеличением максимального абсолютного значения нормального напряжения.

Раздел 2.3 посвящен анализу численных решений двумерных задач нелокальной термомеханики.

Представлена серия расчетов для двумерной задачи теплопроводности для прямоугольной области, на основании которой проанализировано влияние параметров пространственной нелокальности и различных функций влияния на температурное поле.

Рассмотрена задача о растяжении Т-образной области $S \subset [0, 1] \times [0, 1]$ (Рис. 3 а). Анализ распределения деформации $\bar{\epsilon}_{22}$ в локальной (Рис. 3 б) и нелокальной (Рис. 3 в) постановках показывает, что линии уровня заметно меняют свой характер вблизи границ области, в особенности в окрестностях ступенчатого перехода, где можно наблюдать области отрицательных деформаций, смежных с концентраторами. Эти области тем шире, чем больше вклад нелокального влияния. Также отметим, что максимальный уровень деформации в концентраторах в нелокальном случае растет и имеет место неравномерное распределение деформации в точках приложения нагрузки.

Аналогичные распределения деформации в окрестностях концентраторов были получены в результате серии экспериментов с точным измерением дефор-

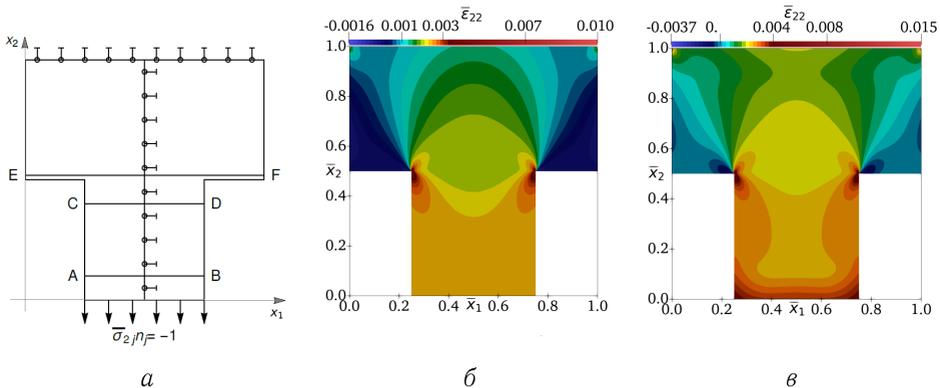


Рис. 3. Т-образная область (а) и распределение деформации $\bar{\epsilon}_{22}$ при $p_1 = \frac{1}{2}$; б — $\bar{r} = 0$; в — $\bar{r} = 0.1$

маций при растяжении ступенчатых пластинок, выполненных из оптически активных материалов.

Также были проанализированы распределения напряжений в окрестности ступенчатого перехода. Показано, что с учетом в модели пространственной нелокальности максимальные значения напряжений в концентраторах уменьшаются. На Рис. 4 изображены распределения деформаций и напряжений в сечениях, которые были указаны ранее на Рис. 3 а, при различных значениях параметра p_1 .

Подход, предложенный в главе 1, подразумевает учет нелокальности на уровне математических моделей, т.е. модификации определяющих соотношений для тензора малой деформации и вектора плотности теплового потока. При этом важным моментом при моделировании поведения структурно-чувствительных материалов, к которым относят и композиты, остается определение термомеханических характеристик таких материалов.

В третьей главе представлены разработанные математические модели для оценки эффективных тепловых характеристик дисперсных структур на основе вариационных постановок соответствующих задач без учета эффектов пространственной нелокальности.

В разделе 3.1 представлена двойственная вариационная формулировка задачи стационарной теплопроводности в анизотропном твердом теле произвольной формы. Отмечено, что в силу электротепловой аналогии математические модели, описывающие процессы теплопереноса в композитах, могут быть использованы для оценки эффективных значений электропроводности, диэлектрической и маг-

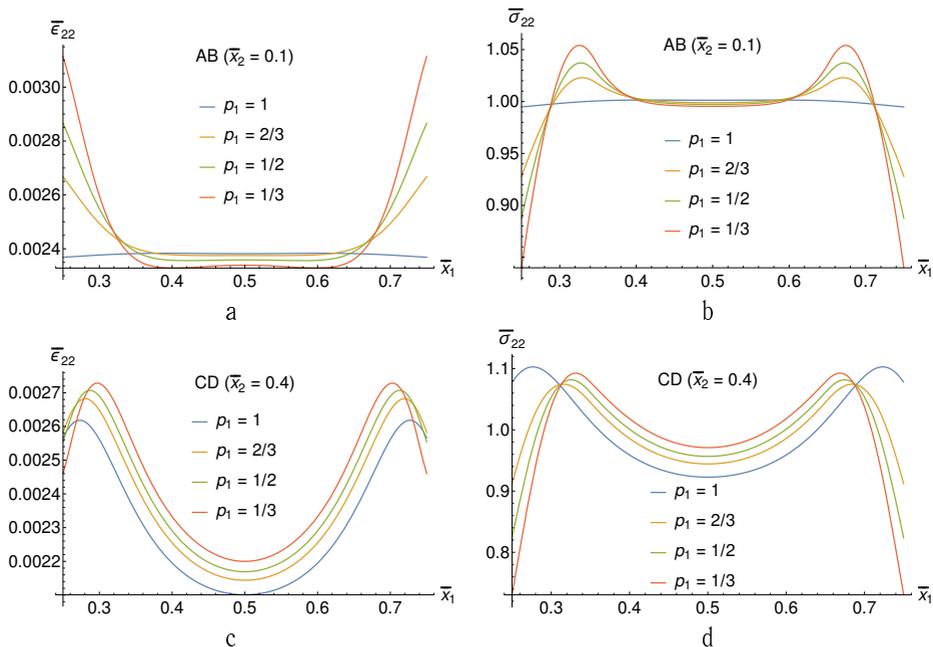


Рис. 4. Распределения деформации $\bar{\epsilon}_{22}$ и напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ в интересующих сечениях при вариации параметра ρ_1 и радиусе нелокального влияния $\bar{r} = 0.1$

нитной проницаемостей неоднородных тел.

