

На правах рукописи

Коцур Олег Сергеевич

**Модификация метода вихревых петель
для моделирования движения вихревых
структур в вязкой несжимаемой жидкости
и его программная реализация**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Москва – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном
образовательном учреждении высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Щеглов Георгий Александрович

Официальные оппоненты: **Вышинский Виктор Викторович**
доктор технических наук, профессор, Государственный научный центр Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского», главный научный сотрудник

Сизых Григорий Борисович
кандидат физико-математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Защита состоится «____» _____ 2022 г. в ____ час. ____ мин. на заседании диссертационного совета 24.2.331.05 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «____» _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Аттетков
Александр
Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В природе и технике существует ряд явлений и задач, связанных с движением вихревых структур в безграничном пространстве. Они могут иметь как естественный характер (циклонические атмосферные явления, генерация тороидальных вихрей при извержении вулканов, конвективном переносе некоторых видов семян и др.), так и техногенные причины (распространение газопылевых облаков при взрывах, сход вихревых жгутов с кромок крыльев самолётов). Генерация круговых и эллиптических вихревых колец может способствовать интенсивному перемешиванию газовых масс в камерах сгорания для ускорения гомогенизации горючей смеси. Устойчивость движения круговых вихревых колец на некотором интервале времени, высокая скорость самопереноса и способность переноса в собственном ядре газовой фазы находят применение и в некоторых видах оружия нелетального действия — вихревых пушках.

Вне зависимости от области возникновения такого рода явлений, актуальной задачей является моделирование динамики вихревых структур в безграничном пространстве. Для этой цели перспективным представляется класс вихревых методов вычислительной гидродинамики, в которых первичной расчётной величиной является завихренность. В частности, для моделирования структур типа вихревых трубок наибольший интерес представляет лагранжевый метод вихревых петель (МВП), в рамках которого непрерывное поле завихренности приближённо представляется в виде совокупности элементарных вихревых трубок — петель. Основным преимуществом МВП как лагранжевого метода является отсутствие сетки и относительно низкая вычислительная сложность. Другой его особенностью является отсутствие дополнительной завихренности, которая возникает в классических методах вихревых частиц из-за несоленоидальности элементарных полей вихревых элементов.

Предложенный ещё в 70-х годах прошлого века и разработанный такими исследователями как A. Leonard и G. Winckelmans, МВП, в основном, применялся для моделирования невязких течений без границ. Отсутствие механизма генерации петель на поверхности тел, сложности, связанные с перезамыканием петель, а также отсутствие адекватной и практически реализуемой модели вязкости не привели к широкому распространению МВП в практике инженерных расчётов. В работах современных исследователей (С.А. Дергачев, Г.А. Щеглов, И.К. Марчевский) уделяется внимание инженерным приложениям МВП применительно к моделированию обтекания тел, однако вопросы, связанные с учётом влияния вязкости, остались открытыми. Отсутствие математической модели учёта эффектов вязкой диффузии завихренности не позволяет использовать МВП и для моделирования вихревых структур типа трубок в пространстве без границ. Существующие подходы, такие как метод случайных блужданий (random-walk, A. Chorin), метод обмена интенсивностями (PSE, P. Degond, S. Mas-Gallic) или гибридный метод (DVM-PSE, P. Musek), не применимы в

МВП из-за возникающей т.н. проблемы «неколлинеарности».

Таким образом, разработка математических моделей вязкости для метода вихревых петель, его соответствующая модификация и создание новых алгоритмов и программной платформы, реализующей моделирование вязких течений с использованием МВП, является актуальным направлением исследования.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью работы является разработка математической модели и алгоритмов расчёта течения вязкой несжимаемой жидкости в пространстве без границ с помощью метода вихревых петель, а также их программная реализация.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи.

1. Проведён анализ существующих математических моделей учёта вязкости, применяемых в классических вихревых методах и в гибридных сеточно-бессеточных методах.

2. Проведено теоретическое обобщение моделей вихревых элементов (вортон, отрезок, петля) для адаптации существующих методов учёта вязкости к модели вихревых отрезков.

3. Разработан численный метод учёта вязкости для модели вихревых петель с целью учёта эффектов вязкой диффузии завихренности в трёхмерном течении.

4. Разработан программный комплекс, реализующий метод вихревых петель с различными моделями вязкости.

Методы исследования. При решении поставленных задач были использованы лагранжевые вихревые методы гидродинамики, теория обобщённых функций, методы интегральной аппроксимации дифференциальных операторов, методы вычислительной математики и параллельных вычислений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчётов с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Доказано, что в классе течений с ненулевой спиральностью завихренности имеются как течения, для которых не существует локального способа вычисления скорости переноса вихревых трубок, так и течения, для которых такой способ существует. Это обосновывает сложность практической реализации алгоритмов поиска поля диффузионной скорости для течений общего вида аналогично применяемым для моделирования двумерных течений вязкой жидкости в методе вязких вихревых доменов (ВВД).

2. Доказана теорема об интегральной аппроксимации дифференциальных операторов первого порядка.

3. Разработан аналог метода диффузионной скорости для учёта влияния вязкости при моделировании пространственных течений жидкости методом вих-

ревых петель при допущении об отсутствии спиральности завихренности.

4. Разработан программный комплекс VEM для моделирования трёхмерного течения вязкой жидкости в пространстве без границ с использованием метода вихревых петель с применением технологии параллельного программирования MPI.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости в пространстве без границ, в частности, вихревых структур типа вихревых трубок, не претерпевающих перезамыканий. Предложенная модель учёта вязкости на основе аналога диффузионной скорости может быть также использована в существующих алгоритмах МВП для моделирования движения вихревых петель в пристеночном слое, что, в свою очередь, позволит уточнить методики расчёта гидродинамических нагрузок, действующих на обтекаемые тела.

