

На правах рукописи

**КУЗЬМИНА Ксения Сергеевна**

**СИСТЕМА АЛГОРИТМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ В ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ  
И ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА ДЛЯ РАСЧЕТА  
ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Москва — 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном  
образовательном учреждении высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»

**Научный руководитель:** кандидат физико-математических наук, доцент  
**Марчевский Илья Константинович**

**Официальные оппоненты:** **Дынникова Галина Яковлевна**,  
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Государственное учебно-научное учреждение «Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова», ведущий научный сотрудник

**Борисов Виталий Евгеньевич**,  
кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», научный сотрудник

**Ведущая организация:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 года в \_\_ час. \_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана и на сайте [www.bmstu.ru](http://www.bmstu.ru).

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат технических наук, доцент

 А.В. Аттетков

грешностям при моделировании обтекания профилей и расчете действующих на них гидродинамических нагрузок. Таким образом, разработка новых алгоритмов, обеспечивающих повышение точности моделирования обтекания профиля в вихревых методах, является актуальным направлением исследований. Это может достигаться путем использования математических моделей, приводящих к интегральным уравнениям 2-го рода с ограниченным ядром, учета неравномерности распределения интенсивности вихревого слоя вдоль панелей, а также явного учета криволинейности границы профиля.

Несмотря на достаточную историю развития в нашей стране и за рубежом, на сегодняшний день современные модификации вихревых методов не реализованы в доступных широкому кругу специалистов комплексах программ, как коммерческих, так и свободно распространяемых, что в значительной мере снижает популярность вихревых методов среди исследователей и расчетчиков. Поэтому создание программной платформы для расчета двумерных течений с использованием вихревых методов, позволяющей эффективно использовать возможности современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур, является актуальной задачей.

**Цель и задачи исследования.** Целью работы является развитие вихревых методов вычислительной гидродинамики путем построения системы алгоритмов для моделирования обтекания профиля, различающихся представлением интенсивности вихревого слоя, а также способом учета кривизны обтекаемой поверхности, и создание программной платформы для решения двумерных задач гидродинамики и гидроупругости.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач**.

1. Построение точных аналитических решений модельных задач для оценки точности разрабатываемых алгоритмов и расчетных схем вихревых методов, а также методики выполнения такой оценки.
2. Разработка принципов построения системы алгоритмов и расчетных схем вихревых методов на основе подхода Галеркина.
3. Оценка точности ранее известных и вновь разработанных алгоритмов и расчетных схем при аппроксимации границы обтекаемого профиля прямолинейными панелями.
4. Обобщение ранее известных и вновь разработанных алгоритмов и расчетных схем вихревых методов на случай аппроксимации границы профиля криволинейными панелями.
5. Создание программной платформы с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ и анализ ее эффективности.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** В ряде инженерных приложений, связанных с моделированием взаимодействия элементов конструкций с потоком жидкости или газа, к примеру, в промышленной аэродинамике, механике воздушных или подводных трубопроводов и шлангов, при расчете гидроупругих колебаний трубок теплообменников энергетических установок, течение можно рассматривать в двумерной постановке, а влиянием сжимаемости среды — пренебречь в силу сравнительно малых скоростей. Для решения подобных задач могут применяться вихревые методы, которые относятся к классу бессеточных лагранжевых методов; первичной расчетной величиной в них является завихренность.

Эффективность использования вихревых методов связана с их сравнительно низкой вычислительной сложностью по сравнению с сеточными методами, удобством моделирования внешнего обтекания профилей, а также простотой перехода к рассмотрению задач в сопряженной гидроупругой постановке. Ранние модификации вихревых методов, к числу которых относится метод дискретных вихрей (МДВ), активно развивавшийся в научной школе С.М. Белоцерковского, позволяли моделировать обтекание профилей идеальной жидкостью при известных положениях точек отрыва потока, в качестве которых, как правило, выбираются угловые точки и острые кромки. В дальнейшем были разработаны подходы (A. Chorin, G. Winckelmans, G. Cottet, P. Koumoutsakos, K. Kamemoto, Y. Ogami, T. Akamatsu и др.), позволившие рассматривать гладкие профили и моделировать течения вязкой жидкости.

На сегодняшний день наиболее удобной для практического использования представляется метод вязких вихревых доменов (МВВД, Г.Я. Дынникова). В рамках МВВД предложен эффективный способ расчета скоростей движения вихревых элементов, позволяющий моделировать эволюцию завихренности в вязкой жидкости. Существенной особенностью МВВД является генерация завихренности на всей границе обтекаемого профиля. В связи с этим точность описания процесса генерации завихренности и качество восстановления поля скоростей вблизи профиля оказывает существенное влияние на корректность моделирования течения в целом. Этот вопрос требует детального исследования; на данный момент в большинстве известных реализаций вихревых методов применяются алгоритмы, восходящие к МДВ: профиль аппроксимируется многоугольником, а генерируемая завихренность представляется в виде изолированных вихрей или, реже, в виде распределенного вихревого слоя, интенсивность которого находится из решения сингулярного интегрального уравнения. Это может приводить к существенным по-

**Методы исследования.** При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: бессеточных лагранжевых методов вычислительной гидродинамики, теории интегральных уравнений, вычислительной математики и параллельных вычислений.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчетов с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты.