В разделе 3.2 использование построенной двойственной вариационной формы математической модели процесса теплопереноса в неоднородном анизотропном твердом теле позволило установить двусторонние оценки термического сопротивления теплопередачи через такое тело и рассмотреть ряд частных случаев получения этих оценок. Указан путь вычисления наибольшей возможной относительной погрешности в случае выбора приближенного значения термического сопротивления теплопередачи равным полусумме двусторонних оценок.

В разделе 3.3 получены оценки эффективных коэффициентов теплопроводности композитов с различным типом армирующих включений (шаровых, волокнистых и пластинчатых) на основе вариационных постановок соответствующих математических моделей без учета эффектов пространственной нелокальности.

В разделе 3.3.1 для композита с шаровыми включениями в качестве представительного элемента выбран прямоугольный цилиндр с достаточно большой площадью S_0 параллельных оснований (Рис. 5 а) половины составной частицы

радиусом R . Боковую поверхность цилиндра примем идеально теплоизолированной, температуру основания при $\theta = 0$ положим равной нулю, а на втором основании зададим температуру GH , где G — модуль градиента температуры.

Однородный материал в части области вне составной частицы имеет коэффициент теплопроводности λ . Таким образом, в неоднородной цилиндрической области объемом $V_0 = HS_0$, ограниченной поверхностью S , распределение температуры $T(M)$ и коэффициент теплопроводности $\Lambda(M)$ являются функциями координат точки $M \in V$, причем функция $\Lambda(M)$ кусочно постоянная и принимает значения λ_0 при $R_0 \leq r \leq R_1$, λ_m при $R_1 \leq r \leq R$ и λ при $r \geq R$. Отношение R_1^3/R^3 определяет значение C_0 объемной концентрации включений в композите.

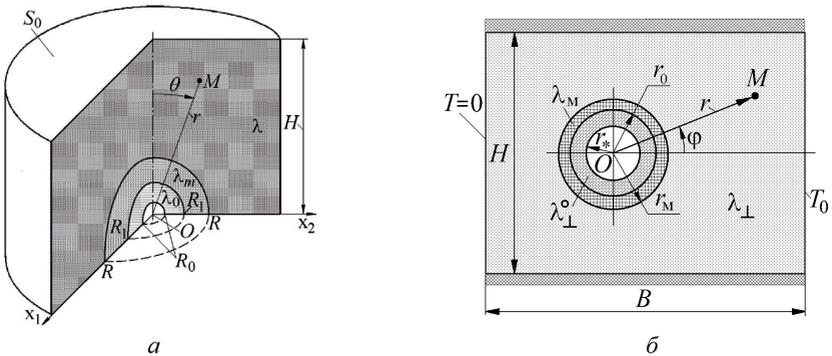


Рис. 5. Представительный элемент композита: *а* — шаровое включение; *б* — волоконное включение

Выбрав простые допустимые распределения температуры и вектора плотности теплового потока, получена двусторонняя оценка эффективного коэффициента теплопроводности, которую можно рассматривать как оценку первого приближения, не учитывающую тепловое взаимодействие включений и матрицы композита:

$$\lambda_1 = \lambda_0 C_0 + \lambda_m (1 - C_0) \geq \lambda \geq \frac{1}{C_0/\lambda_0 + (1 - C_0)/\lambda_m} = \lambda_2. \quad (6)$$

В разделах 3.3.2 и 3.3.3 модификация предложенной математической модели позволила учесть неидеальный тепловой контакт и наличие промежуточного слоя между шаровыми включениями и матрицей, влияние радиационно-кондуктивного теплопереноса, а также объемную концентрацию.

Термическое сопротивление между включением и матрицей, характеризующее неидеальный тепловой контакт на разделяющей их поверхности радиусом

R_1 , является величиной, обратной коэффициенту α контактного теплообмена. Модель композита (как и в предыдущем пункте), содержит три фазы: включение, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. В этом случае получено следующее соотношение для эффективного коэффициента теплопроводности:

$$\tilde{\lambda} = \frac{2(Q_1 - Q_2 C_0)}{2Q_1 + Q_2 C_0},$$

где $Q_1 = \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3)$, $Q_2 = 2\bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3)$, $\beta = \alpha R_1 / \lambda_m$, $\bar{R}_0 = R_0 / R_1$, $\bar{\lambda} = \lambda_0 / \lambda_m$. Двусторонние оценки эффективного коэффициента теплопроводности в этом случае имеют вид:

$$\tilde{\lambda}_+ = 1 - C_0 + \bar{\lambda}\beta \frac{\bar{\lambda} + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)(1 - \bar{R}_0^3)}{(\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2))^2} \geq \frac{\lambda}{\lambda_m},$$

$$\tilde{\lambda}_- = \frac{1}{1 - C_0 + \frac{C_0}{\bar{\lambda}} \frac{1 + \bar{R}_0^3/2}{1 - \bar{R}_0^3} + \frac{C_0}{\beta}} \leq \frac{\lambda}{\lambda_m}.$$

На тепловой контакт между включением и матрицей может повлиять химическое взаимодействие между ними, приводящее к образованию промежуточного слоя с коэффициентом теплопроводности, отличным от коэффициентов теплопроводности как включения, так и матрицы. В данном случае рассмотрена модель композита, содержащая четыре фазы: включение, промежуточный слой, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала.

