

На правах рукописи

МАРЧЕВСКИЙ Илья Константинович

**РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ T-СХЕМ ЧИСЛЕННОГО
РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВИХРЕВЫХ МЕТОДОВ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



Москва — 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Научный консультант: доктор технических наук, доцент
Щеглов Георгий Александрович

Официальные оппоненты: **Дынникова Галина Яковлевна,**
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», ведущий научный сотрудник

Вышинский Виктор Викторович,
доктор технических наук, профессор, Государственный научный центр Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского», главный научный сотрудник

Модорский Владимир Яковлевич,
доктор технических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», декан аэрокосмического факультета

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

Защита состоится «__» _____ 2021 года в __ час. __ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при МГТУ им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Аttetков
Александр
Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Вихревые методы вычислительной гидродинамики, относящиеся к классу бессеточных лагранжевых методов, в которых первичной расчетной величиной является завихренность, — это мощный инструмент решения широкого класса задач, возникающих в инженерных приложениях и связанных с моделированием обтекания тел потоком несжимаемой среды и вычислением действующих на них нестационарных гидродинамических нагрузок. Алгоритмы моделирования внешнего обтекания с возможностью рассмотрения подвижных тел и решения задач в сопряженной постановке имеют сравнительно низкую вычислительную сложность по сравнению с сеточными методами. Метод вязких вихревых доменов (Г.Я. Дынникова) является одной из наиболее эффективных модификаций вихревых методов моделирования плоских течений вязкой несжимаемой среды и обтекания профилей, а метод замкнутых вихревых петель (S. Weissmann, U. Pinkall, Г.А. Щеглов, С.А. Дергачев) может быть использован для расчета пространственного обтекания тел. В указанных модификациях вихревых методов, а также в работах других российских (С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ, А.В. Сетуха, В.А. Апарин, С.В. Гувернюк, С.М. Каплунов, Н.Г. Вальес, М.А. Головкин, В.А. Головкин, В.М. Калявкин, Н.В. Корнев и др.) и зарубежных исследователей (P. Koumoutsakos, G.-H. Cottet, G. Winkelmans, G. Morgenthal, K. Kamemoto, L. Barba и др.), посвященных развитию и приложениям вихревых методов, для определения интенсивности свободного вихревого слоя или плотности потенциала двойного слоя, влиянием которых заменяется обтекаемая поверхность, используется математическая модель, выражаемая сингулярным или гиперсингулярным граничным интегральным уравнением (ГИУ) 1-го рода. При этом вопросы, связанные с разработкой численных методов решения таких уравнений, затрагиваются лишь вскользь. Данные вопросы исследованы в работах И.К. Лифанова и А.В. Сетухи, посвященных разработке и обоснованию указанных математических моделей, а также численных методов выделения главных значений сингулярных интегралов в смысле Коши или конечных частей гиперсингулярных интегралов в смысле Адамара. Тем не менее, разработанные к настоящему времени численные схемы решения соответствующих уравнений обеспечивают, как правило, сравнительно невысокую точность, особенно при использовании существенно неравномерных поверхностных сеток, что ограничивает точность вихревых методов в целом и затрудняет их использование при моделировании обтекания тел сложной формы, где для достижения высокого разрешения требуется сгущать поверхностную сетку.

В то же время в работах S.N. Kempka и соавторов указано на возможность рассмотрения эквивалентной математической модели, выражаемой ГИУ 2-го рода (T -модели). О возможности и перспективности использования T -модели упоминают в своих монографиях И.К. Лифанов, а также G.-H.Cottet и P.D. Koumoutsakos, однако систематических исследований в этой области до настоящего времени не проводилось. С учетом того, что ядро ГИУ в T -модели ограничено или абсолютно интегрируемо, для его решения можно применять широкий класс методов, поэтому разработка T -схем повышенной точности для численного решения ГИУ в математических моделях вихревых методов является актуальным направлением исследований.

Численное решение ГИУ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с заполненной матрицей, размерность которой может достигать десятков или даже сотен тысяч, поэтому непосредственное вычисление и хранение всех компонент матрицы едва ли возможно, и тем более невозможным становится использование прямых методов решения таких систем. Единственным способом решения указанных проблем является применение итерационных алгоритмов, основанных на использовании методов приближенного быстрого матрично-векторного умножения, к которым относятся метод Барнса — Хата (J. Barnes и P. Hut), метод мультиполей (L. Greengard и V. Rohlin), метод мозаично-скелетонных аппроксимаций (Е.Е. Тыртышников), метод преобразования Фурье (G. Morgenthal и J.H. Walther). Создание эффективных алгоритмов решения линейных систем, возникающих при применении разрабатываемых T -схем, не требующих явного вычисления всех компонент матрицы и имеющих линейную или квазилинейную вычислительную сложность также является актуальной задачей.

Наконец, до настоящего времени не известно программных реализаций современных модификаций вихревых методов, доступных широкому кругу исследователей и позволяющих эффективно решать соответствующие задачи. Поэтому разработка кроссплатформенных программных комплексов с открытым исходным кодом, реализующих наиболее эффективные модификации вихревых методов для решения плоских и пространственных задач и использующих современные технологии параллельных вычислений, также является актуальной задачей.

Объектом исследования в диссертации являются граничные интегральные уравнения, возникающие при математическом моделировании обтекания тел вихревыми методами.

Предметом исследования являются схемы численного решения граничных интегральных уравнений при моделировании плоского и пространственного обтекания тел вихревыми методами.

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка и программная реализация схем, основанных на удовлетворении граничного условия для касательной компоненты скорости (T -схем), применительно к численному решению граничных интегральных уравнений, возникающих в вихревых методах вычислительной гидродинамики.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач.**

1. Разработка T -схем для численного решения ГИУ, возникающих при моделировании обтекания профилей плоскопараллельным потоком несжимаемой среды, и оценка их точности.

2. Разработка T -схем для численного решения ГИУ, возникающих при моделировании пространственного обтекания тел потоком несжимаемой среды, и оценка их точности.

3. Разработка алгоритмов квазилинейной вычислительной сложности для решения СЛАУ, возникающих в результате применения T -схем.

4. Разработка программных комплексов, в которых T -схемы решения ГИУ внедрены в современные модификации вихревых методов для решения плоских и пространственных задач вычислительной гидромеханики.

Методы исследования. При решении указанных задач, использовались различные классы математических методов: бессеточные лагранжевы методы вычислительной гидродинамики, методы теории интегральных уравнений, вычислительной математики и параллельных вычислений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчетов с теоретическими оценками, известными аналитическими решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Исследована математическая модель обтекания профилей и тел потоком несжимаемой среды, в основу которой положен новый подход к понижению размерности векторного ГИУ, выражающего граничное условие для скорости среды на обтекаемой поверхности.

2. Для моделирования плоского обтекания профилей на основе метода Галеркина построены новые T -схемы различного порядка точности для численного решения ГИУ, новизна которых заключается в удовлетворении граничного условия для касательной компоненты скорости.

3. Для моделирования пространственного обтекания тел построена новая T -схема и разработан алгоритм восстановления потенциала двойного слоя для численного решения ГИУ, выражающего условие для касательной компоненты скорости.

4. Разработана новая модификация алгоритма Барнса — Хата для приближенного быстрого расчета скоростей, индуцируемых вихревыми частицами, основанная на использовании мультипольных и локальных разложений функции скорости повышенного порядка точности.

5. Для решения линейных систем, возникающих в результате применения новых T -схем, созданы итерационные алгоритмы квазилинейной вычислительной сложности, основанные на возможности быстрого матрично-векторного умножения.

6. Разработаны программные комплексы VM2D и VM3D, в которых созданные T -схемы и вычислительные алгоритмы использованы в реализации метода вязких вихревых доменов для моделирования плоского обтекания профилей и метода замкнутых вихревых петель для моделирования пространственного обтекания тел.

Практическая ценность полученных результатов состоит в возможности повышения точности математического моделирования плоского и пространственного обтекания тел путем применения разработанных T -схем для решения ГИУ и вычислительных алгоритмов на их основе в комплексах программ, реализующих вихревые методы вычислительной гидродинамики. Разработанные пакеты VM2D и VM3D представляют собой программные платформы для моделирования плоских и пространственных течений с использованием современных модификаций вихревых методов и позволяют решать широкий класс задач, в том числе в сопряженной постановке, с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур.

Положения, выносимые на защиту.

1. Семейство T -схем для решения граничного интегрального уравнения в плоских задачах моделирования обтекания профиля, обеспечивающих 1-й, 2-й и 3-й порядок точности при определении интенсивности вихревого слоя и восстановлении поля скоростей.

2. T -схема для решения граничного интегрального уравнения в пространственных задачах моделирования обтекания тела, а также алгоритм восстановления потенциала двойного слоя, которые обеспечивают существенное повышение точности и позволяют проводить расчеты на неравномерных неструктурированных поверхностных сетках.

3. Итерационные алгоритмы квазилинейной вычислительной сложности и новые модификации алгоритмов быстрого матрично-векторного умножения для решения линейных систем, возникающих в результате применения разработанных T -схем.

4. Программные комплексы VM2D и VM3D, в которых созданные T -схемы и алгоритмы использованы в реализациях численных методов вязких вихревых доменов и замкнутых вихревых петель.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Метод функций Ляпунова (Симферополь, 2004, 2010), Метод дискретных особенностей в задачах математической физики (Лазурное, 2005–2013), X, XI, XII и XIII Всероссийские съезды по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006, 2011; Казань, 2015; Уфа, 2019), Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках (Санкт-Петербург, 2007, 2017), Необратимые процессы в природе и технике (Москва, 2007–2017), Актуальные проблемы механики сплошной среды (Ростов-на-Дону, 2008, 2009, 2016), Algoritmy (Подбанске, 2009, 2016), Конференция по вычислительной гидродинамике «ICCFD» (Санкт-Петербург, 2010), Параллельные вычислительные технологии «ПаВТ» (2010–2020), Конгресс ECCOMAS по численным методам в механике (Вена, 2012), Advanced Problems in Mechanics (Санкт-Петербург, 2013–2015), Проблемы вычислительной и прикладной математики (Новосибирск, 2013–2020), Конгрессы ECFD по вычислительной гидродинамике (Барселона, 2014; Глазго, 2018), Coupled Problems (Венеция, 2015), Particles (2015–2019), Открытая конференция ИСП им. В.П.Иванникова РАН (Москва, 2015–2019), OpenFOAM Workshop (Гимарайнш, 2016; Эксетер, 2017), Конференция по вихревым методам «ICVFM» (Росток, 2016; Сиань, 2018), Finite Elements in Flows (Рим, 2017), Волны и вихри в сложных средах (Москва, 2017–2019), Методы аэрофизических исследований «ICMAR» (Новосибирск, 2018), Актуальные методы в задачах механики с подвижными границами (Крайстчерч, 2018), Симпозиум по методам граничных элементов «IABEM» (Париж, 2018), Королевские чтения (Москва, 2018–2020), Фундаментальные и прикладные задачи механики (Москва, 2018, 2020), Конференция по методу граничных элементов «BEM/MRM» (Коимбра, 2019), Topical Problems of Fluid Mechanics (Прага, 2019, 2020).