1. Разработаны алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов вычислительной гидродинамики с кусочно-постоянным и кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя при аппроксимации профиля прямолинейными панелями, основанные на идеях метода Галеркина. Для вычисления коэффициентов возникающих систем линейных алгебраических уравнений получены точные аналитические формулы.

2. Разработаны алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов повышенной точности, предполагающие явный учет криволинейности панелей, аппроксимирующих профиль. Предложены два способа учета криволинейности границы профиля: ее аппроксимация эрмитовым сплайном и приближенное вычисление криволинейных интегралов путем разложения функций по малому параметру — длине панели.

3. Создана программная платформа с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP, MPI, Nvidia CUDA. Модульная структура программной платформы позволяет ее адаптировать для решения новых классов задач.

**Теоретическая и практическая ценность** диссертационной работы состоит в возможности повышения точности моделирования обтекания профилей с использованием вихревых методов путем применения разработанных алгоритмов и расчетных схем, позволяющих учитывать неравномерность распределения интенсивности вихревого слоя вдоль панелей и производить явный учет криволинейности границы профиля.

Разработан и зарегистрирован программный комплекс VM2D, представляющий собой программную платформу для моделирования двумерных течений вихревыми методами и позволяющий решать широкий класс задач, в том числе в сопряженной постановке, с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур.

## **Положения, выносимые на защиту.**

1. Алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов вычислительной гидродинамики с кусочно-постоянным и кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя при аппроксимации профиля прямолинейными панелями, построенные с применением подхода Галеркина, а также экономичные схемы на их основе.
2. Алгоритмы и расчетные схемы вихревых методов повышенной точности, предполагающие явный учет криволинейности панелей, аппроксимирующих профиль.
3. Программная платформа с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения сопряженных задач гидроупругости вихревыми методами с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP, MPI, Nvidia CUDA.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы апробированы на конференциях «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2014 и 2015), конференциях «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ)» (Архангельск, 2016 и Ростов-на-Дону, 2018), конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016), Открытых конференциях ИСП РАН (Москва, 2015 и 2018), школе-семинаре молодых ученых «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках» (Санкт-Петербург, 2017), конференции по вычислительной и прикладной математике (Новосибирск, 2017), конференции «Методы аэрофизических исследований (ICMAR)» (Новосибирск, 2018), конференции «Particles» (Барселона, 2015, Ганновер, 2017), конференции по вихревым течениям «ICVFM» (Росток, 2016 и Сиань, 2018), конференции по методам конечных элементов в задачах расчета течений (FEF) (Рим, 2017), OpenFOAM Workshop (Гимарайнш, 2016 и Эксетер, 2017), симпозиуме по актуальным исследованиям задач механики с подвижными границами (IUTAM) (Крайстчерч, 2018), 7-м европейском конгрессе по вычислительной гидродинамике (ECFD) (Глазго, 2018), симпозиуме международной ассоциации по методам граничных элементов (IABEM) (Париж, 2018), 8-й и 9-й конференции-школе молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2017 и 2018), научных слушаниях «Современные проблемы механики и математики» (Москва, 2018), XXV Всероссийском семинаре по струйным, отрывным и нестационарным течениям (Санкт-Петербург, 2018).

Результаты исследований неоднократно обсуждались на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре им. С. М. и О. М. Белоцерковских под рук. А. И. Желанникова, В. В. Вышинского (ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, 2015–2018 г.).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проводимых в рамках гранта РФФИ 17-08-01468 «Моделирование нелинейной динамики стабилизаторов расхода для энергетических установок летательных аппаратов вихревыми методами», гранта РНФ 17-79-20445 «Развитие эффективных численных методов расчета нестационарных аэрогидродинамических нагрузок для аэрогидробаллистического проектирования летательных аппаратов» и гранта РФФИ 18-31-20051 «Разработка новых алгоритмов моделирования обтекания профилей и решения сопряженных задач гидроупругости на основе вихревых методов и их эффективная программная реализация для многопроцессорных ЭВМ различных архитектур».