Результаты работы использованы при выполнении НИР «Стена» и НИР «Фронтон» совместно с АО «ВПК «НПО машиностроения».

Положения, выносимые на защиту.

1. Математическая модель учёта вязкости для моделирования безграничных пространственных течений с помощью МВП, основанная на применении аналога диффузионной скорости при допущении об отсутствии спиральности завихренности.

2. Теорема об интегральной аппроксимации дифференциальных операторов первого порядка.

3. Модификация алгоритма МВП для расчёта вязких несжимаемых течений без границ.

4. Программный комплекс VEM для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием МВП и различных моделей вязкости.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: «Mechanics 2016 International School-Conference of Young Scientists» (Цахкадзор, Армения, 2016), «V, VII International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics» (Цахкадзор, Армения, 2017, 2021), III-я Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы физико-математических наук» (Орел, 2017), «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (Москва, 2017), «31-st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences» (Белу-Оризонти, Бразилия, 2018), «8th International Conference on Vortex Flow Mechanics» (Сиань, Китай, 2018), «VI International Conference on Particle-based Methods: Fundamentals and Applications (Particles)» (Барселона, Испания, 2019), Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. С.М. Белоцерковского под рук. А.И. Желанникова, В.В. Вышинского (Москва, 2017, 2021).

Диссертационная работа является составной частью исследований, проведённых в рамках грантов РФФИ 17-08-01468 «Моделирование нелинейной динамики стабилизаторов расхода для энергетических установок летательных

аппаратов вихревыми методами», 18-31-20051 «Разработка новых алгоритмов моделирования обтекания профилей и решения сопряженных задач гидроупругости на основе вихревых методов и их эффективная программная реализация для многопроцессорных ЭВМ различных архитектур», 20-08-01076 «Моделирования аэроавтоупругой динамики дозвуковых летательных аппаратов с учетом нестационарного вихревого характера обтекания»; проекта 0705-2020-0047 Министерства науки и высшего образования РФ «Теория дифференциальных уравнений, краевые задачи, связанные задачи анализа и теории приближений и некоторые их приложения».

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 9 научных работах, в том числе в 3 статьях в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных изданий, и 3 научных публикациях в изданиях, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в текст диссертационной работы включен лишь материал, непосредственно принадлежащий соискателю.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, выводов, списка литературы и 2 приложений. Общий объём диссертации 194 страницы, содержит 155 иллюстраций и 11 таблиц. Список литературы включает 149 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, аргументирована научная новизна и показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, приведены данные о структуре и объёме диссертационной работы.

В первой главе рассмотрена постановка задачи о движении вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости в пространстве без границ. Движение такой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — поле скоростей, $p = p(\mathbf{x}, t)$ — поле давления, $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Граничные условия соответствуют условиям затухания возмущения на бесконечности:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_\infty, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}.$$

Начальные условия заданы известным полем скоростей:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = 0.$$

При построении вихревых методов для описания движения вязкой несжимаемой жидкости вместо поля скоростей \mathbf{V} используют поле завихренности $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ как первичную характеристику течения. В этом случае уравнение Навье — Стокса можно представить в форме **уравнения эволюции завихренности**

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

с граничными и начальными условиями

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_\infty, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \nabla \times \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = 0,$$

где скорость \mathbf{V} с учётом $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ может быть восстановлена по полю завихренности согласно формуле Био — Савара:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_\infty + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}.$$

Среди вихревых методов выделяют два основных класса: гибридные (сеточно-бессеточные) и лагранжевы (бессеточные) методы. Суть лагранжевых вихревых методов состоит в приближении поля завихренности с помощью конечного набора элементарных полей, называемых **вихревыми элементами (ВЭ)**. В зависимости от вида ВЭ выделяют три основных метода.

Метод вихревых частиц построен на аппроксимации поля завихренности с помощью конечного набора частиц (вортонов), в которых «сконцентрирована» завихренность (Рис. 1, *a*):

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\alpha}_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k),$$

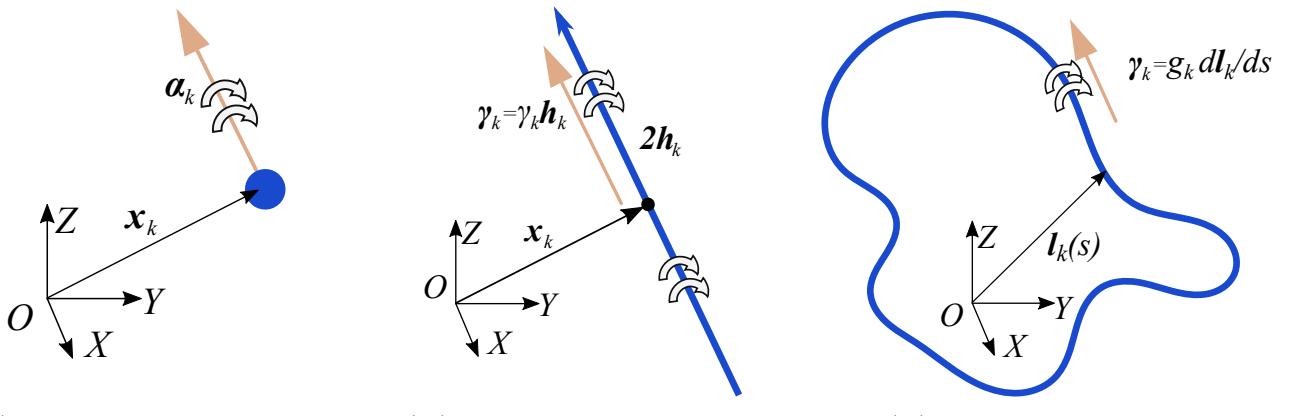
где \mathbf{x}_k — положение вортона k , $\boldsymbol{\alpha}_k$ — его вектор интенсивности, $\delta(\mathbf{x})$ — трёхмерная δ -функция Дирака.