Результаты исследований неоднократно обсуждались на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. Сергея Михайловича и Олега Михайловича Белоцерковских под рук. А.И. Желанникова, В.В. Вышинского (ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, 2008–2019 гг.).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проводимых в рамках грантов Президента РФ МК-6482.2012.8, МК-3705.2014.8, МК-7431.2016.8, грантов РФФИ 11-08-00699, 17-08-01468, 18-31-20051, 20-08-01076, госзадания вузам 9.2422.2017, гранта РНФ 17-79-20445, проектов Минобрнауки РФ 0705-2020-0047, 075-15-2020-808.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы отражены в 75 научных работах, опубликованных в изданиях, индексируемых в библиографических базах данных Scopus и Web of Science, либо включенных в перечень ВАК РФ. Общий объем 56.0 п.л. / 30.0 п.л.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, выводов, и списка литературы. Работа изложена на 480 страницах, содержит 100 иллюстраций и 28 таблиц. Список литературы включает 300 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор литературы по вихревым методам, перечислены основные этапы их развития, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе рассмотрены математические модели обтекания профилей и тел, лежащие в основе вихревых методов расчета плоского ($d = 2$) и пространственного ($d = 3$) обтекания тел потоком несжимаемой среды.

В разделе 1.1 приведены необходимые сведения из теории потенциала (И.К. Лифанов, 1995), на основе которых могут быть построены известные и широко распространенные математические модели вихревых методов, выражаемые сингулярными ГИУ 1-го рода относительно интенсивности вихревого слоя на обтекаемой поверхности, интеграл в которых понимается в смысле главного значения по Коши,

$$\oint_K \left(\frac{\gamma(\xi) \times (\mathbf{r} - \xi)}{2\pi(d-1)|\mathbf{r} - \xi|^d} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \right) dS_\xi = f_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (1)$$

или гиперсингулярными ГИУ относительно плотности потенциала двойного слоя, где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару:

$$\oint_K \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\xi)} G(\mathbf{r} - \xi) g(\xi) dS_\xi = f_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (2)$$

где K — обтекаемая поверхность; $\gamma(\xi)$ — вектор интенсивности вихревого слоя; $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — орт внешней нормали к обтекаемой поверхности; $g(\xi)$ — плотность потенциала двойного слоя; $G(\xi)$ — логарифмический или ньютоновский потенциал; $f_n(\mathbf{r})$ — функция правой части, выражающая собой нормальную компоненту поля скоростей, являющегося суперпозицией скорости набегающего потока и влияния завихренности, находящейся в области течения, вычисляемого по закону Био — Савара (для простоты рассмотрен случай неподвижного профиля).

Условием единственности решения уравнения (1) в плоских задачах моделирования обтекания профилей является задание величины интеграла от решения $\oint_K \gamma(\xi) dl_\xi = \Gamma$, а в пространственных задачах — удовлетворение условию равенства нулю поверхностной дивергенции $\text{Div } \gamma(\xi) = 0$.

Решение ГИУ (1) лежит в основе расчета плоского обтекания профилей методом дискретных вихрей, а решение уравнения (2) — в основе расчета пространственного обтекания тел методом замкнутых вихревых рамок.

В разделе 1.2 описано обобщенное разложение Гельмгольца, позволяющее восстановить векторное поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ по известному распределению его дивергенции $D(\mathbf{r})$ и ротора $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ в области течения F , а также граничным значениям скорости $\mathbf{U}_K(\xi)$, $\xi \in K$, на обтекаемых поверхностях и скорости набегающего потока \mathbf{V}_∞ :

$$\alpha(\rho)\mathbf{V}(\rho) = \mathbf{V}_\infty + \int_F (\mathbf{\Omega}(\xi) \times \mathbf{Q}(\rho - \xi)) dV_\xi + \int_F D(\xi) \mathbf{Q}(\rho - \xi) dV_\xi + \oint_K ((\mathbf{n}(\xi) \times \mathbf{U}_K(\xi)) \times \mathbf{Q}(\rho - \xi)) dS_\xi + \oint_K (\mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{U}_K(\xi)) \mathbf{Q}(\rho - \xi) dS_\xi. \quad (3)$$

Здесь $\alpha(\rho)$ равно единице в области течения, нулю внутри обтекаемых поверхностей и $1/2$ на гладких участках поверхностей; $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ — взятый с обратным знаком градиент потенциала, $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{2\pi(d-1)|\mathbf{r}|^d}$.

В силу несжимаемости среды ($D(\mathbf{r}) = 0$) эволюцию поля завихренности $\mathbf{\Omega}(\rho)$ можно рассматривать как движение существующей завихренности с учетом потока завихренности с обтекаемой поверхности. Считая шаг расчета по времени малым и следуя известным оценкам (Дж.К. Бэтчелор, 1973), можно принять, что генерируемую вблизи поверхности за шаг по времени завихренность можно представить тонким вихревым слоем неизвестной интенсивности $\gamma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in K$. Тогда, записывая уравнение (3) на поверхности K , получаем для $\gamma(\mathbf{r})$ векторное ГИУ

$$\oint_K (\gamma(\xi) \times \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \xi)) dS_\xi - \alpha(\mathbf{r})(\gamma(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (4)$$

правая часть которого имеет вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r})\mathbf{U}_K(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_\infty - \int_F (\mathbf{\Omega}(\xi) \times \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \xi)) dV_\xi - \oint_K (\gamma^{\text{att}}(\xi) \times \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \xi)) dS_\xi - \oint_K q^{\text{att}}(\xi) \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \xi) dS_\xi, \quad (5)$$

где $\gamma^{\text{att}}(\xi) = \mathbf{n}(\xi) \times \mathbf{U}_K(\xi)$ и $q^{\text{att}}(\xi) = \mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{U}_K(\xi)$ имеют смысл интенсивностей слоев вихрей и источников, называемых «присоединенными», поскольку они определяются только скоростью движения поверхности.

Отметим, что уравнение (4) получено без дополнительных предположений относительно потенциальности поля скоростей в области течения, и поэтому может применяться при построении математических моделей вихревых методов для расчета течений вязкой жидкости.

Раздел 1.3 посвящен математическим моделям пониженной размерности при решении плоских задач. Известно утверждение (S.N. Kempka et al, 1996) о том, что ГИУ (4), выражающее условие прилипания, эквивалентно любому из уравнений, получающихся его проецированием на направление нормали или касательной к профилю. Скалярное сингулярное ГИУ 1-го рода, выражающее равенство нормальных компонент скорости, названное N -моделью, имеет вид

$$\oint_K \underbrace{(-\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}))}_{P_n(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})} \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}_{\hat{f}_n(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{r} \in K \quad (6)$$

и совпадает с уравнением (1) при $d = 2$.

Уравнение 2-го рода, выражающее равенство касательных компонент скоростей и названное T -моделью, имеет вид

$$\oint_K \underbrace{(\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}))}_{P_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})} \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi - \alpha(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})}_{\hat{f}_\tau(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{r} \in K. \quad (7)$$

Ядро $P_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$ в точках гладкости границы профиля является ограниченным; $|P_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})| \rightarrow \kappa(\mathbf{r})/(4\pi)$ при $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$, где $\kappa(\mathbf{r})$ — кривизна профиля. В окрестности угловых точек профиля ядро имеет слабую особенность и является абсолютно интегрируемым. Указанные свойства ядра позволяют разработать семейство численных схем различной степени точности для приближенного решения уравнения (7).

Для выделения единственного решения ГИУ (7), как и для уравнения (1), требуется задание величины интеграла от решения вдоль контура

$$\oint_K \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \Gamma, \quad (8)$$

поэтому на практике подлежит решению система ГИУ (7), (8).

В разделе 1.4 обсуждаются модели пониженной размерности при описании трехмерного обтекания тел. Интенсивность вихревого слоя $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$ является теперь двумерным векторным полем, заданным на поверхности, с нулевой нормальной компонентой.

Как и для случая плоских задач, возможно рассмотрение N -модели и T -модели. N -модель представляет собой сингулярное ГИУ, решение которого удовлетворяет условию $\text{Div } \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = 0$. Вместо него традиционно

рассматривают гиперсингулярное ГИУ относительно скалярной величины — плотности потенциала двойного слоя $g(\mathbf{r})$, которая связана с $\gamma(\mathbf{r})$ соотношением $\gamma(\mathbf{r}) = \text{Grad } g(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})$, где Grad означает оператор поверхностного градиента. Интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару, и для численного решения ГИУ могут быть использованы специальные схемы (КФ метода дискретных вихревых рамок), весьма требовательные к качеству поверхностных сеток, однако в любом случае обеспечивающие невысокую точность (И. К. Лифанов, 1995).

T -модель при решении пространственных задач представляет собой векторное ГИУ относительно двумерного распределения $\gamma(\mathbf{r})$

$$\oint_K \left(\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\gamma(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{4\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^3} \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) \right) \right) dS_{\boldsymbol{\xi}} - \alpha(\mathbf{r})(\gamma(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) = \mathbf{f}_\tau(\mathbf{r}), \quad (9)$$

в котором подынтегральное выражение имеет слабую (интегрируемую) особенность, а интеграл является несобственным, что и открывает путь к построению численных схем повышенной точности для его решения.

Уравнение (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\text{Div } \gamma(\mathbf{r}) = 0$, из которого следует равенство нулю интеграла от решения по поверхности тела. С учетом неизбежной погрешности условие бездивергентности решения в расчетах будет нарушено, поэтому одновременно со схемами решения ГИУ (9) требуется разработка процедуры коррекции решения T -модели. Для этого можно решить задачу восстановления плотности потенциала двойного слоя и затем вычислить ее поверхностный градиент, который будет обладать требуемым свойством.

Обзор литературы показывает, что сведение задачи, как в плоской, так и в пространственной постановке, к T -модели является актуальным направлением развития вихревых методов, однако до настоящего времени методов численного решения соответствующих ГИУ и реализующих их вычислительных алгоритмов не разработано. Их создание позволит существенно повысить точность решения задач при одновременном снижении требований к качеству дискретизации обтекаемой поверхности.

В разделе 1.5 описаны модельные задачи в двумерной и трехмерной постановке, для которых можно построить точные решения, необходимые для верификации разрабатываемых вычислительных алгоритмов.

В плоских задачах расчета обтекания профиля точные решения построены методом конформных отображений, применимым как для потенциального обтекания, так и при наличии завихренности в области течения, моделируемой точечными вихрями. Получены выражения для поля скоростей среды и интенсивности вихревого слоя для эллиптического профиля (гладкого), крылового профиля Жуковского (с точкой возврата) и обобщенного профиля Жуковского (с угловой точкой).

Для трехмерных задач не существует метода, аналогичного методу конформных отображений, поэтому в качестве модельных рассмотрены лишь простейшие задачи для случаев обтекания сферы потенциальным потоком и в присутствии соосного с ней вихревого кольца.

Вторая глава посвящена расчетным схемам для плоских задач моделирования обтекания профиля при аппроксимации его формы N -угольником, стороны которого (панели) являются прямолинейными отрезками.