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 28 научных статьях, в том числе в 19 статьях в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, результатов, и списка литературы. Работа изложена на 150 страницах, содержит 34 иллюстрации и 17 таблиц. Список литературы включает 130 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** проведен обзор литературы по вихревым методам, кратко перечислены основные этапы их развития, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

**В первой главе** рассмотрена задача о математическом моделировании обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды. Ее движение в области течения  $S$  описывается уравнениями неразрывности и Навье – Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \Delta \mathbf{V} - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in S,$$

где  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  — скорость среды в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ ;  $p(\mathbf{r}, t)$  — давление;  $\rho = \text{const}$  — плотность;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Границные условия имеют следующий вид:

- условия затухания возмущений на бесконечности

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{V}_\infty, \quad p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p_\infty \quad \text{при } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty,$$

где  $\mathbf{V}_\infty$  и  $p_\infty$  — скорость и давление в набегающем потоке;

- условие прилипания на контуре  $K$  — границе обтекаемого профиля —

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in K,$$

где  $\mathbf{V}_K(\mathbf{r}, t)$  — скорость движения границы профиля.

В вихревых методах первичной расчетной величиной является завихренность  $\Omega = \nabla \times \mathbf{V}$ , по известному распределению которой могут быть восстановлены все характеристики течения: для давления справедлив аналог интеграла Коши — Лагранжа, известны соотношения для расчета гидродинамических нагрузок, действующих на обтекаемые профили, а поле скоростей связано с полем завихренности посредством обобщенного разложения Гельмгольца, которое в простейших случаях принимает вид известного закона Био — Савара.

Удовлетворение граничного условия прилипания обеспечивается генерацией завихренности, которая моделируется с помощью тонкого вихревого слоя на границе профиля, интенсивность которого  $\gamma(\mathbf{r})$  подлежит определению. Обобщенное разложение Гельмгольца, интегралы в котором понимаются в смысле предельных значений на границе профиля, принимает вид векторного граничного интегрального уравнения относительно  $\gamma(\mathbf{r})$ :

$$\oint_K \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi - \alpha(\mathbf{r}) (\mathbf{k} \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) \gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K,$$

где правая часть

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \alpha(\mathbf{r}) \mathbf{V}_K(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_\infty - \int_S \frac{\Omega(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi - \\ &- \oint_{K(t)} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t) \times \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}, t)) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi - \oint_{K(t)} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{V}_K(\boldsymbol{\xi}, t))(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi \end{aligned}$$

зависит от распределения завихренности в области течения, скорости набегающего потока и скорости движения границы профиля;  $\alpha$  — внешний угол между касательными к профилю, отнесенный к  $2\pi$ ;  $\mathbf{k}$  — орт нормали к плоскости течения;  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  — орт внешней по отношению к профилю нормали.

В работе (Kemrka et al., 1996) показано, что возможны два подхода к решению данного векторного интегрального уравнения: путем его проецирования на нормаль ( $N$ -схема) либо на касательную ( $T$ -схема) к границе профиля. Первый подход приводит к сингулярному интегральному уравнению 1-го рода с ядром Гильберта, именно он традиционно используется в вихревых методах. Использование  $T$ -схемы позволяет перейти к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с ограниченным для гладких профилей ядром. Его численное решение при той же дискретизации профиля обеспечивает существенно более высокую точность определения интенсивности вихревого слоя. Все дальнейшие рассуждения в диссертации проводятся в рамках  $T$ -схемы, однако могут быть перенесены на случай  $N$ -схемы.

Для контроля точности разрабатываемых алгоритмов с использованием аппарата конформных отображений построены точные решения для модельных задач об обтекании эллиптического профиля (Рис. 1) и аэrodинамического профиля Жуковского как для потенциального обтекания, так и при наличии завихренности в области течения, представленной в виде набора точечных вихрей.

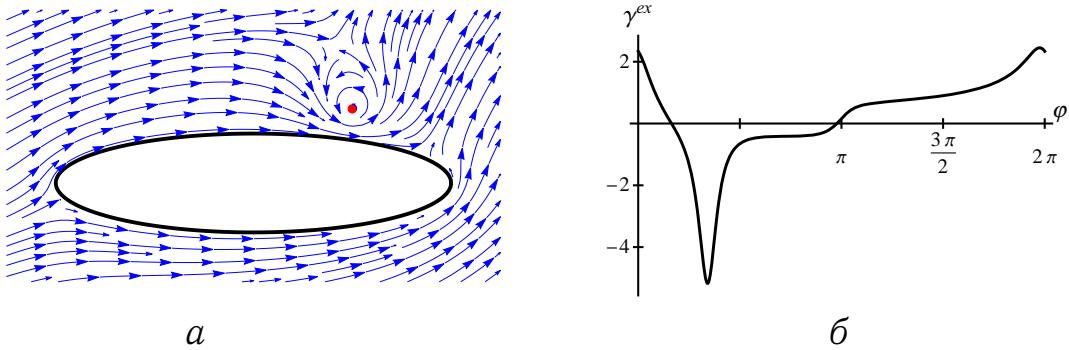


Рис. 1. Линии тока поля скоростей при обтекании эллиптического профиля ( $a_1/b_1 = 4$ ) в присутствии вихря (a) и точное решение для интенсивности вихревого слоя (б)

**Вторая глава** посвящена моделированию обтекания профиля при аппроксимации его границы  $N$ -угольником, состоящим из прямолинейных участков — панелей. Рассмотрены известные алгоритмы и расчетные схемы, в которых генерируемый вихревой слой представляется в виде совокупности отдельных вихрей либо имеет кусочно-постоянную (по панелям) интенсивность, а граничное условие удовлетворяется в контрольных точках либо в среднем по панелям. Показано, что известные расчетные схемы могут быть интерпретированы как результат применения процедуры Галеркина к соответствующему интегральному уравнению с подходящим выбором системы базисных и проекционных функций.