В методе вихревых отрезков поле завихренности приближается с помощью суперпозиции элементарных полей вихревых отрезков $2\mathbf{h}_k$ (Рис. 1, *b*):

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \boldsymbol{\gamma}_k \delta(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_k + s\mathbf{h}_k)) ds,$$

где \mathbf{x}_k — положение центра отрезка (маркера), $\boldsymbol{\gamma}_k = g_k \mathbf{h}_k$ — вектор интенсивности отрезка, равный произведению материального вектора \mathbf{h}_k на циркуляцию g_k вихревой трубки, фрагментом которой является отрезок.

Недостаток этих двух методов связан с тем, что элементарные поля завихренности вортона и вихревого отрезка помимо сингулярной составляющей,



(a) Вихревая частица

(б) Вихревой отрезок

(в) Вихревая петля

Рис. 1. Вихревые элементы

выраженной δ -функцией, имеют т.н. «дополнительную завихренность», дополняющую исходное поле вихревого элемента до соленоидального. Это сказывается на точности определения нагрузок при моделировании обтекания различных тел в потоке и в целом приводит к необходимости учёта большого числа вихревых элементов при решении реальных задач.

Этого недостатка лишён **метод вихревых петель (МВП)**, основанный на представлении завихренности с помощью набора замкнутых тонких вихревых трубок (Рис. 1, в):

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{k=1}^n \int_0^1 g_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}_k(s)) \frac{d\boldsymbol{l}_k}{ds} ds,$$

где $\boldsymbol{l}_k(s)$ — радиус-вектор точки на гладкой кривой с параметром $s \in [0, 1]$, описывающей вихревую трубку k с интенсивностью (циркуляцией) g_k .

Вместе с тем, до настоящего времени МВП использовался лишь для моделирования невязких течений. Разработка адекватного метода учёта вязкости течения для МВП позволит существенно расширить область его применения.

Для классического метода вихревых частиц известен ряд подходов к моделированию вязкости. Одним из первых был предложен метод случайных блужданий (random-walk, A. Leonard), основанный на стохастическом подходе к решению уравнения Пуассона. Среди детерминированных моделей особо выделяют метод обмена интенсивностей (PSE, P. Degond, S. Mas-Gallic), метод диффузионной скорости (DVM, G. Lacombe, S. Mas-Gallic) и гибридный метод, объединяющий первые два подхода (DVM-PSE, P. Musek). DVM основан на поиске т.н. диффузионной скорости переноса завихренности, с помощью которой моделируется вязкая диффузия завихренности. Диффузионную скорость можно явно получить только для двумерных течений, однако идея поиска трёхмерного аналога такой скорости реализуется в гибридном подходе DVM-PSE.

Вторая глава посвящена общей формулировке методов вихревых петель и отрезков для невязкой жидкости, что является основой построения вихревых ме-

тодов для моделирования течений вязкой жидкости. В качестве математического аппарата использован известный аппарат теории обобщённых функций, а именно, δ -функций Дирака. С их помощью введены три типа обобщённых функций: «частица», «отрезок» и «филамент», которые использованы для построения трёх типов вихревых элементов: «точечный вортон», «вихревой отрезок» и «вихревая петля», составляющих основу всех известных лагранжевых вихревых методов.

С помощью формализма обобщённых функций дана слабая формулировка уравнения эволюции завихренности, которая позволяет искать его обобщённые решения. Определены необходимые условия, при которых системы вихревых петель или отрезков являются таковыми. Эти условия формируют системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно параметров петель и отрезков. Данные системы являются дискретными аналогами уравнения эволюции завихренности для невязкой несжимаемой жидкости. Для системы петель, разбитых в сумме на n вихревых отрезков, заданных векторами $2\mathbf{h}_k$, такая система ОДУ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_k), \\ \frac{d\mathbf{h}_k}{dt} = \mathbf{h}_k \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}_k), \quad \forall k = \overline{1, n}, \\ \frac{dg_k}{dt} = 0. \end{cases}$$

Из уравнений видно, что вихревые отрезки, составляющие петлю, перемещаются по полю скоростей жидкости и деформируются в соответствии с локальным градиентом скорости, причём их интенсивности остаются неизменными во времени. Это поведение полностью согласуется с теоремой Гельмгольца о движении вихревых трубок в невязкой баротропной жидкости.

В третьей главе рассмотрены различные способы учёта вязкости жидкости при моделировании течений методом вихревых петель. Для таких течений нарушаются условия теоремы Гельмгольца о движении вихревых трубок, которые в общем случае уже не переносятся одними и теми же жидкими частицами, как в невязком случае. В рамках модели петель это выражается в неколлинеарности материального вектора \mathbf{h}_k и вектора интенсивности γ_k вихревого отрезка k , из-за чего приближаемое замкнутыми петлями поле завихренности перестаёт быть соленоидальным. При построении МВП для вязкой жидкости требуется введение адекватного допущения, позволяющего исключить проблему несоленоидальности аппроксимируемого поля завихренности.

С этой точки зрения рассмотрены две известные модели вязкости: метод обмена интенсивностей (PSE) и гибридный метод с использованием аналога диффузионной скорости (DVM-PSE). Обе модели в неизменном виде приводят к проблеме несоленоидальности вихревого поля петель. При этом для первого метода не удается ввести сколько-нибудь адекватного допущения, при котором можно было бы решить данную проблему. Для гибридной модели это сделать

можно, однако выбор аналога диффузионной скорости не является удачным, поскольку не учитывает кривизну вихревых петель.