В разделе 2.1 описана классическая расчетная схема метода дискретных вихрей \mathcal{N}^{MDV} , выражающая собой дискретный аналог N -модели. Вихревой слой с панелями профиля «стягивается» в точечные вихри, а выполнение ГИУ (6) обеспечивается в точках коллокации. Результирующая СЛАУ дополняется дискретным аналогом условия (8) и регуляризируется введением дополнительной переменной R (И. К. Лифанов, 1995):

$$\begin{pmatrix} [A^{MDV}] & \{I_N\} \\ \{I_N\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\Gamma^{(\gamma)}\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^{MDV}\} \\ \Gamma \end{pmatrix}.$$

Здесь $[A^{MDV}]$ — основной блок матрицы размером $N \times N$; $\{I_N\}$ — матрица-столбец из единиц; $\{\Gamma^{(\gamma)}\}$ — столбец искомых циркуляций вихревых элементов; $\{b^{MDV}\}$ — столбец правой части, компоненты которого выражают влияние скорости набегающего потока и завихренности в области течения; Γ — суммарная завихренность, содержащаяся в вихревом слое.

При расчете обтекания системы из N_p профилей требуется решение системы ГИУ, аналогичных (6), в левой части которых стоит сумма интегралов по профилям, которая дополняется N_p условиями выделения единственных решений вида (8). Матрица результирующей СЛАУ имеет блочную структуру, в связи с чем далее описание всех численных схем приводится для одиночного профиля, имея в виду возможность их переноса на более общий случай.

И.К. Лифановым доказано, что схема \mathcal{N}^{MDV} обеспечивает сходимость к точному решению с увеличением числа панелей, однако скорость сходимости может быть весьма невысокой.

Раздел 2.2 посвящен простейшему варианту T -схемы для численного решения системы ГИУ (7), (8). Применяя ту же схему дискретизации и удовлетворения уравнения в точках коллокации, что и в схеме \mathcal{N}^{MDV} , можно получить линейную систему аналогичной структуры

$$\begin{pmatrix} [A^{TMDV}] + [D^{TMDV}] & \{I_N\} \\ \{I_N\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\Gamma^{(\gamma)}\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^{TMDV}\} \\ \Gamma \end{pmatrix},$$

в которой появляется блок $[D^{TMDV}]$ — диагональная матрица, соответствующая внеинтегральному члену в уравнении (7).

Вычислительный эксперимент показывает, что для гладких профилей (круг, эллипс с соотношением осей 4 : 1) обе схемы \mathcal{N}^{MDV} и \mathcal{T}^{MDV} обеспечивают первый порядок точности для интенсивности вихревого слоя. Для крылового профиля Жуковского использование N -схемы \mathcal{N}^{MDV} приводит к значительной погрешности решения вблизи острой кромки, а скорость сходимости к точному решению оказывается значительно ниже линейной. В этой же задаче T -схема \mathcal{T}^{MDV} обеспечивает качественно более правильное разрешение интенсивности вихревого слоя и оказывается более точной по сравнению с N -схемой, хотя скорость сходимости также остается ниже линейной. Точность схемы \mathcal{T}^{MDV} существенно зависит от взаимных положений точек коллокации на верхней и нижней поверхностях профиля в окрестности кромки.

При моделировании обтекания тех же профилей при наличии вихревого элемента в области течения вблизи границы точность схем \mathcal{N}^{MDV} и \mathcal{T}^{MDV} снижается, однако общие тенденции остаются неизменными.

Полученные результаты показывают, что простой переход от N -модели к T -модели без изменения принципа построения дискретных аналогов ГИУ не позволяет значительно повысить точность численного решения, однако свойство интегрируемости ядра T -модели позволяет использовать для численного решения более точные схемы.

В разделе 2.3 описана более точная T -схема, в которой вихревой слой не стягивается в отдельные вихревые элементы, а считается распределенным с кусочно-постоянной (по панелям) интенсивностью. Удовлетворение уравнения (7) обеспечивается не в точках коллокации, а в среднем по панелям, что и приводит к решению СЛАУ вида

$$\begin{pmatrix} [A^{00}] + [D^{00}] & \{I_N\} \\ \{L\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma^0\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^0\} \\ \Gamma \end{pmatrix},$$

где $\{L\}$ — столбец из длин панелей; коэффициенты основного блока матрицы $[A^{00}]$ даются интегралами по двум панелям:

$$a_{ij}^{00} = \frac{1}{L_i} \int_{K_i} dl_r \int_{K_j} P_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) dl_\xi = \frac{1}{L_i} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{I}_{ij}^{00}), \quad (10)$$

где \mathbf{n}_i — орт внешней нормали к i -й панели,

$$\mathbf{I}_{ij}^{00} = \int_{K_i} dl_r \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dl_\xi, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}.$$

Все компоненты диагональной матрицы $[D^{00}]$ равны $(-1/2)$, компоненты столбца правой части суть интегралы от правой части ГИУ (7) по панелям:

$$b_i^0 = \frac{1}{L_i} \int_{L_i} f_\tau(\mathbf{r}) dl_r.$$

Правая часть учитывает влияние набегающего потока, завихренности в области течения и присоединенных слоев вихрей и источников, интенсивности которых отличны от нуля при рассмотрении движущегося или деформируемого профиля. Влияние последних вычисляется при помощи тех же интегралов \mathbf{I}_{ij}^{00} , что и в (10), для которых получены выражения в замкнутой форме для произвольно ориентированных панелей.

Предложенная T -схема обозначена как \mathcal{T}^0 ; относительно ее точности можно сделать следующие выводы: 1) для гладких профилей применение схемы \mathcal{T}^0 приводит к незначительному повышению точности по сравнению со схемой \mathcal{T}^{MDV} ; 2) эффект повышения точности усиливается для профилей с участками малого радиуса кривизны; 3) повышение точности существенно для профилей с угловыми точками: для крыла Жуковского в 6–8 раз по сравнению со схемой \mathcal{T}^{MDV} и в 10–50 раз в зависимости от степени дискретизации по сравнению со схемой \mathcal{N}^{MDV} ; 4) при наличии вихрей в области течения все тенденции сохраняются.

Резюмируя результаты, можно сделать вывод о предпочтительности схемы \mathcal{T}^0 , особенно для профилей с угловыми точками. При этом построение на основе этих же принципов схемы \mathcal{N}^0 для N -модели (6) не приводит к существенному повышению точности.

Раздел 2.4 посвящен описанию методики построения T -схем для численного решения ГИУ (7) на основе метода Галеркина. Решение представляется линейной комбинацией базисных функций, а коэффициенты разложения определяются из условия ортогональности невязки системе проекционных функций. Использование в качестве базисных дельта-функций и функций-индикаторов панелей приводит к схемам с точечными вихрями и кусочно-постоянным вихревым слоем соответственно. Использование этих же функций в качестве проекционных приводит к условию коллокаций или обеспечению удовлетворения ГИУ в среднем по панелям. Таким образом, в рамках указанного подхода можно как получить ранее обсуждавшиеся схемы \mathcal{T}^{MDV} и \mathcal{T}^0 , так и построить схему повышенной точности \mathcal{T}^1 .

В разделе 2.5 представлены все необходимые соотношения для расчетной схемы \mathcal{T}^1 , в которой интенсивность вихревого слоя на панелях полагается кусочно-линейной. Для этого введены два семейства базисных функций: $\varphi_i^0(\mathbf{r})$ — функции-индикаторы панелей и $\varphi_i^1(\mathbf{r})$ — линейные функции с нулевым средним и единичной вариацией, каждая из которых отлична от нуля только на i -й панели. Они же рассматриваются в качестве проекционных. Результирующая СЛАУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} [A^{00}] + [D^{00}] & [A^{01}] & \{I_N\} \\ [A^{10}] & [A^{11}] + [D^{11}] & \{O_N\} \\ \{L^0\}^\top & \{L^1\}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^1\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^0\} \\ \{b^1\} \\ \Gamma \end{pmatrix},$$

где все коэффициенты блоков $[A^{pq}]$ выражены через интегралы \mathbf{I}_{ij}^{pq} , а компоненты блоков-столбцов $\{b^p\}$ — через них же и интегралы $\mathbf{I}_j^q(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{I}_{ij}^{pq} = \int_{K_i} \varphi_i^p(\mathbf{r}) \mathbf{I}_j^q(\mathbf{r}) dl_r, \quad \mathbf{I}_j^q(\mathbf{r}) = \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi, \quad p, q = 0, 1,$$

для которых получены аналитические выражения в замкнутой форме.

Использование схемы \mathcal{T}^1 приводит к решению линейной системы с удвоенным числом неизвестных величин, однако позволяет во всех модельных задачах обеспечить *2-й порядок точности решения* — как для гладких, так и для крыловых профилей с острой кромкой.

В Таблице 1 приведено число панелей, на которые требуется разбить эллиптические профили для достижения относительной ошибки $\delta\gamma = 10^{-3}$ и $\delta\gamma = 10^{-4}$ в схемах \mathcal{T}^0 и \mathcal{T}^1 . Вместе с равномерным рассмотрено квазиравномерное разбиение профиля, когда длина панелей уменьшается при приближении к большой оси.

Таблица 1.

Количество панелей профиля, необходимое для достижения точности $\delta\gamma$ для схем \mathcal{T}^0 и \mathcal{T}^1 при обтекании эллипсов

Полуоси эллипса	$\delta\gamma = 10^{-3}$		$\delta\gamma = 10^{-4}$	
	Схема \mathcal{T}^0	Схема \mathcal{T}^1	Схема \mathcal{T}^0	Схема \mathcal{T}^1
Равномерное разбиение				
2:1	1 600	100	16 100	320
4:1	2 400	250	23 400	800
10:1	5 300	920	51 800	3 100
Квазиравномерное разбиение				
2:1	1 500	65	14 600	200
4:1	1 800	90	17 500	300
10:1	2 400	150	23 800	470

Несмотря на высокую точность схемы \mathcal{T}^1 при определении интенсивности вихревого слоя, установлено, что она обеспечивает лишь *1-й порядок точности восстановления поля скоростей вблизи границы профиля*. Обеспечить *2-й порядок точности* невозможно, поскольку решающий вклад в величину погрешности вносят «искусственные» угловые точки, образующиеся между прямолинейными панелями.

В разделе 2.6 описаны варианты экономичных расчетных схем, сочетающих размерность системы в схеме \mathcal{T}^0 (равную числу панелей) со вторым порядком точности, обеспечиваемым схемой \mathcal{T}^1 . Это возможно благодаря дополнительному условию непрерывности решения и введения в качестве базисных и проекционных функций формы 1-го порядка метода конечных элементов.

Для профилей с угловыми точками или острыми кромками предложена экономичная схема с выделением разрывов решения в соответствующих узлах за счет увеличения количества неизвестных на число разрывов.

Раздел 2.7 посвящен задачам для профилей с угловыми точками и кромками в случаях, когда их обтекание не является плавным, и решение интегрального уравнения (7) вблизи угловой точки неограничено. Характер (слабой) особенности решения определяется величиной угла, при этом асимптотика решения известна: $\gamma(\rho) \sim \rho^{-\mu}$, где ρ — расстояние до угловой точки; $\mu = 1 - \pi/\chi$, χ — величина внешнего угла.

При этом использование наиболее точной из ранее рассмотренных схем \mathcal{T}^1 приводит к значительной погрешности решения на примыкающей к кромке панели, поскольку, фактически, производится попытка приближения неограниченно возрастающей функции линейной функцией.

Для указанных задач на основе схемы \mathcal{T}^1 разработана схема \mathcal{T}_a^1 , в которой линейные базисные функции $\varphi_i^1(\mathbf{r})$ на паре панелей, примыкающих к кромке, заменены функциями вида $\varphi_i^a(\mathbf{r}) = \alpha_i \rho^{-\mu} + \beta_i$, где α_i — размерная константа, β_i обеспечивает ортогональность функции $\varphi_i^0(\mathbf{r})$. Проекционные функции остаются неизменными. Компоненты соответствующих столбцов матрицы СЛАУ в этом случае даются интегралами от неполной бета-функции Эйлера, вычислимыми в замкнутой форме, если величина угла χ есть рациональная доля числа π .