Подход Галеркина позволил разработать новый алгоритм решения граничного интегрального уравнения, основанный на кусочно-линейном представлении интенсивности вихревого слоя вдоль панелей. Результирующая система линейных алгебраических уравнений, дополненная условием выделения единственного решения (равенства суммарной интенсивности вихревого слоя заданной величине  $\Gamma^*$ ), имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & A^{01} + D^{01} & I_N \\ A^{10} + D^{10} & A^{11} + D^{11} & O_N \\ L^0 & L^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma^* \end{pmatrix},$$

где блоки  $A^{pq}$ ,  $p, q = 0, 1$  — квадратные матрицы порядка  $N$ ;  $D^{pq}$  — диагональные матрицы;  $\gamma^0$  и  $\gamma^1$  —  $N$ -мерные векторы, составленные из искомых коэффициентов в разложении приближенного решения по базисным функциям  $\varphi_i^0(\mathbf{r})$  и  $\varphi_i^1(\mathbf{r})$  (постоянные и линейные с нулевым средним функции, отличные от нуля на  $i$ -й панели);  $L^0$  и  $L^1$  — векторы-строки, составленные из интегралов от базисных функций вдоль панелей;  $b^0$  и  $b^1$  —  $N$ -мерные векторы, образующие правую часть системы. Коэффициенты системы выражаются интегралами по панелям:

$$A_{ij}^{pq} = \int_{K_i} \left( \int_{K_j} Q_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right) \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r, \quad D_{ii}^{pq} = -\frac{1}{2} \int_{K_i} (\varphi_i^p(\mathbf{r}))^2 dl_r,$$

$$L_i^p = \int_{K_i} \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r, \quad b_i^p = \int_{K_i} f_\tau(\mathbf{r}) \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r, \quad p, q = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Все выписанные коэффициенты выражаются через 6 различных типов интегралов от векторного ядра  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}$  по панелям профиля

$$\mathbf{I}_i^p = \int_{K_i} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r, \quad \mathbf{I}_{ij}^{pq} = \int_{K_i} \left( \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right) \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r,$$

для вычисления которых в работе получены точные аналитические формулы. С их помощью могут быть вычислены точно коэффициенты для всех возможных расчетных схем вихревых методов в предположении о прямолинейности панелей и кусочно-постоянном либо кусочно-линейном представлении решения, в том числе применительно к решению задач в со пряженной гидроупругой постановке.

Недостатком разработанного алгоритма является его высокая трудоемкость, обусловленная удвоенной размерностью системы по сравнению с ранее известными алгоритмами. Данная проблема решена путем разработки экономичной расчетной схемы, в которой в качестве базисных принимаются кусочно-линейные функции, аналогичные функциям

формы 1-го порядка в методе конечных элементов. Для выделения возможных разрывов решения в угловых точках разработана модифицированная экономичная расчетная схема, в которой введены дополнительные базисные функции, а размерность результирующей СЛАУ увеличивается на количество разрешаемых разрывов.

Произведена верификация разработанных алгоритмов и расчетных схем на серии модельных задач с известным точным решением. С использованием всех разработанных схем была решена задача о потенциальном обтекании профиля Жуковского (Рис. 2). Видно, что кусочно-линейная разрывная схема и кусочно-линейная схема типа МКЭ с выделением разрывов обеспечивают приблизительно одинаковые результаты. При этом непрерывная кусочно-линейная схема типа МКЭ не позволяет получать даже качественно верное решение, поскольку точное решение в этом случае имеет разрыв.