Применяя тот же подход, который использован при построении оценок в случаях идеального и неидеального тепловых контактов, получено следующее соотношение для эффективного коэффициента теплопроводности:

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{1 - 2R_*^3 d}{1 + R_*^3 d},$$

где

$$d = 3 \frac{1 + b^* C_0 / \bar{R}_*^3}{2 + \bar{\lambda}_* + 2b^*(1 - \bar{\lambda}_*) C_0 / \bar{R}_*^3} - 1, \quad b^* = \frac{1 - \bar{\lambda} / \bar{\lambda}_* + (1 + 2\bar{\lambda} / \bar{\lambda}_*) \bar{R}_0^3 / 2}{2 + \bar{\lambda} / \bar{\lambda}_* + (1 - \bar{\lambda} / \bar{\lambda}_*) \bar{R}_0^3},$$

$$C_0 = R_1^3 / R^3, \quad \bar{\lambda}_* = \lambda_* / \lambda_m, \quad \bar{R}_* = R_* / R, \quad \bar{R}_0 = R_0 / R.$$

Двусторонняя оценка для эффективного коэффициента теплопроводности в этом

случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_+ &= 1 - \bar{R}_*^3 + \bar{\lambda}^*(\bar{R}_*^3 - C_0) + \bar{\lambda}C_0(1 - \bar{R}_0^3) \geq \tilde{\lambda}, \\ \tilde{\lambda}_- &= \frac{1}{1 - \bar{R}_*^3 + \frac{\bar{R}_*^3 - C_0}{\bar{\lambda}^*} + \frac{C_0(1 - \bar{R}_0^3)}{\bar{\lambda}}} \leq \tilde{\lambda}.\end{aligned}$$

В разделе 3.3.4 аналогичный подход использован для построения двусторонних оценок эффективных коэффициентов теплопроводности композита с волокнистыми включениями. На Рис. 5 б изображено поперечное сечение представительного элемента плоскостью, перпендикулярной трансверсально изотропному волокну, в которой оно имеет коэффициент теплопроводности λ_{\perp}° , λ_{\parallel} — эффективный коэффициент теплопроводности вдоль волокна, который может быть определен по правилу смеси. Для λ_{\perp}° в случае идеального теплового контакта получена следующая оценка:

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_m} = \frac{1 - bC_0}{1 + bC_0},$$

где $C_0 = r_0^2/r_m^2$, $b = (1 - \bar{\lambda} + (1 + \bar{\lambda})\bar{r}_*^2) / (1 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})\bar{r}_*^2)$, $\bar{r}_* = r_*/r_0$.

Для такого композита, помимо рассмотрения различных условий теплового взаимодействия между включением и матрицей, удалось учесть и взаимное расположение волокон для однонаправленного композита. Рассмотрены два варианта расположения волокон, соответствующих сетке с одинаковыми квадратными ячейками и ячейками в виде равносторонних треугольников (Рис. 6).

Помимо сравнения оценок в безразмерном виде, в работе приведен расчет для однонаправленного волокнистого композита с эпоксидным связующим и арамидным волокном кевлар-49. Известные экспериментальные данные для такого композита: $\lambda_{\perp} = 0,35$ Вт/(м · К) при $C_0 = 0,6$ и значениях $\lambda_m = 0,133$ Вт/(м · К) и $\lambda_{\perp}^{\circ} = 4,110$ Вт/(м · К). Этим данным соответствуют расчетные значения: $\lambda_* = 0,317$ Вт/(м · К) — значение, соответствующее нижней оценки эффективного коэффициента теплопроводности без учета взаимного расположения волокон; $\lambda_{\square} = 0,465$ Вт/(м · К) в случае учета взаимного расположения волокон, соответствующего случаю Рис. 6 а; $\lambda_{\Delta} = 0,341$ Вт/(м · К) в случае учета взаимного расположения волокон, соответствующего случаю Рис. 6 в.

В случае коротких волокон предыдущие оценки эффективного коэффициента теплопроводности могут привести к значительным погрешностям. Чтобы

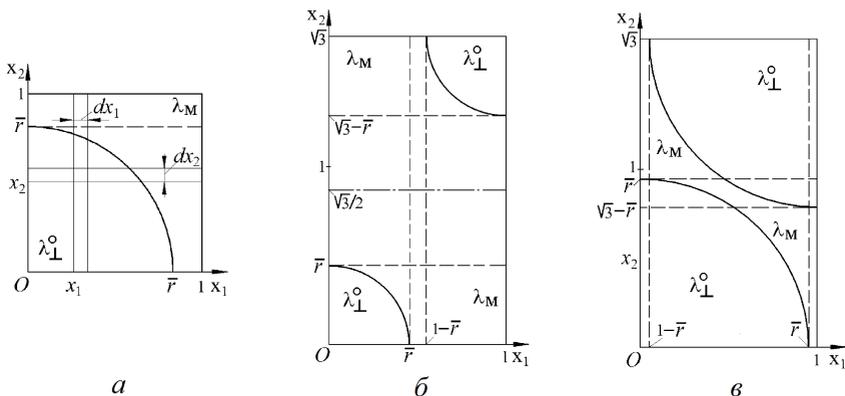


Рис. 6. Повторяющиеся элементы ячеек: *a* — четверть квадратной ячейки; *б* — треугольная ячейка; *в* — треугольная ячейка в случае плотной упаковки волокон

оценить возможную погрешность, в разделе 3.3.5 волокно было аппроксимировано вытянутым эллипсоидом вращения, точки поверхности которого удовлетворяют в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнению $\frac{x_1^2 + x_2^2}{\bar{b}^2} + x_3^2 = b_3^2$, где $\bar{b} = \frac{b_1}{b_3} < 1$, b_1 — малая полуось этого эллипсоида, а b_3 — его большая полуось, расположенная на координатной оси Ox_3 . Было проведено сравнение проекций вектора градиента температурного поля в рассматриваемом эллипсоидальном включении с предельным случаем, соответствующим длинному волокну.