Решением проблемы переноса вихревых трубок в пространственных вязких течениях мог бы стать трёхмерный аналог диффузионной скорости. Теоретические результаты, приведённые в третьей главе, позволяют заключить, что такая скорость всегда существует в зонах ненулевой завихренности (Г.Б. Сизых, 2015), однако практический её поиск затруднен из-за её нелокальности. Тем не менее, данные результаты позволяют ввести более удачный аналог диффузионной скорости по сравнению с моделью DVM-PSE, который является точным для более широкого класса течений.

Таким аналогом служит поле, задаваемое соотношением

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega})}{\boldsymbol{\omega}^2}.$$

Используя \mathbf{V}_d , уравнение эволюции завихренности можно записать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)) = \mathbf{B}, \quad (1)$$

где через \mathbf{B} обозначен остаточный член

$$\mathbf{B} = -\nu \nabla \times \left[(\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega})) \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} \right].$$

В случае $\mathbf{B} = 0$ уравнение (1) принимает вид уравнения Фридмана, в соответствии с которым векторное поле $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$ является таким полем, что частицы воображаемой жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$ и составляющие в некоторый момент времени вихревую трубку, продолжают составлять вихревую трубку, причём её интенсивность сохраняется. Составляющая \mathbf{V}_d этого поля названа трёхмерным аналогом диффузионной скорости. На её основе в работе построена модификация МВП, позволяющая учитывать эффекты вязкой диффузии завихренности. Достаточным условием для этого является допущение об отсутствии спиральности завихренности, выражаемое соотношением

$$S = \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Это допущение всегда соблюдается в случаях плоскопараллельного и осесимметричного течения без закрутки. В этих случаях выражение для \mathbf{V}_d совпадает с выражениями для соответствующих диффузионных скоростей, известных ранее. В остальных случаях данная модель учёта вязкой диффузии завихренности не будет отражать вклад закрученности вихревых линий.

Для вычисления значений поля \mathbf{V}_d в маркерах отрезков доказана теорема об интегральной аппроксимации дифференциальных операторов первого порядка. Введены следующие обозначения приближённых дифференциальных операторов

первого порядка:

$$\nabla^\varepsilon \star \mathbf{g} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \star (\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) d\nu_{\mathbf{y}},$$

где с помощью символа \star обозначен любой из символов векторного \times , тензорного \otimes или скалярного \cdot произведений; $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}))$ — векторное поле; $\boldsymbol{\eta}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^3} \boldsymbol{\eta}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$, где $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ — некоторая функция ядра, которую можно представить тремя скалярными функциями: $\eta_i(\mathbf{x})$, $i \in \{1, 2, 3\}$; ε — параметр сглаживания.

Обозначим также с помощью символа $\|f\|_\infty^p$ норму функции $f(\mathbf{x})$ в пространстве Соболева $W_\infty^p(\mathbb{R}^3)$, $p \in \mathbb{N}$:

$$\|f\|_\infty^p = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq p} \text{supp} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f|,$$

где символом $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f$ обозначена производная от функции f по мультииндексу $\boldsymbol{\alpha}$. Если поле f представляет собой вектор или тензор, то под символом $\|f\|_\infty^p$ будем понимать максимальную из норм всех его компонентов.

Теорема. *Пусть векторная функция ядра $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (\eta_1(\mathbf{x}), \eta_2(\mathbf{x}), \eta_3(\mathbf{x}))$ удовлетворяет моментным условиям*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} x_i \eta_j(\mathbf{x}) d\nu_{\mathbf{x}} &= \delta_{ij}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \eta_j(\mathbf{x}) d\nu_{\mathbf{x}} &= 0, \quad 1 < |\boldsymbol{\alpha}| \leq r, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^{r+1} \eta_j(\mathbf{x}) d\nu_{\mathbf{x}} &< \infty, \end{aligned}$$

для $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $r \in \mathbb{N}$ — порядок ядра.

Тогда для любого векторного поля $\mathbf{g} \in W_\infty^{r+1}(\mathbb{R}^3)$ существует такая константа C , что справедлива оценка

$$\|\nabla \star \mathbf{g} - \nabla^\varepsilon \star \mathbf{g}\|_\infty^0 \leq C \varepsilon^r \|\mathbf{g}\|_\infty^{r+1}.$$

В предположении об отсутствии спиральности завихренности получен дискретный аналог уравнения эволюции завихренности, в котором эффект вязкой диффузии моделируется путем переноса вихревых трубок по полю, равному сумме поля скоростей течения \mathbf{V} и аналога диффузионной скорости \mathbf{V}_d :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)(\mathbf{x}_k), \\ \frac{d\mathbf{h}_k}{dt} = \mathbf{h}_k \cdot \nabla(\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)(\mathbf{x}_k), \\ \frac{dv_k}{dt} = v_k(\nabla \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d))(\mathbf{x}_k), \\ \frac{dg_k}{dt} = 0, \end{cases} \quad \forall k = \overline{1, n},$$

где v_k — объём, приходящийся на k -й отрезок.

Разработанный метод учёта вязкости (обозначаемый DVM-3D) можно рассматривать как модификацию (расширение) двумерного метода диффузионной скорости для класса пространственных течений.

В **четвёртой главе** описан программный комплекс (ПК) VEM, предназначенный для моделирования замкнутых вихревых структур в вязкой несжимаемой жидкости в безграничном пространстве. Структура ПК, приведённая на Рис. 2, включает препроцессор, решатель и постпроцессор, разделённые на блоки. Первые 4 блока — файл исходных данных `controlDict` (Блок 1), решатель VEM (Блок 2), скрипт постпроцессора на базе Wolfram Mathematica (Блок 3) и утилита `setFieldsFromVem` (Блок 4) — разработаны в рамках диссертации. В качестве 5 и 6 блоков служат внешние программные комплексы OpenFOAM (OF) и ParaView с открытым исходным кодом, которые используются для сравнения решения модельных задач вихревыми и сеточными методами.