Результат решения модельной задачи для обобщенного профиля Жуковского с конечным углом у кромки приведен на Рис. 1.

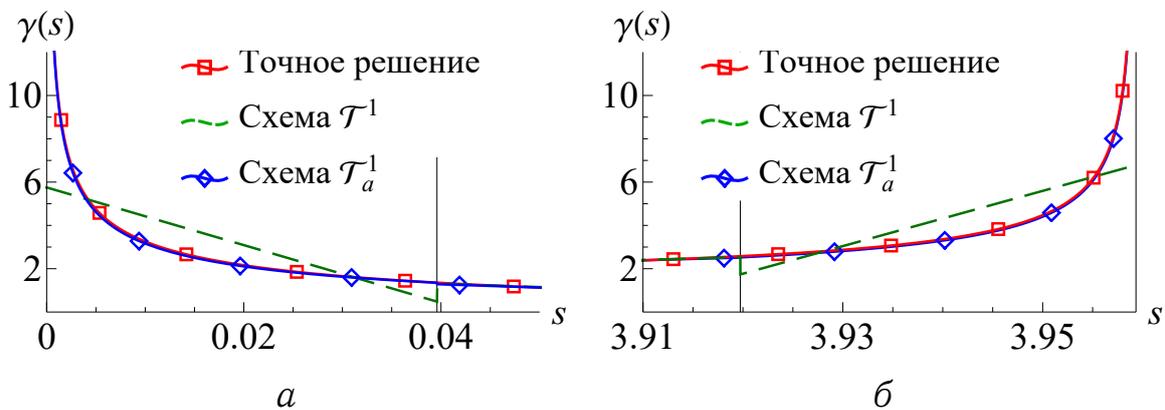


Рис. 1. Интенсивность вихревого слоя на первой (а) и последней (б) панели профиля Жуковского в зависимости от длины дуги

Третья глава посвящена построению T -схем повышенной точности для решения плоских задач с явным учетом кривизны обтекаемого профиля.

В разделе 3.1 исследованы ограничения T -схем с прямолинейными панелями; указано, что при аппроксимации профиля многоугольником обеспечить дальнейшее повышение точности численного решения

невозможно, и на примере модельной задачи для эллиптического профиля показано, что для сохранения приемлемого уровня погрешности длины соседних панелей не должны отличаться более, чем в 2 раза. При этом более точная схема \mathcal{T}^1 оказывается более «чувствительной» к существенной неравномерности дискретизации границы профиля, чем схема \mathcal{T}^0 . Для повышения точности решения ГИУ, а также точности восстановления поля скоростей в области течения вблизи профиля следует рассматривать аппроксимацию профиля криволинейными панелями.

Раздел 3.2 посвящен методике построения T -схем с помощью метода Галеркина при учете криволинейности панелей. Общий принцип остается прежним, однако существенным теперь является то, что орты касательной и нормали к панелям не являются постоянными.

Рассмотрение системы базисных и проекционных функций, включающих кусочно-постоянные, кусочно-линейные и кусочно-квадратичные функции, позволяет построить схему \mathcal{T}^2 , характеризуемую СЛАУ вида

$$\begin{pmatrix} [A^{00}] + [D^{00}] & [A^{01}] & [A^{02}] & \{I_N\} \\ [A^{10}] & [A^{11}] + [D^{11}] & [A^{12}] & \{O_N\} \\ [A^{20}] & [A^{21}] & [A^{22}] + [D^{22}] & \{O_N\} \\ \{L_N\}^T & \{O_N\}^T & \{O_N\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^1\} \\ \{\gamma^2\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^0\} \\ \{b^1\} \\ \{b^2\} \\ \Gamma \end{pmatrix}.$$

В разделе 3.3 для схемы \mathcal{T}^2 приведены расчетные формулы для компонент матрицы и столбца правой части, которые теперь не могут быть вычислены точно. При вычислении компонент блоков $[A^{pq}]$ требуется использовать отдельные алгоритмы для расчета самовлияния панелей, взаимного влияния соседних панелей и влияния панелей, не имеющих общих точек. Для корректной работы с квадратичными базисными функциями в приближенных выражениях для компонент блоков матрицы требуется удерживать слагаемые до третьего порядка включительно по малому параметру — длине соответствующей панели.

Возможно также рассмотрение T -схем \mathcal{T}_c^1 и \mathcal{T}_c^0 с кусочно-линейным и кусочно-постоянным представлением решения, соответствующие им матрицы получаются из матрицы схемы \mathcal{T}^2 исключением соответствующих блоков при одновременном упрощении расчетных формул, поскольку теперь требуется удерживать меньшее число членов в разложениях.

Результаты решения модельных задач показывают, что учет криволинейности панелей позволяет без заметной потери точности работать с существенно неравномерным разбиением профиля (когда соседние панели значительно различаются по длине), а построенные схемы \mathcal{T}_c^0 , \mathcal{T}_c^1 и \mathcal{T}^2 обеспечивают 1-й, 2-й и 3-й порядок точности как при определении интенсивности вихревого слоя на профиле, так и при восстановлении поля скоростей в области течения вблизи профиля.

В Таблице 2 приведено количество панелей, на которые требуется разбить эллиптические профили с различным отношением полуосей для достижения относительной ошибки $\delta\gamma = 10^{-3}$ и $\delta\gamma = 10^{-4}$ при использовании численных схем \mathcal{T}_c^0 , \mathcal{T}_c^1 и \mathcal{T}^2 .

Таблица 2.

Количество панелей эллиптического профиля, необходимое для достижения точности $\delta\gamma$ для схем \mathcal{T}_c^0 , \mathcal{T}_c^1 и \mathcal{T}^2

Полуоси эллипса	$\delta\gamma = 10^{-3}$			$\delta\gamma = 10^{-4}$		
	схема \mathcal{T}_c^0	схема \mathcal{T}_c^1	схема \mathcal{T}^2	схема \mathcal{T}_c^0	схема \mathcal{T}_c^1	схема \mathcal{T}^2
Равномерное разбиение						
2:1	1 600	60	30	16 000	170	60
4:1	2 600	120	90	25 500	380	170
10:1	5 100	520	480	50 000	1 400	780
Квазиравномерное разбиение						
2:1	1 500	50	25	14 600	150	50
4:1	1 800	70	40	17 500	210	80
10:1	2 400	120	80	23 800	360	150

В разделе 3.4 описаны экономичные \mathcal{T} -схемы для моделирования обтекания профиля, аппроксимируемого криволинейными панелями. В основу их построения, как и ранее, положено предположение о непрерывности решения. Построен экономичный вариант схемы \mathcal{T}_c^1 , для которого размерность матрицы равна количеству панелей, и экономичный вариант схемы \mathcal{T}^2 , в которой количество неизвестных вдвое больше числа панелей. В случае, когда решение ГИУ является гладким, экономичные схемы обеспечивают точность, сравнимую с точностью исходных схем.

Раздел 3.5 посвящен решению проблемы корректного учета влияния вихревых частиц, расположенных в области течения вблизи границы профиля. Влияние таких вихрей существенно для 1–3 панелей, расположенных к ним ближе всего, а вносимый ими вклад в решение является быстро изменяющейся функцией, которая не может быть приближена с высокой точностью комбинацией базисных функций.

Чтобы избежать чрезвычайно мелкой дискретизации профиля, предложена полуаналитическая процедура коррекции: решение на близлежащих к вихревой частице панелях представляется суммой явно задаваемой функции $\tilde{\gamma}(s)$ и комбинации базисных функций. Функция $\tilde{\gamma}(s)$ соответствует точному решению задачи на дуге профиля, представляющего собой окружность, соприкасающуюся с рассматриваемой панелью. Матрица СЛАУ остается неизменной, компоненты столбца правой части подвергаются коррекции путем добавления необходимых слагаемых, для которых получены приближенные аналитические выражения.

Алгоритм коррекции решения обеспечивает тем более высокую точность, чем ближе к границе профиля располагается вихревая частица, если же коррекцию не выполнять, то ошибка будет, наоборот, нарастать.

На Рис. 2 показаны результаты решения модельной задачи для эллиптического профиля при наличии вихря при использовании схем без коррекции и с коррекцией (на трех панелях) численного решения.

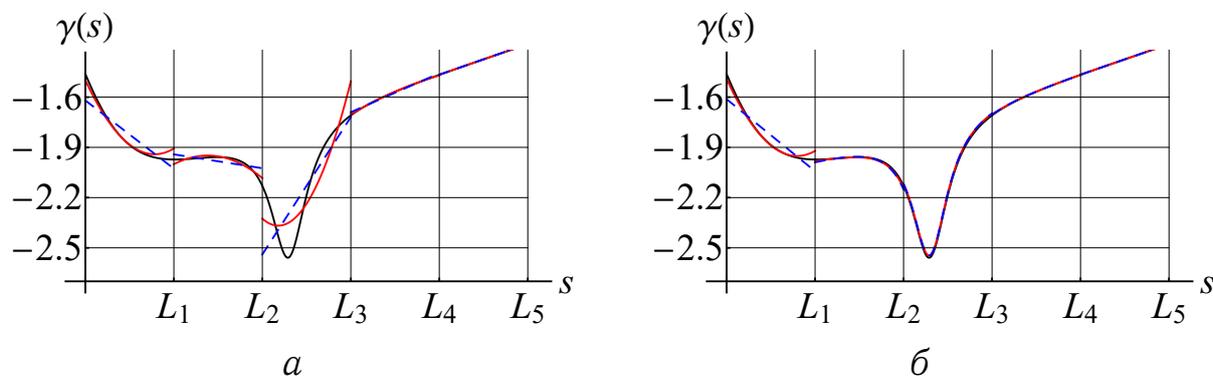


Рис. 2. Точное решение (черная линия), кусочно-линейное (схема \mathcal{T}_c^1 , синяя штриховая линия) и кусочно-квадратичное (схема \mathcal{T}^2 красная линия) решение при наличии вихря на расстоянии 25 % длины панели без коррекции (а) и с коррекцией (б)

При выполнении разработанной процедуры коррекции решения практически исчезает разница между результатом применения схем \mathcal{T}_c^1 и \mathcal{T}^2 , и использование первой представляется предпочтительным в силу меньшей размерности матрицы и упрощения алгоритма вычисления ее компонент. Коррекцию целесообразно проводить, когда расстояние от вихря до профиля меньше длины одной панели.

Четвертая глава посвящена разработке \mathcal{T} -схемы для моделирования пространственного обтекания тел, т. е. решению граничного интегрального уравнения (9) относительно неизвестной векторной величины $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$.