Проведенный анализ позволил в зависимости от значений $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1^0}{\lambda_M}$ и \bar{b} оценить возможную погрешность при использовании результатов, полученных в предшествующих разделах в предположении достаточно длинных волокон. Если при фиксированных значениях ожидаемая погрешность неприемлема, то необходимо считать волокна короткими, т.е. рассматривать композит с включениями в виде удлинённых эллипсоидов вращения.

На основе модели теплового взаимодействия отдельно взятого эллипсоидального включения с неограниченным объемом окружающей его матрицы получены оценки эффективных коэффициентов теплопроводности в случае включений в виде эллипсоида вращения:

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_M} = \frac{1 + (\bar{\lambda} - 1)(D_\alpha^0 + (1 - D_\alpha^0)C_0)}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_\alpha^0(1 - C_0)}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_0/\lambda_M$ — отношение коэффициентов теплопроводности эллипсоидального

включения и матрицы композита,

$$D_1^\circ = D_2^\circ = \frac{1}{2(1 - \bar{b}^2)} - \frac{\bar{b}^2}{2\sqrt{(1 - \bar{b}^2)^3}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \bar{b}^2}}{\bar{b}}\right), \quad D_3^\circ = 1 - 2D_1^\circ.$$

В разделе 3.3.6 эта модель модифицирована для случая композита с пластинчатыми включениями. Такие включения могут иметь различную природу, (например, образующие новые фазы в поликристаллических материалах при их термической обработке или близкие к пластинчатой форме наноструктурные элементы, в том числе, фрагменты графена). Пластинчатое включение представлено в виде трехосного эллипсоида, малая полуось b_3 которого существенно меньше двух других полуосей, т.е. $b_3 \ll b_2 \leq b_1$. В случае, когда все включения геометрически подобны и их ориентация в композите одинакова, для главных значений λ_α^* тензора эффективной теплопроводности композита получены зависимости

$$\frac{\lambda_\alpha^*}{\lambda_m} = \frac{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)(D_\alpha + (1 - D_\alpha)C_0)}{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)D_\alpha(1 - C_0)},$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_\alpha/\lambda_m$, $D_1 = D_2 = \frac{1}{2}h(\text{arcctg } h - h)$, $D_3 = 1 - h \text{ arcctg } h$, $h = b_3/b_1$.

В четвертой главе на основе вариационного подхода и метода самосогласования получены оценки эффективных термоупругих свойств композита, армированного анизотропными пластинчатыми включениями.

В разделе 4.1 описана модель рассматриваемого композита, который состоит из изотропной линейно упругой матрицы, свойства которой характеризуют объемный модуль K° упругости и модуль сдвига G° , и линейно упругих анизотропных сфероидальных включений N различных типов. При объемной концентрации C_ζ включений, соответствующих номеру ζ , объемная концентрация всех включений будет равна

$$C_V = \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)}.$$

Заданные упругие характеристики включений каждого типа определяют тензоры $\widehat{\mathbf{C}}^{(\zeta)}$ и $\widehat{\mathbf{S}}^{(\zeta)}$ коэффициентов упругости и податливости соответственно. Примем, что одна из главных осей этих тензоров для каждого типа сфероидального включения совпадает с его осью вращения, которую обозначим $O\xi_3$. Далее результаты получены для частного случая анизотропии — трансверсальной изотропии относительно оси $O\xi_3$.

В разделе 4.2 на основе функционалов Лагранжа и Кастилиано получены верхние оценки K_+ объемного модуля упругости и G_+ модуля сдвига композита в виде

$$\begin{aligned}\frac{K_+}{K^\circ} &= C_V^\circ + \frac{1}{9K^\circ} \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} C_{iimm}^{(\varsigma)}, \\ \frac{G_+}{K^\circ} &= C_V^\circ + \frac{1}{10G^\circ} \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} \left(C_{iimm}^{(\varsigma)} - \frac{C_{iimm}^{(\varsigma)}}{3} \right),\end{aligned}\tag{7}$$

а также нижние оценки K_- и G_- соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\begin{aligned}\frac{K_-}{K^\circ} &= \left(C_V^\circ + K^\circ \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} S_{iimm}^{(\varsigma)} \right)^{-1}, \\ \frac{G_-}{G^\circ} &= \left(C_V^\circ + \frac{2G^\circ}{5} \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} \left(S_{iimm}^{(\varsigma)} - \frac{S_{iimm}^{(\varsigma)}}{3} \right) \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь C_V° — объемное содержание матрицы в композите.