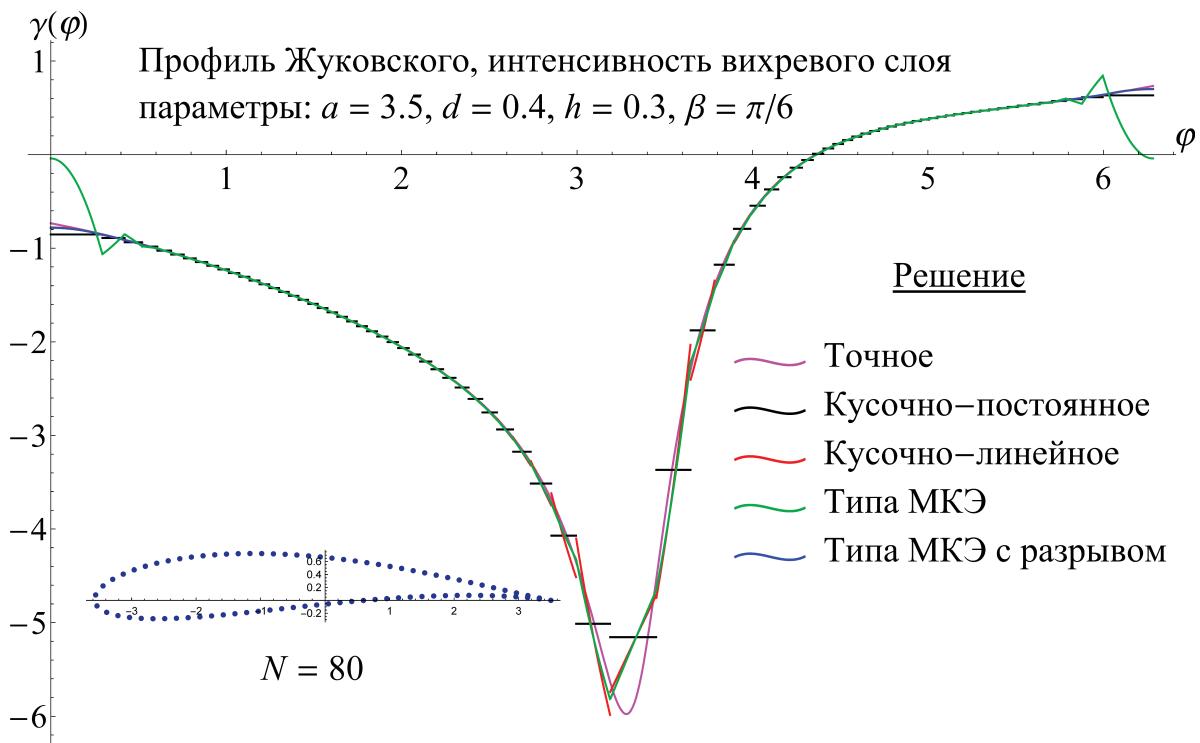


Рис. 2. Интенсивности вихревого слоя при обтекании профиля Жуковского, найденные с использованием различных схем

Для количественной оценки погрешности целесообразно использовать норму  $\|\cdot\|_{L_1}$ . Расчет интенсивности вихревого слоя на границе профиля показал, что кусочно-постоянное представление решения обеспечивает линейное убывание погрешности с увеличением числа панелей, в то время как разработанные кусочно-линейные схемы обеспечивают второй порядок точности. При этом использование кусочно-линейной схемы не позволяет повысить с 1-го до 2-го порядок точности восстановления поля скоростей среды вблизи границы профиля; имеет место

лишь незначительное повышение точности. Результаты расчета погрешностей для эллиптического профиля с отношением полуосей 2 : 1 под углом атаки  $\beta = \pi/6$  приведены в Таблице 1 (индексами  $c$  и  $l$  обозначены результаты, относящиеся к кусочно-постоянной и кусочно-линейной схемам соответственно).

Таблица 1

$N$	128	256	500	1000	2000
$\ \Delta\gamma^c\ _{L_1}$	0.09067	0.04528	0.02318	0.01159	0.00580
$\ \Delta\gamma^l\ _{L_1}$	0.00453	0.00116	0.00031	0.00008	0.00002
$\ \Delta\mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.04289	0.02144	0.01101	0.00546	0.00272
$\ \Delta\mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.02850	0.01397	0.00708	0.00350	0.00175

Таким образом, аппроксимация границы профиля прямолинейными панелями накладывает ограничения на точность восстановления поля скоростей вблизи границы обтекаемого профиля.

**В третьей главе** разработаны алгоритмы для моделирования обтекания профиля при аппроксимации его границы криволинейными панелями. Помимо повышения точности решения граничного интегрального уравнения и восстановления поля скоростей вблизи границы профиля учет криволинейности позволяет избежать существенных погрешностей численного решения, возникающих при аппроксимации профиля прямолинейными панелями, если смежные панели значительно различаются по длине.

В рамках рассмотренного в предыдущей главе подхода Галеркина предложены расчетные схемы, основанные на кусочно-постоянном и кусочно-линейном представлении интенсивности вихревого слоя вдоль криволинейных панелей. Условие ортогональности невязки интегрально-го уравнения базисным функциям приводит к системе того же вида, что и ранее, однако все интегралы теперь должны быть вычислены по криволинейным панелям; получить для них аналитические выражения не представляется возможным.

Наиболее простым способом аппроксимации границы профиля представляется ее замена эрмитовым сплайном (Рис. 3).