В разделе 4.1 описана процедура метода Галеркина применительно к решению векторного уравнения (9). Поверхность тела считается триангулированной, а неизвестная интенсивность вихревого слоя — постоянным вектором на каждой панели, лежащим в плоскости панели. Дискретный аналог интегрального уравнения представляет собой систему линейных уравнений, выражающую его удовлетворение в среднем на каждой панели. Для этого на панелях вводится правый репер $(\boldsymbol{\tau}_i^{(1)}, \boldsymbol{\tau}_i^{(2)}, \mathbf{n}_i)$, в котором направление одного из касательных векторов выбирается произвольно, и искомые векторные величины интенсивности вихревого слоя представляются в виде разложения по базису из двух касательных ортов. Результирующая система дополняется условием равенства нулю интеграла от завихренности по поверхности и имеет вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_i^{(1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^{(1)} \boldsymbol{\nu}_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^{(2)} \boldsymbol{\nu}_{ij}^{(2)} \right) - \frac{\gamma_i^{(2)}}{2} - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i^{(2)} = b_i^{(1)}, \\ \boldsymbol{\tau}_i^{(2)} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^{(1)} \boldsymbol{\nu}_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^{(2)} \boldsymbol{\nu}_{ij}^{(2)} \right) + \frac{\gamma_i^{(1)}}{2} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i^{(1)} = b_i^{(2)}, \\ \sum_{j=1}^N A_j \left(\gamma_j^{(1)} \boldsymbol{\tau}_j^{(1)} + \gamma_j^{(2)} \boldsymbol{\tau}_j^{(2)} \right) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\gamma_i^{(1)}$, $\gamma_i^{(2)}$ — искомые коэффициенты разложения; A_i — площадь панели; \mathbf{R} — регуляризирующая переменная в виде трехмерного вектора; компоненты матрицы и правой части выражаются интегралами по панелям:

$$\boldsymbol{\nu}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{A_i} \boldsymbol{\tau}_j^{(k)} \times \int_{K_j} \left(\int_{K_j} \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{4\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_\xi \right) dS_r, \quad b_i^{(k)} = \frac{1}{A_i} \int_{K_i} \boldsymbol{\tau}_i^{(k)} \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi.$$

Раздел 4.2 посвящен вычислению векторных коэффициентов

$$\mathbf{I}_{ij} = - \int_{K_i} \left(\int_{K_j} \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{4\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_\xi \right) dS_r = \int_{K_i} \mathbf{J}_j(\mathbf{r}) dS_r,$$

зная которые можно вычислить компоненты матрицы и столбца правой части СЛАУ. Внутренний интеграл $\mathbf{J}_j(\mathbf{r})$ может быть вычислен точно для произвольной формы панели K_j и любого положения точки \mathbf{r} . Внешний интеграл по панели K_i в элементарных функциях вычислить не удастся; для его приближенного вычисления рассмотрены отдельные случаи:

- если панели K_i и K_j не имеют общих точек, то интеграл по K_i находится численно интегрированием $\mathbf{J}_j(\mathbf{r})$ по КФ Гаусса;
- если панели K_i и K_j имеют общее ребро или вершину, $\mathbf{J}_j(\mathbf{r})$ неограничена, но интегрируема и представима в виде $\mathbf{J}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_j(\mathbf{r})^{reg} + \mathbf{J}_j(\mathbf{r})^{sing}$, где регулярная часть — гладкая ограниченная функция, интегрируемая численно, а сингулярная часть интегрируется аналитически.

В разделе 4.3 получены расчетные формулы, выражающие вклад в столбец правой части системы от влияния завихренности в области течения, которая представлена в виде системы замкнутых вихревых колец. Данное влияние выражено интегралами вдоль вихревых отрезков от ранее введенных величин $\mathbf{J}_j(\mathbf{r})$, которые определяются численно.

В разделе 4.4 разработана процедура коррекции решения СЛАУ, обеспечивающая бездивергентность интенсивности вихревого слоя, предполагающая восстановление плотности потенциала двойного слоя $g(\mathbf{r})$ на поверхности в виде непрерывного кусочно-линейного распределения,

узловые значения которого находятся методом наименьших квадратов. Величина $\gamma(\mathbf{r}) = -\text{Grad } g(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})$, являясь кусочно-постоянной по панелям, дает требуемое распределение интенсивности вихревого слоя. Линии уровня функции $g(\mathbf{r})$ определяют положения вихревых петель на поверхности при моделировании нестационарного обтекания тел.

Раздел 4.5 посвящен верификации разработанной T -схемы и остальных процедур. Показано, что даже для поверхностных сеток низкого качества погрешность вычисления коэффициентов \mathbf{I}_{ij} не превышает 0.2%. T -схема обеспечивает второй порядок точности восстановления плотности потенциала двойного слоя и оказывается в 10 раз точнее N -схемы, как на равномерных, так и на неравномерных сетках, а также при наличии завихренности в области течения. На Рис. 3 показаны линии уровня плотности потенциала двойного слоя на модели крыла конечного размаха под углом атаки 5° . Поверхностная сетка является неравномерной и состоит из $N \approx 7000$ треугольных ячеек.

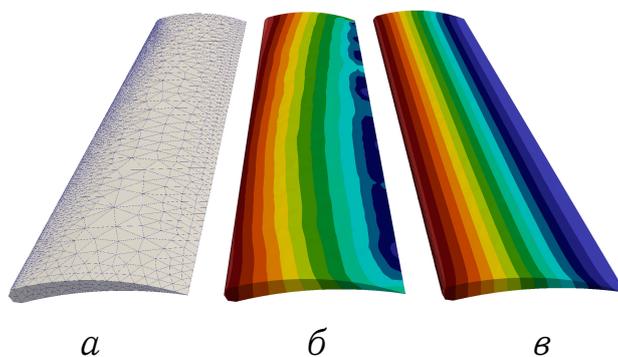


Рис. 3. Поверхностная сетка (а), линии уровня потенциала двойного слоя, построенные с помощью N -схемы (б) и T -схемы (в)

Установлено, что на расстоянии порядка размера панели и более N -схема и T -схема обеспечивают сравнимую точность восстановления поля скоростей, однако на меньших расстояниях T -схема оказывается многократно точнее; при измельчении сетки погрешность на том же расстоянии (измеряемом в долях размера панели) в T -схеме быстро убывает, тогда как в N -схеме сходимости нет и даже имеет место рост ошибки.

В пятой главе на основе известного метода Барнса — Хата разработан алгоритм квазилинейной вычислительной сложности для расчета парных взаимодействий вихревых частиц, обладающий повышенной точностью и подходящий для решения плоских и пространственных задач.

В разделе 5.1 обсуждаются проблемы, возникающие при непосредственном применении разработанных T -схем: матрица СЛАУ является заполненной и не обладает свойствами симметрии и положительной определенности. В зависимости от постановки задачи может требоваться однократное или многократное решение системы, при этом матрица может

меняться от шага к шагу. Прямое решение методом Гаусса, имеющим сложность $O(N^3)$, затруднительно для СЛАУ большой размерности (порядка десятков тысяч), которая в двумерных задачах возникает обычно при рассмотрении большого числа профилей. В трехмерных задачах трудности возникают даже для одиночного тела сложной формы. Итерационные методы позволяют снизить сложность до $O(N^2)$, но не снимают проблемы вычисления всех $O(N^2)$ компонент матрицы и ее хранения, что может требовать десятков гигабайт памяти.

Решить обозначенные проблемы можно путем использования приближенных быстрых алгоритмов матрично-векторного умножения, имеющих квазилинейную вычислительную сложность $O(N \log^\alpha N \log \varepsilon^{-1})$ при итерационном решении СЛАУ, где $\alpha \geq 0$ и может быть различным для разных методов, ε — параметр, отвечающий за точность.

В разделе 5.2 обсуждается классический алгоритм Барнса — Хата для решения задачи N тел, основанный на замене влияния далеко расположенного кластера тел влиянием их центра масс, и описана его модификация (Г.Я. Дынникова, 2009) для расчета конвективных скоростей вихревых частиц в двумерных задачах. При заданном уровне точности ε вычислительная сложность алгоритма составляет $O(N \log N)$.

В разделе 5.3 описана методика совместного использования модификации метода Барнса — Хата с наиболее простой (и наименее точной) схемой \mathcal{T}^{MDV} , в которой завихренность на панели стягивается в точечный вихрь и выполняется условие коллокаций в контрольных точках.

Раздел 5.4 посвящен изучению возможности использования вышеупомянутой модификации метода Барнса — Хата совместно с \mathcal{T} -схемами повышенной точности. Описаны «гибридные» схемы, в которых при численном решении ГИУ распределение завихренности по панелям и интегральный характер удовлетворения граничного условия учитываются лишь в ближней зоне каждой панели, а в дальней зоне фактически используется схема \mathcal{T}^{MDV} совместно с быстрым алгоритмом. Такой подход оказывается эффективным при использовании схемы \mathcal{T}^0 с кусочно-постоянным представлением решения (которая в общем случае оказывается ненамного точнее схемы \mathcal{T}^{MDV}), однако попытка его применения совместно с существенно более точной схемой \mathcal{T}^1 не позволяет обеспечить соизмеримую точность при квазилинейной вычислительной сложности.

Существенным недостатком обсуждаемого быстрого алгоритма является также невозможность его обобщения на трехмерные задачи.

В разделе 5.5 предложена новая модификация быстрого алгоритма на основе совмещения идей метода Барнса — Хата и метода мультипольных разложений. Преимуществом такого подхода является возможность его использования при решении трехмерных задач вихревыми методами,

а также потенциал повышения эффективности за счет уточнения расчета влияния дальней зоны. Описан общий подход к расчету конвективных скоростей вихревых частиц, в соответствии с которым функция влияния кластера частиц заменяется несколькими членами ее мультипольного разложения — по отрицательным степеням расстояния до кластера. Точки вычисления влияния также группируются (в контрольные кластеры), и вместо расчета влияния в каждой точке вычисляются коэффициенты локального разложения — по степеням расстояния до точек от центра контрольного кластера (Рис. 4). Последнее затем используется для получения окончательных результатов.

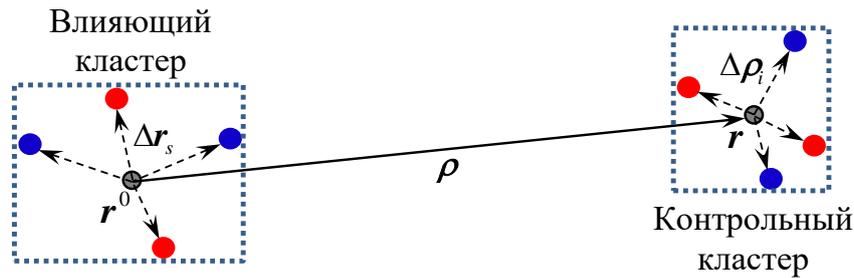


Рис. 4. Схема объединения вихревых частиц в кластеры

Количество членов мультипольных и локальных разложений следует выбирать согласованно, как указано в Таблице, строки I...IV которой соответствуют вариантам быстрого метода различной точности. Числа в таблице соответствуют порядкам локальных разложений мультипольных слагаемых; «0*» означает, что слагаемое следует удерживать в случае влияющих кластеров большого размера; прочерк указывает на то, что слагаемое вычислять не нужно.