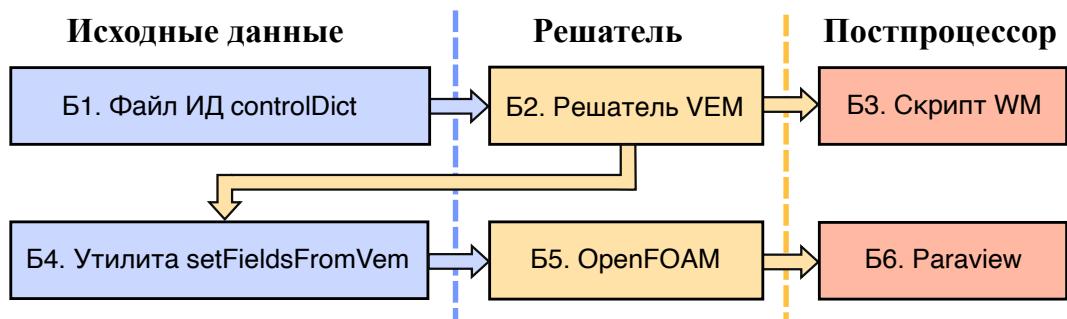


Рис. 2. Схема программного комплекса VEM

Решатель VEM, написанный на языке C++ с использованием технологии параллельного программирования MPI, представляет основное вычислительное ядро ПК. Решатель построен по модульной архитектуре, позволяющей подключать различные вихревые структуры и различные модели вязкости, проводить анализ их работы и отладку. В частности, в ПК VEM реализованы вихревые трубы различной геометрии (круговые, эллиптические, овальные вихревые кольца), модели вязкости PSE, DVM-PSE и DVM-3D в применении к вихревым петлям. Создана платформа для поддержки вихревых структур произвольной формы.

ПК также позволяет гененировать поле скоростей, которое может быть использовано в качестве начального условия для задач в пакете OpenFOAM.

Для этого применяется специально созданная утилита `setFieldsFromVem`.

В пятой главе приведены результаты тестирования программного комплекса VEM и алгоритмов модификации метода вихревых петель с применением предложенной модели вязкости DVM-3D. Тестирование выполнено на основе трёх модельных задач: диффузии бесконечного прямолинейного вихря (аналог плоского вихря Лэмба — Озенна), движении кругового вихревого кольца и движении эллиптического вихревого кольца с отношением полуосей 2. Каждая из задач решена также в пакете OpenFOAM, реализующем сеточный метод контрольных объёмов (МКО). Результаты сеточного метода используются в качестве основной базы сравнения для всех трёх задач. Кроме того, для вихря Лэмба — Озенна известно аналитическое решение, а для задачи о движении кругового кольца применяется аналитическая модель Капланского — Руди (КР), что также использовано для проверки результатов расчёта.

Параметры расчётных схем приведены в Таблице 1. Число Рейнольдса определяется как отношение интенсивности (циркуляции) трубы Γ_0 к кинематической вязкости ν : $Re = \Gamma_0/\nu$. Распределение завихренности по сечению трубок задано функцией

$$\omega_0(r) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_c^2} e^{-\frac{r^2}{r_c^2}},$$

где r_c — характерный размер начального ядра завихренности. Схема интегрирования — метод Хойна (RK2).

Таблица 1. Параметры расчётной схемы вихревого эллипса

Параметр	Вихрь ЛО	Кр. К.	Элл. К.
Циркуляция Γ_0	1	1	1
Вязкость ν	0.002	0.002	0.0012
Число Рейнольдса Re	500	500	834
Радиус начального ядра трубы r_c	0.1	0.1	0.1
Радиус средней линии кольца R	—	1	—
Отношение полуосей эллипса AR	—	—	2
Малая полуось эллипса b	—	—	1
Количество сечений	101	200	140
Количество ВЭ в сечении	225	225	49
Количество ВЭ общее	22725	45000	6860
Метод интегрирования	RK2	RK2	RK2
Шаг интегрирования	0.025	0.025	0.05
Время расчёта	133 с (4 ядра)	547 с (4 ядра)	0.7 ч (4 ядра)
Время расчёта (МКО)	362 с (4 ядра)	50 с (4 ядра)	6.1 ч (30 ядер)

В первых двух задачах симметричная структура течения характеризуется отсутствием зон закрученности вихревых линий (нулевой спиральностью), и модель DVM-3D описывает истинную диффузионную скорость без каких-либо допущений. Результаты расчёта вихревым методом хорошо согласуются с аналитическим решением задачи о диффузии вихря Лэмба — Озенна (интегральная

ошибка распределения завихренности не превышает 2.8%), а также с результатами расчёта вихревого кольца без учета адвекции по модели КР (ошибка не более 3.1%). Моделирование кольца с учётом адвекции согласуется с сеточным методом (ошибка не более 7.7%), причём оба расчёта выявляют некоторые отличия в эволюции кольца при сравнении с моделью КР.

В отличие от первых двух модельных задач эллиптическое вихревое кольцо является собой пример трёхмерного течения и обладает зонами ненулевой спиральности завихренности. Это позволяет использовать данную вихревую структуру для проверки корректности допущения об отсутствии спиральности, вносимого моделью вязкости DVM-3D.

На Рис. 3 показаны формы эллипса в процессе эволюции в вязкой жидкости в боковой проекции для заданных моментов времени при сравнении расчётов разработанным вихревым методом (слева) и сеточным МКО (середина) с экспериментом DPIV (справа). Результаты качественно согласуются друг с другом. В процессе эволюции наблюдается постепенная смена полуосей, которая сопровождается выходом эллипса из плоскости, что видно на боковой проекции. Помимо этого заметно увеличение толщины трубы эллипса, связанное с вязкой диффузией.