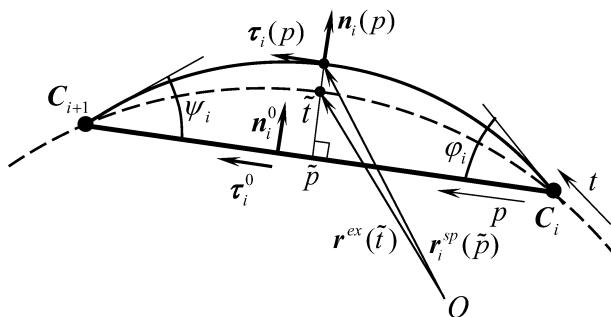


Рис. 3. Криволинейная панель, заданная сплайном (сплошная линия), исходная граница профиля (штриховая линия) и  $i$ -я хорда профиля

Пусть  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — радиус-векторы вершин профиля. Форма границы профиля над хордой  $C_i C_{i+1}$  аппроксимируется параметрически заданной гладкой кривой

$$\mathbf{r}_i^{sp}(u) = \mathbf{C}_i + L_i (u \boldsymbol{\tau}_i^0 + h_i(u) \mathbf{n}_i^0), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

где  $L_i$  — длина хорды;  $\boldsymbol{\tau}_i^0$  и  $\mathbf{n}_i^0$  — орты касательной и нормали к хорде;

$$h_i(u) = \alpha_i u(1-u) + \beta_i u(1-u)(1-2u),$$

где коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  находятся из условия совпадения касательных к исходной кривой и к криволинейной панели в ее концах:

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi_i + \operatorname{tg} \psi_i), \quad \beta_i = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi_i - \operatorname{tg} \psi_i).$$

Для диагональных коэффициентов системы, которым соответствуют несобственные интегралы, получены приближенные аналитические формулы путем разложения подынтегральных выражений в ряды по степеням  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  и удержания членов до четвертой степени длины хорды  $L_i$ :

$$\begin{aligned} A_{ii}^{00} &\approx \frac{\alpha_i}{2\pi} L_i, \quad A_{ii}^{01} \approx -\frac{\beta_i}{12\pi} L_i, \quad A_{ii}^{10} \approx -\frac{\beta_i}{6\pi} L_i, \quad A_{ii}^{11} \approx -\frac{\alpha_i^3}{144\pi} L_i, \\ D_{ii}^{00} &\approx -\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_i^2}{12}\right) L_i, \quad D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} \approx \frac{\alpha_i \beta_i}{30} L_i, \quad D_{ii}^{11} \approx -\left(\frac{1}{24} + \frac{\alpha_i^2}{80}\right) L_i, \\ L_i^0 &\approx \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{6}\right) L_i, \quad L_i^1 \approx 0. \end{aligned}$$

Для остальных коэффициентов не удается получить приближенные аналитические формулы, применимые на практике; их значения можно вычислить, например, с использованием квадратурной формулы Гаусса.

Результаты расчета погрешностей вычисления интенсивности вихревого слоя и восстановления поля скоростей вблизи эллиптического профиля с отношением полуосей  $2 : 1$ , установленного под углом атаки  $\beta = \pi/6$ , представлены в Таблице 2.

Таблица 2

$N$	128	256	500	1000	2000
$\ \Delta \gamma^c\ _{L_1}$	0.068286	0.034140	0.017479	0.008740	0.004370
$\ \Delta \gamma^l\ _{L_1}$	0.000736	0.000184	0.000048	0.000012	0.000003
$\ \Delta \mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.026341	0.013105	0.006614	0.003232	0.001684
$\ \Delta \mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.000323	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001

Анализ погрешностей показывает, что схема с кусочно-линейным представлением интенсивности вихревого слоя позволяет повысить порядок точности восстановления поля скоростей до 2-го. Однако на практике такой подход оказывается неприменимым, поскольку численный расчет внедиагональных коэффициентов является чрезвычайно трудоемким.

Для решения данной проблемы разработан алгоритм, позволяющий явно учитывать криволинейность исходного профиля. Его суть состоит в отказе от непосредственной аппроксимации границы профиля, а выражения для коэффициентов СЛАУ находятся путем разложения подынтегральных функций по формуле Тейлора по малому параметру — длине панели  $\delta_i$  — и учета слагаемых до третьего порядка включительно. Элементы диагональных матриц  $D^{pq}$  вычисляются точно по формулам

$$D_{ii}^{00} = -\frac{\delta_i}{2}, \quad D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} = 0, \quad D_{ii}^{11} = -\frac{\delta_i}{24}.$$

Для вычисления диагональных элементов матриц  $A_{ii}^{pq}$  получены приближенные аналитические формулы

$$\begin{aligned} A_{ii}^{00} &= \frac{\delta_i^2}{4\pi} \kappa_i + O(\delta_i^4), & A_{ii}^{01} &= \frac{\delta_i^3}{144\pi} \kappa'_i + O(\delta_i^4), \\ A_{ii}^{10} &= \frac{\delta_i^3}{72\pi} \kappa'_i + O(\delta_i^4), & A_{ii}^{11} &= O(\delta_i^4). \end{aligned}$$