	\mathbf{V}^m	\mathbf{V}^d	\mathbf{V}^q	\mathbf{V}^o	\mathbf{V}^h	
I	0	0*	—	—	—	<u>Слагаемые:</u> \mathbf{V}^m — монопольное, $ \mathbf{V}^m \sim \rho^{-(d-1)}$ \mathbf{V}^d — дипольное, $ \mathbf{V}^d \sim \rho^{-d}$ \mathbf{V}^q — квадрупольное, $ \mathbf{V}^q \sim \rho^{-(d+1)}$ \mathbf{V}^o — октупольное, $ \mathbf{V}^o \sim \rho^{-(d+2)}$ \mathbf{V}^h — гексадекапольное, $ \mathbf{V}^h \sim \rho^{-(d+3)}$
II	1	0	0*	—	—	
III	2	1	0	0*	—	
IV	3	2	1	0	0*	

В разделе 5.6 получены все необходимые выражения для мультипольных слагаемых и их локальных разложений при решении двумерных задач. Разложение функции влияния кластера вихревых частиц с удержанием пяти мультипольных слагаемых имеет вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{k}}{2\pi} \times \left(\Theta^m m^m + \hat{\Theta}^d \cdot m^d + \frac{1}{2} \Theta^q \cdot \hat{m}^q + \frac{1}{6} \Theta^o \cdot \underline{m}^o + \frac{1}{24} \tilde{\Theta}^h \cdot \underline{\underline{m}}^h \right),$$

где коэффициенты $\overline{\Theta}^{(p)}$ — тензоры 1–5 рангов — равны с точностью до знака последовательным градиентам логарифмического потенциала и за-

висят только от вектора, соединяющего центр кластера с точкой наблюдения; мультипольные моменты кластера $\overline{\mathbf{m}}^{(p)}$ — тензоры на единицу меньшего ранга — определяются характеристиками частиц в нем и вычисляются однократно (черта сверху означает тензор произвольного ранга).

После выполнения локального разложения мультипольных слагаемых выражение для вычисления конвективных скоростей принимает вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{r} + \Delta\rho) \approx \frac{\mathbf{k}}{2\pi} \times \left(\mathbf{E}_0(\rho) + \hat{\mathbf{E}}_1(\rho) \cdot \Delta\rho + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}_2(\rho) \cdot \Delta\rho^{\otimes 2} + \frac{1}{6} \underline{\mathbf{E}}_3(\rho) \cdot \Delta\rho^{\otimes 3} \right),$$

где тензорные коэффициенты $\overline{\mathbf{E}}_q$ выражаются через ранее введенные тензоры $\overline{\Theta}^{(p)}$ и $\overline{\mathbf{m}}^{(p)}$ и вычисляются для каждого контрольного кластера путем накопления по всем влияющим кластерам.

Все введенные тензоры определяются двумя коэффициентами, поскольку они полностью симметричны и результат их свертки по любой паре индексов равен нулю. Поэтому переход к более точным вариантам быстрого алгоритма не приводит к значительному росту вычислительной сложности (Рис. 5). Быстрый алгоритм имеет квазилинейную сложность; наиболее точная схема IV, обеспечивая 200-кратное повышение точности по сравнению со схемой I, оказывается лишь в 2 раза более трудоемкой.

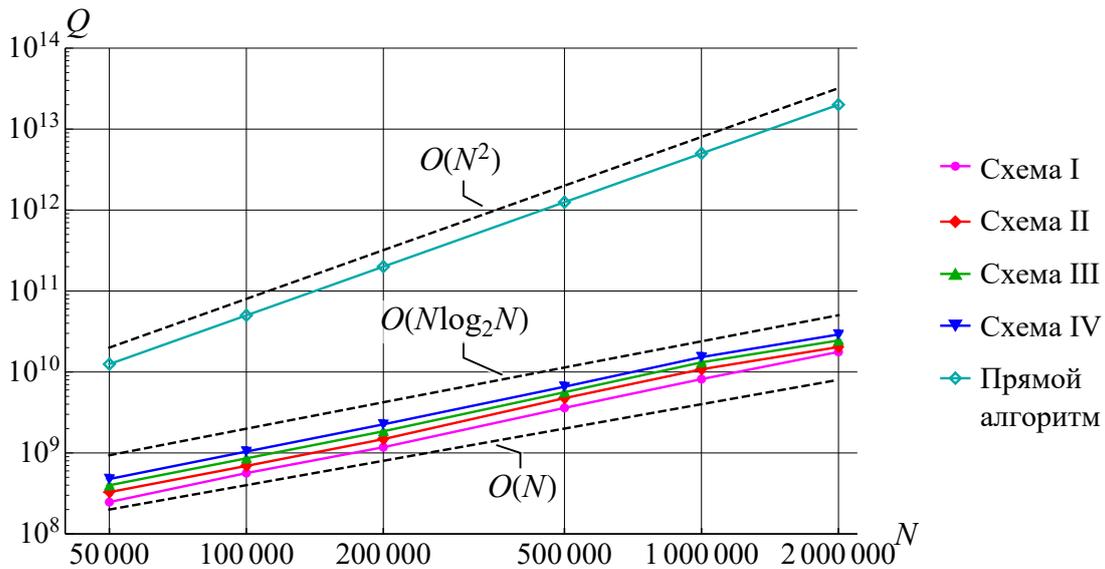


Рис. 5. Вычислительная сложность различных модификаций быстрого алгоритма в зависимости от количества вихревых частиц

Точность расчета скоростей вихревых частиц быстрым методом определяется величиной параметра близости θ (максимальным отношением размеров кластеров к расстоянию между ними, при котором их взаимное влияние можно рассчитывать по предложенному быстрому алгоритму), при этом погрешности схем I...IV оказывается пропорциональными $\theta^{-1} \dots \theta^{-4}$ соответственно; фиксированное значение θ обеспечивает примерно равную точность независимо от числа вихревых частиц.

В разделе 5.7 получены выражения для мультипольных слагаемых и их локальных разложений в аналогичной по постановке пространственной задаче. Общий ход рассуждений остается идентичным таковому для плоских задач, однако завихренность в каждой частице — это теперь векторная величина, не имеющая выделенного направления, поэтому

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{4\pi} \underline{\varepsilon} \cdot \cdot \left(\mathbf{M}^m \otimes \Theta^m + \hat{\mathbf{M}}^d \cdot \hat{\Theta}^d + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{M}}^q \cdot \cdot \underline{\Theta}^q + \frac{1}{6} \underline{\mathbf{M}}^o \cdot \cdot \cdot \underline{\Theta}^o \right),$$

где $\underline{\varepsilon}$ — символ Леви-Чивиты; тензоры мультипольных моментов $\overline{\mathbf{M}}^{(p)}$ имеют ранг на единицу больше одноименных тензоров в плоском случае; тензоры $\overline{\Theta}^{(p)}$ — это последовательные градиенты ньютоновского потенциала. В расчетах теперь целесообразно ограничиться учетом моментов до октупольного, поскольку достижимое в трехмерных задачах пространственное разрешение на порядок меньше, чем в плоском случае.

После выполнения локальных разложений мультипольных слагаемых в соответствии со схемой III имеем итоговое выражение для скоростей

$$\mathbf{V}(\mathbf{r} + \Delta \boldsymbol{\rho}) \approx -\frac{1}{4\pi} \underline{\varepsilon} \cdot \cdot \left(\hat{\mathbf{E}}_0(\boldsymbol{\rho}) + \underline{\mathbf{E}}_1(\boldsymbol{\rho}) \cdot \Delta \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}_2(\boldsymbol{\rho}) \cdot \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}^{\otimes 2} \right).$$

Тензоры $\overline{\Theta}^{(p)}$ обладают теми же свойствами, что и ранее, а мультипольные моменты, начиная с квадрупольного, и коэффициенты $\overline{\mathbf{E}}_q$ при $q \geq 1$ обладают симметрией по индексам, начиная со 2-го, и их свертка по любой паре индексов, начиная со 2-го, равна нулю. Это позволяет хранить и обрабатывать лишь небольшую часть компонент тензоров.

Результаты решения модельных задач показывают, что все тенденции, наблюдавшиеся для плоских задач, сохраняются; каждая из схем I, II и III обеспечивает 20-кратное повышение точности по сравнению с предыдущей (в плоских задачах имело место 8-кратное уточнение).

Шестая глава посвящена разработке итерационных процедур решения СЛАУ, возникающих в результате применения разработанных T -схем при решении плоских и пространственных задач. Разработанные в Главе 5 модификации быстрого алгоритма Барнса — Хата после некоторой их адаптации позволяют построить эффективные итерационные алгоритмы реализации T -схем квазилинейной вычислительной сложности.

В разделе 6.1 получены расчетные формулы для мультипольных моментов плоских (прямолинейных и криволинейных) и пространственных (треугольных) панелей, позволяющие в соответствии с логикой T -схем рассчитывать с помощью быстрого алгоритма влияние не только точечных вихрей, но и распределенного вихревого слоя.

Раздел 6.2 посвящен методике расчета приближенных значений интегралов по плоским и пространственным панелям от произведений вихревого влияния на проекционные функции, возникающих в T -схемах. Интегрирование локальных разложений функции влияния позволяет аппроксимировать условие ортогональности невязки ГИУ проекционным функциям в соответствии с методом Галеркина.

Раздел 6.3 носит реферативный характер и содержит описание алгоритмов двух наиболее распространенных итерационных методов Крыловского типа — BiCGStab и GMRES, применимых для решения СЛАУ общего вида с несимметричными матрицами.

В разделе 6.4 разработаны приближенные алгоритмы итерационного решения СЛАУ, соответствующих T -схемам решения плоских задач моделирования обтекания профилей. Система приведена к виду, допускающему быстрое умножение основного блока матрицы на вектор. Предложена реализация предобуславливателя, которая для схемы \mathcal{T}^0 является обобщением алгоритма циклической прогонки (матрица — трехдиагональная, дополненная одним полным столбцом и полной строкой); ее сложность составляет $13N$. Для схемы \mathcal{T}^1 предобуславливатель «распадается» на два независимых блока и решение имеет трудоемкость $22N$ операций. Вычислительный эксперимент показывает, что предобуславливание позволяет в 1.5–2 раза снизить количество итераций метода GMRES, и обеспечивает сходимость метода BiCGStab. На примере модельных задач показано, что совместное использование T -схем и быстрого алгоритма матрично-векторного умножения приводит лишь к незначительному снижению точности результата (по сравнению с прямым решением СЛАУ). С увеличением числа панелей N величину параметра близости θ следует уменьшать, чтобы погрешность быстрого алгоритма оставалась меньше собственной погрешности схемы \mathcal{T}^1 . Это приводит к более быстрому нарастанию вычислительной сложности предложенной схемы \mathcal{T}_{BH}^1 по сравнению с расчетом скоростей вихревых частиц, однако суммарная трудоемкость остается квазилинейной (Рис. 6).

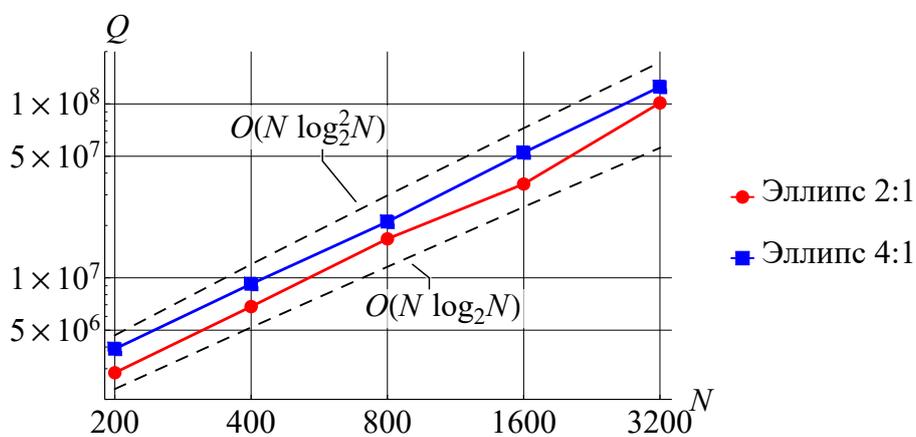


Рис. 6. Вычислительная сложность схемы \mathcal{T}_{BH}^1

Предложенные алгоритмы обобщены на случай моделирования обтекания системы профилей, когда T -схемы применяются для решения системы граничных интегральных уравнений.