На Рис. 4–6 приведены профили завихренности, скорости и модуля аналога диффузионной скорости в сечении эллипса вдоль его большой полуоси в сравнении расчётов вихревым методом (красный) и в пакете OpenFOAM (зелёный). Профили завихренности и скорости качественно похожи, но количественное сравнение выявляет более заметные отличия, чем в первых двух задачах с плоской и осевой симметрией. Относительные отклонения профилей завихренности, скорости, и диффузионной скорости между расчётами МВП и OpenFOAM (Таблица 2) к моменту $t = 24$ достигают значений 50% для профиля скорости, и уже для $t = 9$ имеют значения 76% при сопоставлении профилей V_d .

Таблица 2. Относительная погрешность моделирования эллиптического вихревого кольца, при сравнении МВП и МКО (OF), вычисленная по норме L_{1h}

	Момент времени t							
	0	2	9	14	19	24	29	44
$\delta\omega$	0.015	0.089	0.191	0.210	0.292	0.309	0.363	0.284
δV	0.009	0.071	0.168	0.224	0.309	0.503	0.747	0.296
δV_d	0.065	0.0261	0.760	0.463	0.605	0.307	0.545	0.329

На Рис. 7 представлены графики функции $y_c(t)$ — изменения длины большой полуоси эллиптического кольца от времени t . Видно, что добавление модели вязкости позволяет существенно точнее моделировать динамику вихревого эллиптического кольца, чем при расчёте в невязкой постановке, что подтверждается сравнением с экспериментом. Относительное отклонение графиков расчёта вихревым методом от кривой, построенной по экспериментальным данным, составляет 11.3%, графиков расчёта вихревым и сеточным методом между собой — 3%.

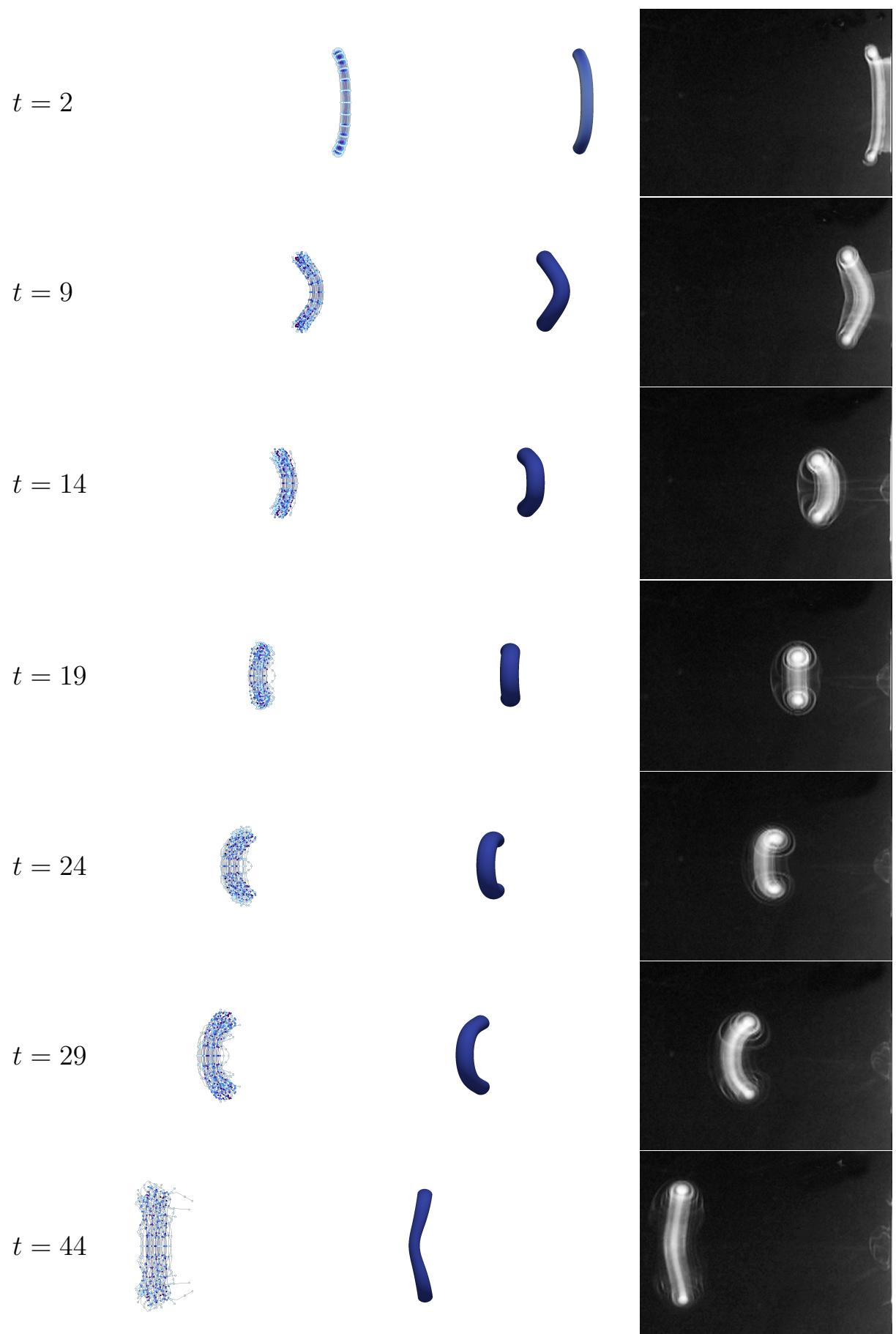


Рис. 3. Эволюция эллиптического вихревого кольца в боковой проекции. МВП (слева), расчёт в OF (в центре), эксперимент DPIV (D. Adhikari, 2009) (справа)