Взаимное влияние соседних панелей, т. е. при  $|i - j| = 1$ , может быть вычислено по формулам

$$\begin{aligned} A_{ij}^{00} &= \frac{\delta_i \delta_j}{4\pi} \left( \kappa_{ij} \pm \frac{\delta_j - 2\delta_i}{6} \kappa'_{ij} \right) + O(\delta_j^4), & A_{ij}^{01} &= \frac{\delta_i \delta_j^2}{144\pi} \kappa'_{ij} + O(\delta_j^4), \\ A_{ij}^{10} &= \frac{\delta_i^2 \delta_j}{72\pi} \kappa'_{ij} + O(\delta_j^4), & A_{ij}^{11} &= O(\delta_j^4). \end{aligned}$$

Для остальных элементов матриц  $A^{pq}$  и коэффициентов правой части также получены приближенные формулы, приведенные в тексте работы.

Погрешности вычисления интенсивности вихревого слоя с использованием разработанной расчетной схемы и восстановления поля скоростей вблизи эллиптического профиля с отношением полуосей  $2 : 1$ , установленного под углом атаки  $\beta = \pi/6$ , представлены в Таблице 3.

Таблица 3

$N$	128	256	500	1000	2000
$\ \Delta\gamma^c\ _{L_1}$	0.068286	0.034140	0.017479	0.008740	0.004370
$\ \Delta\gamma^l\ _{L_1}$	0.000736	0.000184	0.000048	0.000012	0.000003
$\ \Delta\mathbf{V}^c\ _{L_1}$	0.026341	0.013105	0.006617	0.003231	0.001684
$\ \Delta\mathbf{V}^l\ _{L_1}$	0.000323	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001

Таким образом, анализ точности получаемых результатов подтверждает, что разработанные алгоритмы и численные схемы обеспечивают второй порядок точности для интенсивности вихревого слоя на границе профиля и поля скоростей среды вблизи него.

**В четвертой главе** описана программная платформа VM2D, реализующая вихревые методы для моделирования обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды и решения сопряженных задач гидроупругости. В основу платформы положен метод вязких вихревых доменов, а также разработанные новые алгоритмы и расчетные схемы, относящиеся, главным образом, к описанию процесса генерации завихренности на границе обтекаемого профиля. В качестве базовой использована  $T$ -схема и описанный в главе 2 алгоритм с кусочно-постоянным распределением интенсивности свободного вихревого слоя. Исходный код VM2D написан на языке C++, доступен по лицензии GNU GPLv3 и размещен на github по ссылке <https://www.github.com/vortexmethods/VM2D>. Программа VM2D является кроссплатформенной и может быть скомпилирована под операционные системы Windows, Linux и MacOS с помощью компиляторов, поддерживающих стандарт C++11.

Описана структура VM2D, особенности ее компиляции и запуска, а также форматы входных и выходных файлов. Выделены основные блоки алгоритма и сделана оценка вычислительной сложности трудоемких операций.

Для ускорения вычислений используются технологии параллельного программирования OpenMP, MPI и Nvidia CUDA, которые позволяют производить расчеты с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур. Для анализа эффективности ускорения вычислений были рассмотрены тестовые задачи обтекания профиля со следующими параметрами:

$$1) N = 1000, n = 80\,000; \quad 2) N = 6000, n = 480\,000,$$

где  $N$  — количество панелей;  $n$  — количество вихрей в области течения.

В Таблице 4 приведены значения ускорения вычислений при решении указанных задач на кластере BL2x220c G7 (ИСП им. В.П. Иванникова РАН) с использованием различного количества процессорных ядер  $p$ , а также ускорения, полученные с использованием графических ускорителей GeForce GTX 970 и Tesla K40c. Данные результаты демонстрируют высокую эффективность распараллеливания VM2D, а также перспективность использования для расчетов графических ускорителей.

Таблица 4

Число ядер	1	12	48	G970	96	144	192	228	K40
$n = 80\,000$	1	10.2	39.1	<b>58.7</b>	72.3	103.4	127.0	140.1	<b>158.9</b>
$n = 480\,000$	1	10.2	38.6	<b>66.1</b>	75.8	110.3	145.1	171.5	<b>162.6</b>

Рассмотрена сопряженная задача гидроупругости об обтекании упругого закрепленного кругового профиля, совершающего колебания поперек потока (Рис. 4) по закону

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_y,$$

где  $y$  — отклонение профиля от положения равновесия,  $F_y$  — подъемная сила, действующая на профиль со стороны жидкости,  $k$  — жесткость пружины и  $b$  — коэффициент вязкости демпфера.