В разделе 6.5 разработаны аналогичные алгоритмы для решения пространственных задач моделирования обтекания тела с использованием T -схемы с кусочно-постоянным представлением решения на треугольных панелях. Матрица-предобуславливатель имеет блочно-диагональный вид с заполненными правым блок-столбцом и нижней блок-строкой; сложность решения системы с такой матрицей — $36N$ операций. Эффективность предобуславливания оказывается существенно более высокой, чем при решении плоских задач: число выполняемых итераций снижается в 10–15 раз для гладких поверхностей и близких к равномерным сеток. Для тел сложной формы и сеток со сгущениями решение задачи без использования предобуславливания фактически невозможно.

Седьмая глава посвящена вопросам, связанным с программной реализацией вихревых методов. На сегодня известно несколько их общедоступных реализаций (vvflow, Omega2D, Omega3D, FLOWUnsteady; последние три — с открытым исходным кодом), однако платформы, позволившей бы реализовать современные математические модели (в частности — T -схемы), эффективные быстрые методы расчета парных взаимодействий вихревых частиц с возможностью использования технологий высокопроизводительных вычислений, включая расчеты на графических ускорителях, создано не было. Данная проблема решена путем разработки подобных платформ, получивших названия VM2D и VM3D — для моделирования плоских и пространственных течений соответственно.

В разделе 7.1 описана общая архитектура и возможности программных платформ VM2D и VM3D, реализующих метод вязких вихревых доменов и метод замкнутых вихревых петель совместно с разработанными T -схемами для решения ГИУ на обтекаемых поверхностях.

Исходный код пакетов кроссплатформенный, написан на языке программирования C++, имеет модульную структуру и позволяет использовать технологии параллельных вычислений OpenMP, MPI и Nvidia CUDA, что дает возможность многократно снизить время выполнения расчетов на многоядерных ЭВМ, кластерных системах и графических ускорителях (GPU). Возможно совместное использование указанных технологий.

Алгоритм выполнения каждого шага расчета при решении нестационарной задачи можно разбить на 6 основных операций: 1) генерация завихренности на обтекаемой поверхности; 2) вычисление скоростей вихревых частиц; 3) расчет гидродинамических нагрузок, скоростей и давления; 4) эволюция завихренности и движение обтекаемой поверхности; 5) реструктуризация вихревого следа; 6) сохранение результатов.

В Таблице 3 приведены величины ускорения самой трудоемкой операции — вычисления скоростей вихревых элементов (по сравнению с последовательным расчетом на 1 ядре) при использовании различного количества ядер кластера BL2x220c G7, а также при расчете на графических ускорителях различных классов: Quadro P4000, Geforce GTX970, Geforce GTX Titan, Tesla K40c и Tesla V100. Для остальных операций ускорение за счет переноса вычислений на GPU оказывается несколько меньшим, но также измеряемым десятками-сотнями раз. Как видно, наиболее мощный графический ускоритель Tesla V100 оказывается в 5–6 раз более производительным, чем 228 ядер указанного кластера.

Таблица 3.

Ускорение при расчете на кластере BL2x220c G7 и на GPU

Задача	48 ядер	P4000	GTX970	96 ядер	Titan	228 ядер	K40c	V100
«80 000»	39.1	49.3	58.7	72.3	78.8	140.1	158.9	856.1
«480 000»	38.6	54.2	66.1	75.8	80.3	171.5	162.6	913.1

В разделе 7.2 описаны некоторые алгоритмы моделирования плоского обтекания профилей методом вязких вихревых доменов и пространственного обтекания тел методом замкнутых вихревых петель, тесно связанные с использованием разработанных *T*-схем для решения ГИУ относительно интенсивности вихревого слоя. К ним относятся преобразование свободной завихренности в форме распределенного вихревого слоя в множество дискретных вихревых элементов, а также определение их конвективных скоростей, как и скоростей вихревых элементов, находящихся в области течения вблизи обтекаемой поверхности. Эти вопросы важны, поскольку правая часть ГИУ содержит слагаемые, выражающие касательную компоненту скорости, индуцируемой распределением завихренности в области течения, и для корректности расчета важно обеспечить правильность моделирования ее движения, особенно вблизи поверхности, где такое влияние особенно существенно.

Раздел 7.3 посвящен простейшему приложению разработанных *T*-схем — расчету тензоров присоединенных масс профилей и тел. Решение данной задачи не требует моделирования развития вихревого следа, а предполагает решение трех (в плоском) или шести (в пространственном случае) сходных задач, различающихся лишь правой частью и соответствующих первому шагу расчета обтекания мгновенно приводимого в движение тела с единичной поступательной или угловой скоростью. Компоненты тензоров присоединенных масс согласно теореме о структуре гидродинамических сил, действующих на тело в вязкой жидкости (Г.Я. Дынникова, 2019), выражаются через интенсивности свободного и присоединенного вихревых слоев; первая находится из численного решения ГИУ, вторая определяется направлением движения тела.

В качестве примера рассмотрена задача о расчете присоединенных масс эллиптического профиля, в которой схемы \mathcal{T}^0 и \mathcal{T}^1 обеспечивают 2-й порядок точности. Для крылового профиля Жуковского (с острой кромкой) порядок точности обеих схем снижается до 1-го, однако применение разработанной в разделе 2.7 схемы \mathcal{T}_a^1 , учитывающей асимптотику решения на кромке, позволяет снова обеспечить 2-й порядок точности. В пространственных задачах при расчете присоединенных масс эллипсоида разработанная \mathcal{T} -схема также обеспечивает 2-й порядок точности.

Раздел 7.4 посвящен верификации программного комплекса VM2D с реализованными в нем \mathcal{T} -схемами решения ГИУ на задачах моделирования обтекания профилей и расчета действующих на них гидродинамических нагрузок. Рассмотрены задачи о моделировании обтекания тонкой пластины (задача Блазиуса), течения в канале с обратным уступом, об идентификации положения точки отрыва потока при обтекании кругового цилиндра при малых значениях числа Рейнольдса ($Re = 20 \dots 200$), задача определения стационарных аэродинамических характеристик крыловых профилей при средних значениях $Re = 10^4$ и $Re = 10^5$, расчет нестационарной силы лобового сопротивления в переходном режиме при мгновенном старте кругового цилиндра в неподвижной жидкости, расчет стационарных характеристик системы близко расположенных цилиндров, а также амплитуды и частоты пульсаций действующих на них гидродинамических нагрузок.

Вид вихревых следов за профилем крыла NACA-0012 показан на Рис. 7. Результаты моделирования показывают, что при малых углах атаки, не превышающих $6\text{--}8^\circ$, наблюдается удовлетворительное согласие с результатами экспериментов для величины коэффициента лобового сопротивления (получается несколько завышенным) и хорошее соответствие для коэффициента подъемной силы.

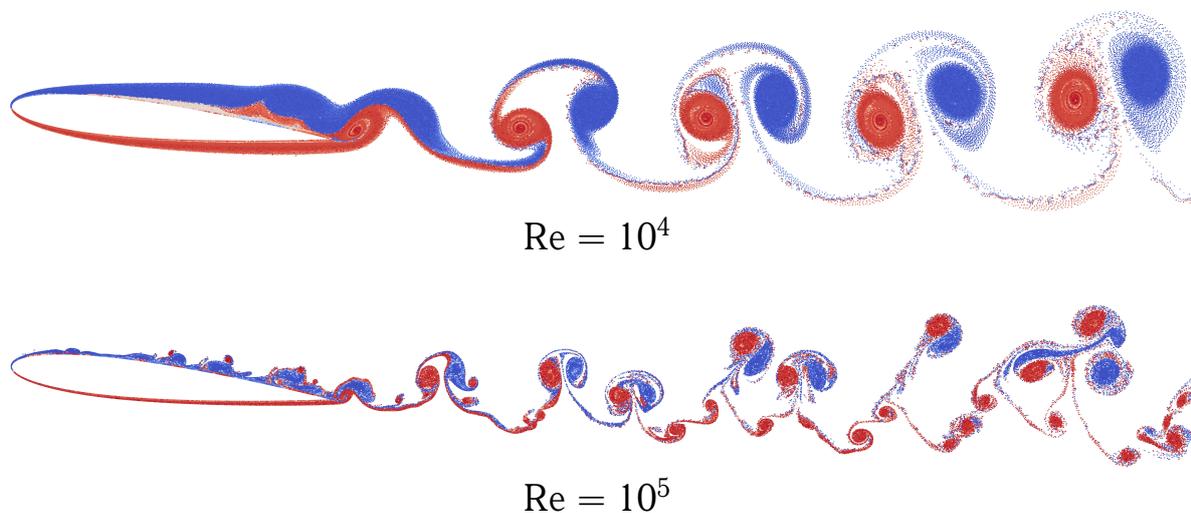


Рис. 7. Вихревые среды за крыловым профилем для угла атаки 6°

Зависимость коэффициента лобового сопротивления от времени (без какого-либо осреднения) для мгновенно приведенного в движение кругового цилиндра при $Re = 3000$ показана на Рис. 8 в сравнении с результатами других авторов.

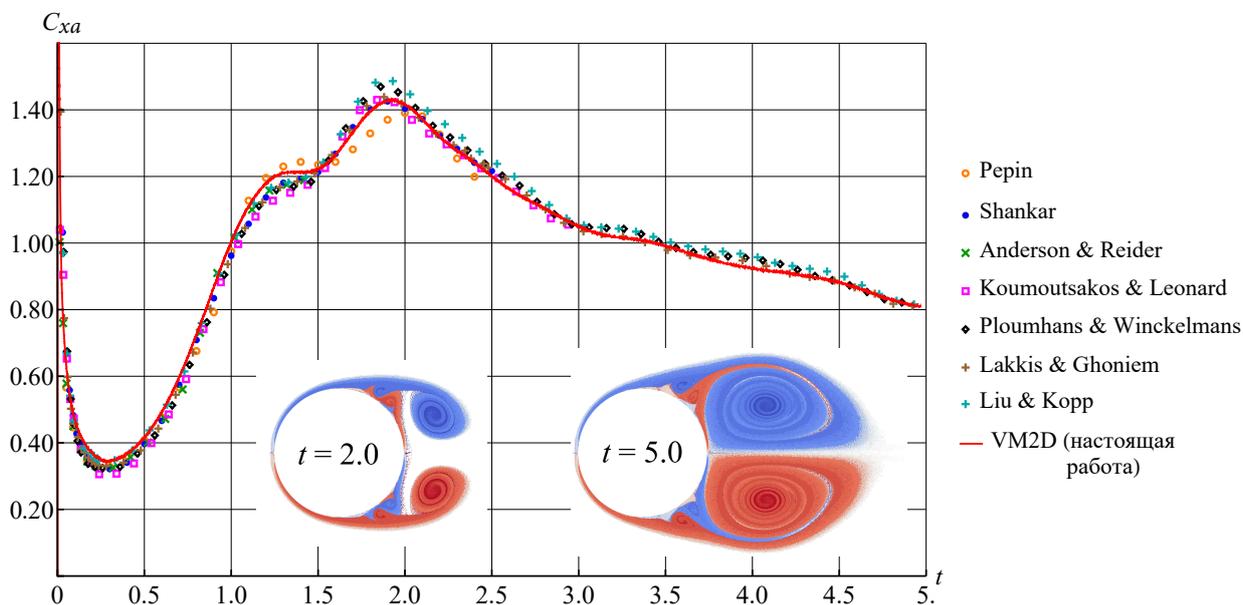


Рис. 8. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от времени для цилиндра при $Re = 3000$

Результаты решения всех тестовых задач показывают высокую точность разработанных алгоритмов. Отметим также неосциллирующий характер вычисляемых нестационарных гидродинамических нагрузок.