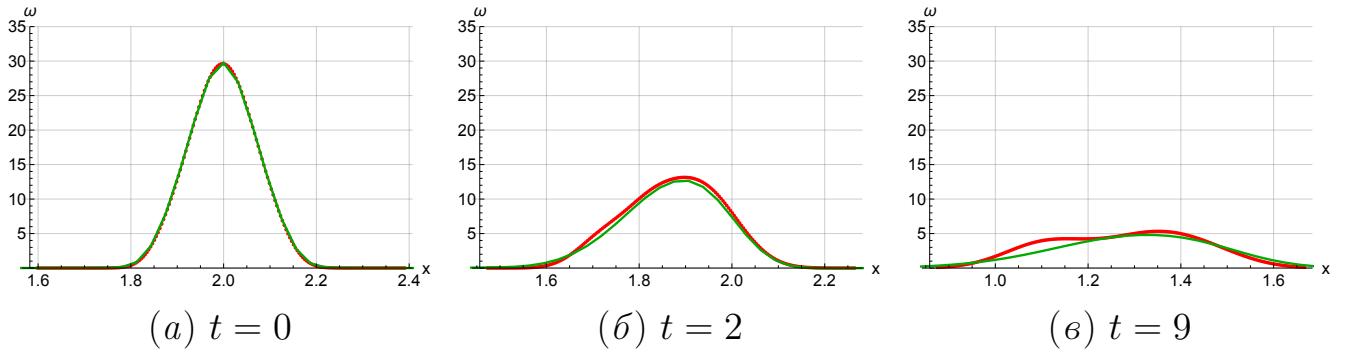


Рис. 4. Эволюция профиля завихренности эллиптического вихревого кольца (красная линия – вихревой метод; зеленая линия – OF)

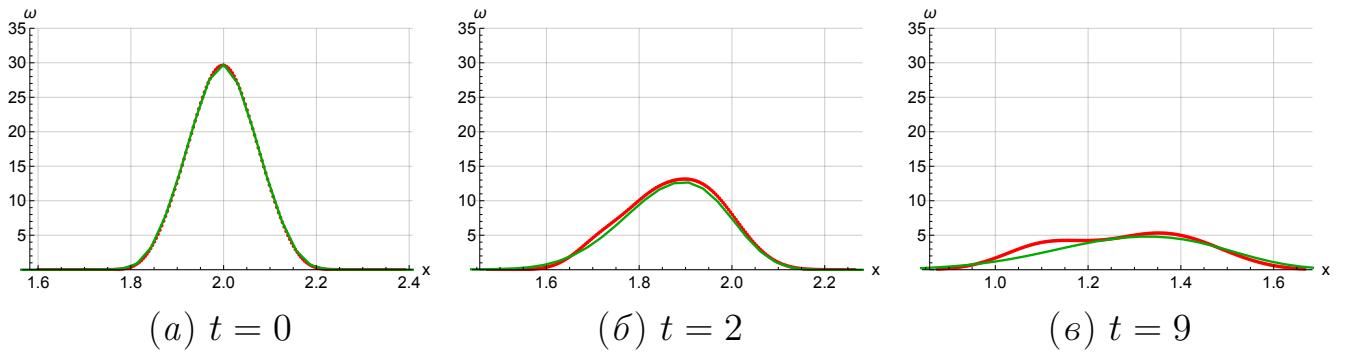


Рис. 5. Эволюция профиля скорости эллиптического вихревого кольца (красная линия – вихревой метод; зеленая линия – OF)

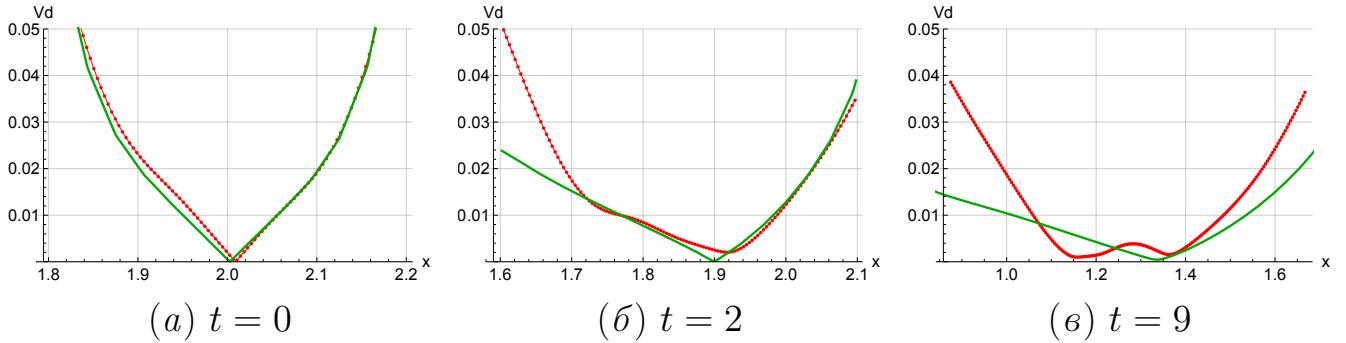


Рис. 6. Эволюция профиля диффузионной скорости эллиптического вихревого кольца (красная линия – вихревой метод; зеленая линия – OF)

Расчёт данной задачи вихревым методом в то же время характеризуется меньшими временными затратами по сравнению с сеточным методом: 2.8 ч против 183 ч в расчёте на 1 вычислительное ядро (см. таблицу 1).