В разделе 4.3 упругие характеристики рассматриваемого композита уточнены с использованием метода самосогласования, который позволил учесть механическое взаимодействия элементов структуры композита с изотропной линейно упругой средой, модули упругости которой подлежат определению как искомые характеристики этого композита. Осреднение по объему композита возмущений деформации по всем включениям и частицам матрицы должно, согласно методу самосогласования, привести к нулевому результату. В результате было получено следующее соотношение

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)} \rangle C_V^{(\varsigma)} = \hat{\mathbf{O}}_4,\tag{9}$$

где $\hat{\mathbf{u}}^\circ = (\hat{\mathbf{C}}^\circ - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)} = (\hat{\mathbf{C}}^{(\varsigma)} - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^{(\varsigma)})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^{(\varsigma)} - \hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{W}}^{(\varsigma)}$ — тензор четвертого ранга, компоненты которого зависят от искомых характеристик композита и от формы включения, принадлежащего типу с номером $\varsigma = \overline{1, N}$ (обратный тензору Эшелби). При хаотической ориентации осей вращения сфероидальных включений равенство (9) равносильно системе двух однородных уравнений, левые части которых содержат линейные инварианты тензоров $\hat{\mathbf{u}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)}$, $\varsigma = \overline{1, N}$. Эти уравнения, в свою очередь, содержат в качестве неизвестных объемный модуль K и модуль сдвига G композита.

В разделах 4.4 и 4.5 описанные выше подходы модифицированы для случая построения оценок термоупругих характеристик композита с анизотропными пластинчатыми включениями. На основе двойственной вариационной формулировки линейной задачи термоупругости для неоднородного твердого тела построена двусторонняя оценка для температурного коэффициента линейного расширения композита

$$\alpha_+^2 = \frac{B_\alpha}{9K} \geq \alpha^2 \geq \frac{K_-}{K} \alpha_*^2 = \alpha_-^2, \quad (10)$$

где $B_\alpha = 9K^\circ(\alpha^\circ)^2(1 - \nu) + \hat{\alpha}^\bullet \cdot \hat{C}^\bullet \cdot \hat{\alpha}^\bullet C_V$, α° — температурный коэффициент линейного расширения матрицы композита, $\hat{\alpha}^\bullet$ — тензор второго ранга коэффициентов температурной деформации анизотропных пластинчатых включений, $\alpha_* = (1 - C_V)\alpha^\circ + \hat{\alpha}^\bullet \cdot \hat{\mathbf{I}}_2 C_V / 3$.

Количественный анализ зависимости термоупругих характеристик от параметра $b = b_3/b_1$ проведен применительно к композиту с алюминиевой матрицей, армированной пластинчатыми включениями из оксида алюминия (Al_2O_3), для которого известны значения (в ГПа) элементов матрицы коэффициентов упругости при температуре 298 К: $C_{11}^\bullet = C_{22}^\bullet = 496,8$; $C_{12}^\bullet = 163,6$; $C_{13}^\bullet = C_{23}^\bullet = 110,9$; $C_{33}^\bullet = 498,1$; $C_{44}^\bullet = C_{55}^\bullet = 147,4$; $C_{66}^\bullet = 166,6$ и $C_{14}^\bullet = -C_{24}^\bullet = C_{56}^\bullet = -23,5$. Главные значения тензора коэффициентов температурной деформации для оксида алюминия при этой температуре равны $\alpha_1^\bullet = \alpha_2 = 6,7 \cdot 10^{-6}$ 1/К и $\alpha_3^\bullet = 5,0 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Для изотропной алюминиевой матрицы принято $K^\circ = 81,3$ ГПа, $G^\circ = 25,9$ ГПа и $\alpha^\circ = 23,3 \cdot 10^{-6}$ 1/К.

На Рис. 7 представлены зависимости значений объемного модуля K и модуля сдвига G , а также температурного коэффициента линейного расширения α композита от объемной концентрации C_V пластинчатых включений. Штрихпунктирные и штриховые кривые построены по формулам (7), (8) и (10) для верхней и нижней оценок этих характеристик. Сплошные кривые — оценки, полученные с использованием метода самосогласования при $b = 0,01$; сплошные кривые со светлыми кружками — при $b = 1$ (для включений шаровой формы). По мере приближения значения C_V к единице использованная модель утрачивает адекватность описания реального взаимодействия волокон и окружающей изотропной среды. Это приводит к тому, что при $C_V \rightarrow 1$ сплошные кривые, соответствующие значению $b = 0,01$, выходят за пределы границ, определяемых двусторонними оценками.

В пятой главе дифференциальная и вариационная формы математической

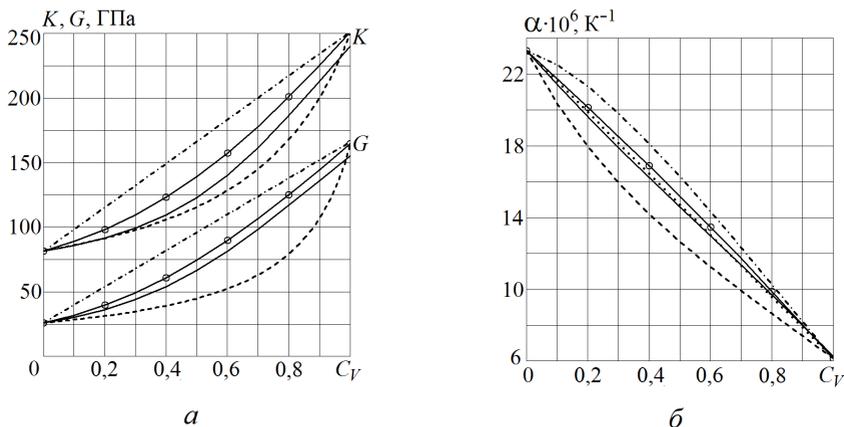


Рис. 7. Зависимости от объемной концентрации включений: *a* — модуль упругости композита; *б* — температурного коэффициента линейного расширения композита

модели установившегося процесса теплопроводности в твердом теле использованы для определения параметров, соответствующих возникновению критических ситуаций таких как тепловой взрыв, тепловой пробой.