В разделе 7.5 рассмотрены тестовые задачи моделирования нестационарного пространственного обтекания сферы и крыла конечного размаха с профилем НАСА-2217 с удлинением 5. Вид вихревого следа за сферой, моделируемого множеством замкнутых вихревых петель, показан на Рис. 9 для трех различных моментов времени.

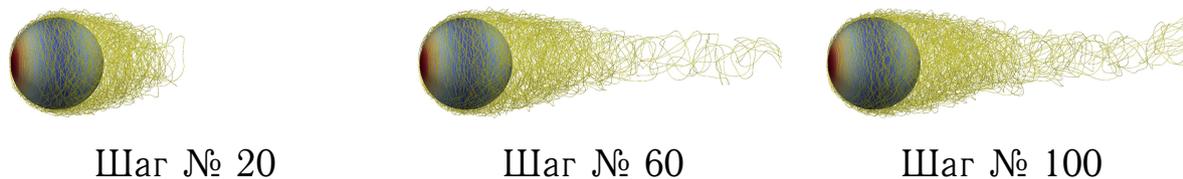


Рис. 9. Развитие вихревого следа за обтекаемой сферой

При моделировании обтекания крыла формируется структура вихрей Прандтля с хорошо различимыми интенсивными вихревыми жгутами, сходящими с законцовок крыла (Рис. 10).

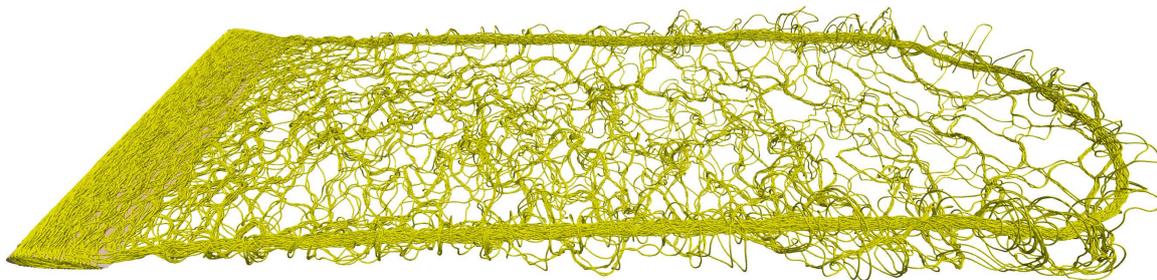


Рис. 10. Вихревой след за моделью крыла под углом атаки 10°

Результаты расчета распределения давления по поверхности сферы и аэродинамических коэффициентов крыла удовлетворительно согласуются с данными экспериментов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Показано, что математические модели вихревых методов вычислительной гидродинамики, выраженные граничными интегральными уравнениями 2-го рода с интегрируемыми ядрами относительно интенсивности вихревого слоя на обтекаемой поверхности, позволяют разработать численные схемы повышенной точности для решения как плоских, так и пространственных задач расчета обтекания тел.

2. Для плоских задач разработано семейство T -схем для случаев аппроксимации профиля прямолинейными и криволинейными панелями, обеспечивающих 1-й, 2-й и 3-й порядок точности при определении интенсивности вихревого слоя и восстановлении поля скоростей.

3. Для пространственных задач разработана T -схема для определения интенсивности вихревого слоя, которая в сочетании с предложенным алгоритмом восстановления плотности потенциала двойного слоя обеспечивает 10-кратное повышение точности, особенно вблизи кромок, и позволяет проводить расчеты на неравномерных неструктурированных поверхностных сетках.

4. Для решения линейных систем, возникающих в результате применения разработанных T -схем, созданы итерационные алгоритмы квазилинейной вычислительной сложности и новые модификации алгоритмов быстрого матрично-векторного умножения.

5. Разработаны программные комплексы VM2D и VM3D, в которых созданные T -схемы и алгоритмы использованы в реализациях численных методов вязких вихревых доменов и замкнутых вихревых петель. Программные комплексы имеют открытый исходный код, являются кроссплатформенными и обеспечивают высокую производительность за счет применения современных технологий параллельных вычислений.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. Численное моделирование движения пары вихревых колец в идеальной жидкости методами дискретных вихревых элементов / И.К. Марчевский [и др.] // Инженерная физика. 2008. № 4. С. 8–14. (0.35 п.л./0.1 п.л.)
2. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Модель симметричного вортон-отрезка для численного моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 4. С. 62–71. (0.6 п.л./0.3 п.л.)
3. Marchevskii I.K., Ivanova O.A. Numerical simulation of wind resonance of a circular profile by means of the vortex element method // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2009. V. 38. No. 5. P. 420–424. (0.3 п.л./0.25 п.л.)
4. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование обтекания системы профилей методом вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Естественные науки. 2010. № 1. С. 12–20. (0.5 п.л./0.35 п.л.)
5. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Применение параллельных алгоритмов при решении задач гидродинамики методом вихревых элементов // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2010. Т. 11. № 1. С. 105–110. (0.35 п.л./0.2 п.л.)
6. Ванько В.И., Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Численно-аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. № S1. С. 3–10. (0.5 п.л./0.2 п.л.)
7. Лукин В.В., Марчевский И.К. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч.1. Инструментарий и возможности // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Естественные науки. 2011. № 4. С. 28–43. (1 п.л./0.5 п.л.)
8. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч.2. Примеры решения задач / И.К. Марчевский [и др.] // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. № 4. С. 82–102. (1.3 п.л./0.4 п.л.)
9. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Моделирование динамики вихревых структур высокопроизводительным методом вихревых элементов // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2013. № 9. С. 26–36. (0.65 п.л./0.45 п.л.)
10. Ермаков А.В., Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Численное моделирование колебаний стержня в пространственном потоке // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2014. № 39. С. 50–63. (0.85 п.л./0.4 п.л.)
11. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Об ускорении вычислений при решении двумерных сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2014. № 39. С. 145–163. (1 п.л./0.8 п.л.)

12. Kuzmina K., Marchevsky I., Moreva V. Parallel implementation of vortex element method on CPUs and GPUs // *Procedia Computer Science*. 2015. V. 66. P. 73–82. (0.6 п.л./0.4 п.л.)
13. Гречкин-Погребняков С.Р., Кузьмина К.С., Марчевский И.К. О реализации вихревых методов моделирования двумерных течений несжимаемой среды с использованием технологии CUDA // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. Т. 16. № 1. С. 165–176. (0.75 п.л./0.5 п.л.)
14. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Об оценках вычислительной сложности и погрешности быстрого алгоритма в методе вихревых элементов // *Труды ИСП РАН*. 2016. Т. 28. № 1. С. 259–274. (1 п.л./0.75 п.л.)
15. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Численная схема высокого порядка точности для определения интенсивности вихревого слоя при решении двумерных задач аэрогидродинамики вихревыми методами // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*. 2016. № 6. С. 93–109. (1 п.л./0.75 п.л.)
16. Marchevskii I.K., Shcheglov G.A. On the dynamic stability of an elastically fixed high-drag airfoil under vortical parametric excitations // *Mechanics of Solids*. 2016. V. 51. No. 3. P. 349–356. (0.5 п.л./0.2 п.л.)
17. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact analytical formulae for linearly distributed vortex and source sheets influence computation in 2D vortex methods // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 918. No. 1. Art. 012013. (0.6 п.л./0.4 п.л.)
18. Numerical scheme of the second order of accuracy for vortex methods for incompressible flow simulation around airfoils / I.K. Marchevskii [et al.] // *Russian Aeronautics*. 2017. V. 60. No. 3. P. 398–405. (0.5 п.л./0.3 п.л.)
19. Марчевский И.К., Кузьмина К.С., Солдатова И.А. Уточненный алгоритм аппроксимации граничного уравнения в вихревых методах моделирования обтекания профилей с криволинейной границей // *Математика и математическое моделирование*. 2018. № 6. С. 22–51. (1.8 п.л./1 п.л.)
20. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Moreva V.S. On vortex sheet intensity computation for airfoils with angle point in vortex methods // *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*. 2018. V. 9. No. 2. P. 799–809. (0.65 п.л./0.3 п.л.)
21. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. VM2D: Open source code for 2D incompressible flow simulation by using vortex methods // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 910. P. 251–265. (0.9 п.л./0.5 п.л.)
22. Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018. V. 10. No. 3. P. 276–287. (0.75 п.л./0.5 п.л.)

23. Kuzmina K., Marchevsky I.K. On the efficiency of the parallel algorithms in VM2D open source code for 2D flows simulation using vortex methods // IUTAM Bookseries. 2019. V. 34. P. 147–159. (0.8 п.л./0.5 п.л.)
24. Mikhailov E.A., Marchevskii I.K., Kuzmina K.S. Iterative approach to solving boundary integral equations in the two-dimensional vortex methods of computational hydrodynamics // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2019. V. 13. No. 4. P. 672–684. (0.8 п.л./0.5 п.л.)
25. Dergachev S.A., Marchevsky I.K., Shcheglov G.A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components // Aerospace Science and Technology. 2019. V. 94. Art. 105374. (1 п.л./0.4 п.л.)
26. Kuzmina K.S., Marchevskii I.K. On the calculation of the vortex sheet and point vortices effects at approximate solution of the boundary integral equation in 2D vortex methods of computational hydrodynamics // Fluid Dynamics. 2019. V. 54. No. 7. P. 991–1001. (0.65 п.л./0.4 п.л.)
27. Cost-efficient numerical schemes for the boundary integral equation solution in 2D vortex methods / I. Marchevsky [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1348. No. 1. Art. 012100. (0.5 п.л./0.3 п.л.)
28. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1348. No. 1. Art. 012099. (0.55 п.л./ 0.3 п.л.)
29. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. V. 126. P. 255–267. (0.8 п.л./0.5 п.л.)
30. Kuzmina K., Marchevsky I. Numerical schemes for vortex sheet intensity computation in vortex methods taking into account the curvilinearity of the airfoil surface line // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. V. 126. P. 269–279. (0.65 п.л./0.4 п.л.)
31. Marchevsky I.K., Shcheglov G.A. Double layer potential density reconstruction procedure for 3D vortex methods // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. 2020. V. 132. P. 287–295. (0.55 п.л./0.3 п.л.)
32. Marchevskii I.K., Shcheglov G.A. The algorithm of the vortex sheet intensity determining in 3D incompressible flow simulation around a body // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. V. 12. No. 4. P. 464–473. (0.6 п.л./0.3 п.л.)
33. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing / I. Marchevsky [et al.] // Entropy. 2021. V. 23. Art. 118. (2.4 п.л./1.5 п.л.)