В конце главы исследованы зоны ненулевой спиральности эллиптического кольца, которые образуются в процессе его движения. Результаты подтверждают, что в основном объёме кольца доминирует та часть диффузионного члена $\nu\Delta\omega$, которая разрешается с помощью аналога диффузионной скорости в рамках модели DVM-3D. Зона, где остаточная часть, связанная со спиральностью, сравнивается либо доминирует над первой частью, сосредоточена лишь в узкой области вокруг осевой линии эллиптического кольца. Этот результат подтверждает адекватность предлагаемой модели, по крайней мере, для сходного класса

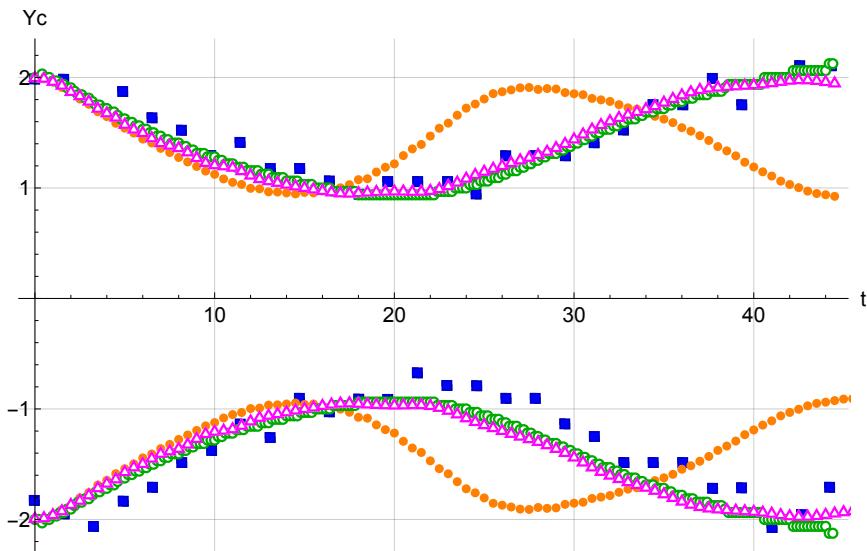


Рис. 7. Эволюция длины большой полуоси эллиптического кольца в зависимости от времени (розовая линия — вихревой метод; синие точки — эксперимент; зелёная линия — OF; оранжевая линия — вихревой метод без учёта вязкости)

са вихревых структур, не подверженных изменениям топологии типа разрывов и перезамыканий, и при сходных числах Рейнольдса.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Проведённый обзор существующих подходов к моделированию течений вязкой несжимаемой жидкости лагранжевыми вихревыми методами показал, что в рамках применения метода вихревых петель (МВП) не существует адекватной модели, позволяющей учитывать эффекты вязкой диффузии завихренности при моделировании пространственных течений без границ.

2. Проведено обобщение различных моделей лагранжевых вихревых элементов и построены математические модели вихревого отрезка и вихревой петли, для которых адаптированы известные методы учёта вязкости: метод обмена интенсивностей (PSE) и гибридный метод диффузионной скорости (DVM-PSE).

3. Показано, что в рамках МВП в моделях PSE и DVM-PSE возникает проблема «неколлинеарности», для решения которой предложен аналог метода диффузионной скорости, позволяющий моделировать плоские и осесимметричные течения без закрутки, а также пространственные течения общего вида в предположении об отсутствии спиральности завихренности.

4. Доказана теорема об интегральной аппроксимации дифференциальных операторов, на основании которой аппроксимированы производные различных порядков, входящие в расчётные формулы предлагаемой модели вязкости.

5. Создан программный комплекс для моделирования движения когерентных вихревых структур в вязкой несжимаемой жидкости в пространстве без границ. Для ускорения расчётов используется технология параллельного программирования MPI. Программный комплекс протестирован на решении модельных задач.

Основные результаты диссертации отражены в работах:

1. Коцур О.С. О развитии моделей вихревых элементов на примере расчета пространственного движения вихревых колец // Механика 2016: Труды межд. школы-конф. молодых ученых. Цахкадзор, Армения, 2016. С. 80–84. (0,31 п.л)
2. Коцур О.С. Моделирование вязких течений с использованием метода вихревых элементов // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Материалы V межд. конф. Цахкадзор, Армения, 2017. С. 97–98. (0,13 п.л)
3. Коцур О.С., Щеглов Г.А. Модели вязкости в методе вихревых элементов // Современные проблемы физико-математических наук: Материалы III Межд. науч.-практ. конф. Орел, 2017. С. 164–167. (0,25 п.л./0,13 п.л.)
4. Коцур О.С., Щеглов Г.А. Реализация метода обмена интенсивностями вортонов-отрезков для учета вязкости в методе вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2018. № 3. С. 48–67. (0,63 п.л./0,31 п.л.)
5. Kotsur O.S., Shcheglov G.A. Viscous fluid simulation with the vortex element method // 31st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences: Book of proc. Belo Horizonte, Brasil, 2018. P. 1–10. (0,63 п.л./0,31 п.л.)
6. Коцур О.С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85. (0,63 п.л.)
7. Kotsur O., Shcheglov G. Difficulties in implementation of viscosity models in the fragmenton-based vortex methods // 6th International Conference on Particle-Based Methods. Fundamentals and Applications: Book of proc. Barcelona, 2019. P. 579–589. (0,69 п.л./ 0,34 п.л.)
8. Коцур О.С. Модификация метода диффузионной скорости для моделирования вязких несжимаемых течений методом вихревых петель // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Материалы VII межд. конф. Цахкадзор, Армения, 2021. С. 145–149. (0,31 п.л)
9. Коцур О.С. Математическое моделирование эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости методом вихревых петель // Математика и математическое моделирование. 2021. № 3. С. 46–59. (0,88 п.л.)
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020619178. Программный комплекс VEM для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости методом вихревых элементов // О.С. Коцур, Г.А. Щеглов. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13.08.2020.

Научное издание

Коцур Олег Сергеевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук на тему:

Модификация метода вихревых петель для моделирования движения
вихревых структур в вязкой несжимаемой жидкости
и его программная реализация