В разделе 5.1 для плоского и цилиндрического слоев диэлектрика при постоянной разности электрических потенциалов на поверхностях этих слоев получены интегральные соотношения, позволившие по известным зависимостям от температуры коэффициента теплопроводности и удельного электросопротивления материала диэлектрика рассчитать распределения температуры и абсолютного значения напряженности электрического поля.

Проведен количественный анализ с использованием полученных интегральных соотношений, позволивший оценить возможности использования в проектируемых охлаждаемых высоковольтных кабелях постоянного тока конкретных электроизоляционных материалов, в том числе в сверхпроводящих кабелях, охлаждаемых жидким азотом.

Полученные результаты дадут возможность оценить целесообразность использования в проектируемых высоковольтных электротехнических устройствах в качестве диэлектрика конкретного материала (в том числе полимерного).

В разделе 5.2 постановка нелинейной задачи, соответствующей процессу стационарной теплопроводности в однородном трехосном эллипсоиде с возрастающей с температурой интенсивностью объемного энерговыделения, использована

для построения вариационной формы математической модели этого процесса. Такая форма включает функционал, определенный на множестве непрерывных и кусочно дифференцируемых функций, аппроксимирующих распределение температуры в объеме эллипсоида и принимающих на его поверхности заданное значение температуры. Анализ стационарных точек функционала дал возможность оценить сочетание определяющих параметров, соответствующих распределению температуры в эллипсоиде перед возникновением теплового взрыва. Сравнение интегральной погрешности, вызванной использованием различных аппроксимирующих функций, позволил выбрать функцию, наиболее точно описывающую температурное состояние эллипсоида, предшествующее тепловому взрыву. Получены оценки параметров теплового взрыва в предположении экспоненциального возрастания интенсивности объемного энерговыделения в эллипсоиде с увеличением температуры.

В разделе 5.3 рассмотрена задача о тепловом пробое в плоском или круговом цилиндрическом слое твердого диэлектрика при переменном напряжении в случае произвольного характера зависимости диэлектрических потерь от температуры. Математическая модель позволила также учесть зависимость от температуры теплопроводности диэлектрика и интенсивности теплоотвода с поверхностей слоя в окружающую среду. Проведен анализ стационарных точек для двух вариантов пробных функций, допустимых для функционалов двойственной вариационной формы модели. Установлены сочетания определяющих параметров, соответствующих возникновению теплового пробоя слоя диэлектрика.

Шестая глава посвящена разработке двойственных вариационных форм математических моделей процесса стационарной теплопроводности и термоупругости с учетом пространственной нелокальности.

В разделе 6.1 получено выражение для основного функционала, который в случае независимости от температуры коэффициента теплопроводности записан в виде

$$J[T] = \int_V \left(\frac{1-p_2}{2} (\nabla T)^2 - p_2 \int_{T_0}^T (\nabla^2 T^*) dT - \int_{T_0}^T \frac{q_V}{\lambda} dT \right) dV + \\ + \int_{S_q} dS \int_{T_0}^T \left(p_2 \mathbf{n} \cdot \nabla T^* - \frac{f_q}{\lambda} \right) dT,$$

где $\nabla T^*(M) = \int_V \varphi(M, M') \nabla T(M') dV'(M')$, $M \in \bar{V}$, $M' \in V'$.

В разделе 6.2 доказана строгая выпуклость основного функционала. Это означает, что такой функционал имеет единственный минимум, соответствующий единственному решению задачи теплопроводности.

В разделе 6.3 описана процедура построения альтернативного по отношению к основному функционала; получены два условия стационарности альтернативного функционала, которые совпадают с известными аналогичными условиями при отсутствии нелокальности. В случае постоянного коэффициента теплопроводности альтернативный функционал можно представить в виде

$$I[T, \mathbf{q}] = J[T] - \frac{1/(2\lambda^2)}{1-p_2} \int_V \left(\mathbf{q} + (1-p_2)\lambda \nabla T - p_2 \mathbf{q}^* \right)^2 dV.$$

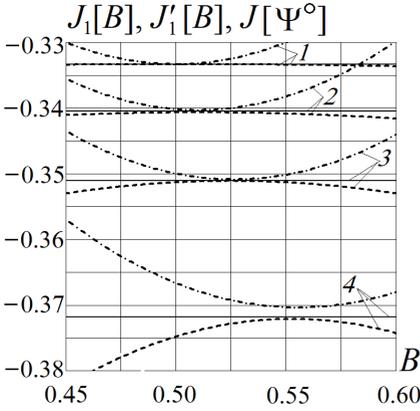
В разделе 6.4 функционалы, составляющие двойственную вариационную форму математической модели стационарной теплопроводности, преобразованы на истинном распределении температуры T^\bullet в единое соотношение

$$\begin{aligned} 2J[T^\bullet] = & - \int_V \frac{q_V}{\lambda} T^\bullet dV - \int_{S_q} \frac{f_q}{\lambda} T^\bullet dS - \int_{S_T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^\bullet \frac{f_T}{\lambda} dS + \\ & + \int_V p_2 \nabla T^\bullet \cdot \nabla T^\bullet_* dV - 2 \int_{S_T} p_2 \mathbf{n} \cdot \nabla T^\bullet_* f_T dS, \end{aligned}$$

которое в дальнейшем можно использовать для построения двусторонних оценок интегральных параметров установившегося процесса теплопроводности с учетом пространственной нелокальности.

В разделе 6.5 приведены примеры использования двойственной вариационной формы. Рассмотрена задача о неограниченной в своей плоскости пластине толщиной $2h$, в которой действуют непостоянные внутренние источники тепловыделения с объемной мощностью. Поверхности пластины имеют одинаковую температуру T_h , коэффициент теплопроводности материала пластины $\lambda \neq \text{const}$. В качестве допустимой для функционалов рассмотрена квадратичная функция $\Psi_1(\xi) = B(1 - \xi^2)$, которая при $B = 1/2$ совпадает с решением рассматриваемой задачи при отсутствии эффекта пространственной нелокальности. На Рис. 8 при различных значениях p_2 представлены графики зависимостей от безразмерного значения коэффициента B основного $J_1[B]$ и альтернативного $I_1[B]$ функционалов, а ординаты горизонтальных прямых равны минимальным значениям основного функционала при подстановке в него точного решения рассматриваемой задачи.

мой задачи. Показано, что по мере возрастания веса p_2 нелокальных эффектов отличия в значениях встречных функционалов увеличиваются.



Кривые на рисунке
соответствуют значениям p_2 :

- 1 — 0;
- 2 — 0.1;
- 3 — 0.25;
- 4 — 0.5;

Рис. 8. Зависимости от коэффициента B основного $J_1[B]$ и альтернативного $I_1[B]$ функционалов (соответственно штрихпунктирные и штриховые кривые)

В разделе 6.6 получены соотношения двойственной вариационной формы моделей упругости и термоупругости с учетом пространственной нелокальности. Основной функционал, достигающий минимума на истинном решении, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 J[u_i] = & \int_V \left(\frac{1-p_2}{2} \varepsilon_{ij}^\circ(M) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\circ(M) + \right. \\
 & \left. + \frac{p_2}{2} \int_V \varphi(M', M) \varepsilon_{ij}^\circ(M) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\circ(M') dV(M') \right) dV(M) - \\
 & - \int_V b_i(M) u_i(M) dV(M) - \int_{S_p} p_i(P) u_i(P) dS(P).
 \end{aligned}$$

Альтернативный максимизируемый функционал имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I[u_i, \sigma_{ij}] = & J[u_i] - \frac{S_{ijkl}}{2(1-p_2)} \int_V (\sigma_{ij} - (1-p_2) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - p_2 \sigma_{ij}^*) \cdot \\
 & \cdot (\sigma_{kl} - (1-p_2) C_{ijkl} \varepsilon_{ij} - p_2 \sigma_{kl}^*) dV, \\
 \sigma_{ij}^*(M) = & \int_V \varphi(M', M) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\circ(M') dV(M').
 \end{aligned}$$

Для получения двойственной вариационной формулировки для несвязанной термоупругости достаточно в функционалах компоненты полной деформации ε_{ij} в случае анизотропного материала заменить разностями $\varepsilon_{ij}(M) - \varepsilon_{ij}^{(T)}(M)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработана иерархия новых математических моделей, описывающих термомеханические процессы с учетом пространственной и временной нелокальностей в структурно-чувствительных материалах, в том числе двойственные вариационные формы математических моделей процессов стационарной теплопроводности и термоупругости в области произвольной формы с учетом пространственных нелокальных эффектов.

2. На примерах одномерных задач стационарной теплопроводности для неограниченной в своей плоскости пластины и деформировании цилиндрического стержня с учетом пространственной нелокальности, для которых найдены аналитические решения, на качественном уровне проанализировано влияние пространственной нелокальности на поля температуры, перемещений и напряжений соответственно.

3. Получены оценки, в том числе двусторонние, эффективных коэффициентов теплопроводности и термоупругих характеристик композитов, позволившие учесть тип и объемную концентрацию армирующих включений, особенности теплового контакта и теплопереноса между включениями и матрицей, наличие промежуточного слоя, взаимное расположение, возможную анизотропию включений. Такие оценки дадут возможность на этапе проектирования прогнозировать эффективные тепловые, термоупругие и электрические свойства структурно-чувствительных сред.

4. Разработанные интегральная и вариационная формы математической модели установившейся теплопроводности позволили оценить целесообразность использования конкретных материалов в элементах конструкций, надежное функционирование которых связано с температурным состоянием материала.

5. Для исследования полей температуры, деформации и напряжений в структурно-чувствительном материале разработаны одномерные и двумерные численные алгоритмы нелокального метода конечных элементов.

6. Разработаны собственные программные комплексы `UnlockTermElast 1D` и `NonLocFEM`, в которых численные алгоритмы нелокального метода конечных элементов использованы для моделирования термомеханического поведения

материала под различным внешним воздействием. Программные комплексы позволят решать широкий класс задач нелокальной термоупругости в твердых телах произвольной формы, также дадут возможность как модифицировать существующие, так и добавить в дальнейшем новые программные модули.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Mathematical model of a nonlocal medium with internal state parameters // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2013. V. 86. No. 4. P. 820–826. (1.05 п.л./0.65 п.л.)

2. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Численное решение интегро-дифференциального уравнения теплопроводности для нелокальной среды // *Математическое моделирование*. 2013. Т. 25. № 5. С. 99–108. (0.9 п.л./0.5 п.л.)

3. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Влияние формы пластинчатых включений на эффективную теплопроводность композита // *Композиты и наноструктуры*. 2014. Т. 6. № 2. С. 95–104. (0.9 п.л./0.4 п.л.)

4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Иерархическая система математических моделей процесса теплопроводности в композиционном материале // *Информационные технологии*. 2015. Т. 21. № 3. С. 179–186. (0.6 п.л./0.3 п.л.)

5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки эффективной теплопроводности композита с анизотропными включениями ленточной формы // *Композиты и наноструктуры*. 2016. Т. 8. № 4. С. 236–250. (0.4 п.л./0.15 п.л.)

6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Радиационно-кондуктивный теплоперенос в пористой керамике // *Огнеупоры и техническая керамика*. 2016. № 4-5. С. 8–14. (0.6 п.л./0.3 п.л.)

7. Kuvyrkin G.N., Savelieva I.Y. Thermomechanical model of nonlocal deformation of a solid // *Mechanics of Solids*. 2016. V. 51. No. 3. P. 256–262. (0.6 п.л./0.4 п.л.)

8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности сферопластика // *Пластические массы*. 2017. № 1–2. С. 30–34. (0.4 п.л./0.15 п.л.)

9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Estimates of the Elastic Characteristics of a Composite with Short Anisotropic Fibers // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 4. P. 497–504. (0.6 п.л./0.3 п.л.)

10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The variational approach to estimation of the dielectric permittivity of a unidirectional fibrous composite // *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2017. V. 72. No. 1. P. 1–9. (0.6 п.л./0.3 п.л.)

11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Dual variational formulation of the electrostatic problem in an inhomogeneous anisotropic dielectric // *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2017. V. 72. No. 3. P. 94–101. (0.6 п.л./0.3 п.л.)
12. Савельева И.Ю. Динамические температурные напряжения в упругом теле с криволинейной границей // *Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки*. 2018. № 1. С. 38–46. (0.6 п.л.)
13. Savel'eva I.Y. Influence of medium nonlocality on distribution of temperature and stresses in elastic body under pulsed heating // *Mechanics of Solids*. 2018. V. 53. No. 3. P. 277–283. (0.6 п.л.)
14. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The variational form of the mathematical model of a thermal explosion in a solid body with temperature-dependent thermal conductivity // *High Temperature*. 2018. V. 56. No. 2. P. 223–228. (0.7 п.л./0.4 п.л.)
15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y. Temperature state of electrical insulation of a superconducting DC cable // *Cryogenics*. 2018. V. 95. P. 1–4. (0.65 п.л./0.4 п.л.)
16. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y. Mathematical model of thermal breakdown of a plane layer of a polar dielectric // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2018. V. 69. No. 4. Art. 91. (0.8 п.л./0.4 п.л.)
17. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y. Thermoelastic characteristics of a composite with anisotropic platelike inclusions // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018. V. 47. No 3. P. 256-265. (0.8 п.л./0.5 п.л.)
18. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2018. V. 116. P. 833–839. (1 п.л./0.6 п.л.)
19. Zarubin V.S., Savel'eva I.Y., Sergeeva E.S. Estimates of equivalent heat conductivity coefficients of carbon nanotubes // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. V. 91. № 5. P. 1274–1281. (0.7 п.л./0.3 п.л.)
20. Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y., Kuvshynnikova D.A. Nonstationary heat conduction in a curvilinear plate with account of spatial nonlocality // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2019. V. 92. No. 3. P. 608–613. (0.9 п.л./0.5 п.л.)
21. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y. Dual variational model of a thermal breakdown of a dielectric layer at an alternating voltage // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2019. V. 70. No. 4. Art.no 115. (0.75 п.л./0.4 п.л.)

22. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Variational estimates of the parameters of a thermal explosion of a stationary medium in an arbitrary domain // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. V. 135. P. 614–619. (1 п.л./0.7 п.л.)
23. Савельева И.Ю. Численное моделирование термоудара в упругом теле с учетом эффектов нелокальности среды // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*. 2020. № 3. С. 20–29. (0.8 п.л.)
24. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Zarubin V.S. Estimations of the parameters of a thermal explosion in a triaxial ellipsoid // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2020. V. 71. No. 4. Art. no 113. (0.8 п.л./0.5 п.л.)
25. Савельева И.Ю. Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*. 2022. № 2. С. 68–86. (0.6 п.л.)
26. Савельева И.Ю. Двойственная вариационная модель стационарного процесса теплопроводности, учитывающая пространственную нелокальность // *Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки*. 2022. № 5. С. 45–61. (0.6 п.л.)
27. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshynnikova D.A. Mathematical modeling of temperature stresses in a nonlocal thermoviscoelastic continuous medium // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. V. 2231. Art. 012010. (0.3 п.л./0.1 п.л.)
28. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. The temperature state of a plane dielectric layer at constant voltage and fixed temperature of one of the surfaces of this layer // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2022. V. 45, No. 15. P. 8854–8863. (0.85 п.л./0.4 п.л.)
29. Mathematical model of thermal breakdown of electrical insulation made of polymer composite / I.Yu. Savelyeva [et al.] // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2022. V. 73. No. 5. Art. 181.
30. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Sokolov A.A. 2D nonlocal elasticity: Investigation of stress and strain fields in complex shape regions // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2023. V. 103. No. 3. Art. e202200308. (0.6 п.л./0.2 п.л.)
31. Influence of thermal conducting inclusions on the limiting potential difference of polymer composite electrical insulation / I.Yu. Savelyeva [et al.] // *Polymer Bulletin*. 2023. V. 80. No. 5. P. 5573–5585. (0.7 п.л./0.3 п.л.)