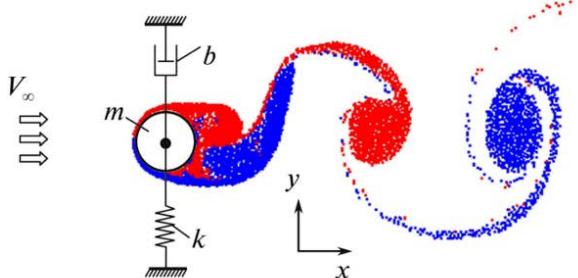


Рис. 4. Схема обтекания

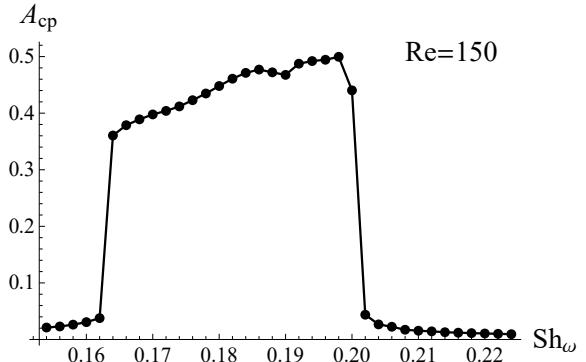


Рис. 5. Зависимость  $A_{cp}$  от  $Sh_\omega$

Безразмерные параметры расчета: скорость набегающего потока  $V_\infty = \{3, 0\}^T$ , плотность среды  $\rho_f = 1$ , кинематический коэффициент вязкости  $\nu = 0.02$ , диаметр профиля  $D = 1$ , масса  $m = 39.15$ , коэффициент демпфирования  $b = 0.731$ ; жесткость пружины  $k$  варьировалась для регулирования частоты собственных колебаний системы. График зависимости средней амплитуды колебаний профиля от числа Струхала  $Sh_\omega$ , вычисленного по частоте собственных колебаний системы, приведен на рис. 5. Видно, что при значениях  $Sh_\omega = 0.166 \dots 0.202$  средняя амплитуда колебаний  $A_{cp}$  резко возрастает. Данный результат соответствует явлению захвата частоты, при котором происходит синхронизация частоты схода вихрей  $Sh$  и частоты собственных колебаний механической системы  $Sh_\omega$ .

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. С применением подхода Галеркина построена система алгоритмов и расчетных схем для моделирования обтекания профиля в вихревых методах вычислительной гидродинамики, основанных на кусочно-постоянном и кусочно-линейном представлении интенсивности вихревого слоя, в том числе экономичные схемы.

2. Получены точные аналитические выражения для коэффициентов результирующих линейных систем для случая аппроксимации границы профиля прямолинейными панелями.

3. Разработаны алгоритмы вихревых методов, позволяющие учесть криволинейность панелей и обеспечить второй порядок точности моделирования поля скоростей вблизи обтекаемого профиля.

4. Создана программная платформа с открытым исходным кодом для моделирования двумерных течений и решения широкого класса задач вихревыми методами с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP, MPI, Nvidia CUDA.

## **Основные результаты диссертации опубликованы в работах**

1. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Оценка трудоемкости быстрого метода расчета вихревого влияния в методе вихревых элементов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 399–414. (1 п.л./0,5 п.л.)
2. Гречкин-Погребняков С.Р., Кузьмина К.С., Марчевский И.К. О реализации вихревых методов моделирования двумерных течений несжимаемой среды с использованием технологии CUDA // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2015. Т. 16. № 1. С. 165–176. (0,75 п.л./0,25 п.л.)
3. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С. О точности расчетных схем вихревых методов при моделировании обтекания профилей с угловой точкой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 234–249. (1 п.л./0,33 п.л.)
4. **Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. The modified numerical scheme for 2D flow-structure interaction simulation using meshless vortex element method // PARTICLES 2015: Proc. of the 4th Intern. Conf. Barcelona, 2015.** Р. 680–691. (0,69 п.л./0,34 п.л.)
5. **Kuzmina K., Marchevsky I., Moreva V. Parallel implementation of vortex element method on CPUs and GPUs // Procedia Computer Science, 2015. V. 66.** Р. 73–82. (0,63 п.л./0,21 п.л.)
6. Кузьмина К.С., Марчевский И.К. Об оценках вычислительной сложности и погрешности быстрого алгоритма в методе вихревых элементов // Труды ИСП РАН. 2016. Т. 28. № 1. С. 259–274. (1 п.л./0,5 п.л.)
7. **Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. High-order numerical scheme for vortex layer intensity computation in two-dimensional aero-hydrodynamics problems solved by vortex element method // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2016. No. 6.** Р. 93–109. (1,06 п.л./0,53 п.л.)
8. **Numerical scheme of the second order of accuracy for vortex methods for incompressible flow simulation around airfoils / K.S. Kuzmina [et al.] // Russian Aeronautics. 2017. V. 60. No. 3.** Р. 398–405. (0,5 п.л./0,12 п.л.)
9. **Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. High-order numerical scheme for vortex sheet approximation in vortex methods for 2D flow simulation // PARTICLES 2017: Proc. of 5th Intern. Conf. Hannover, 2017.** Р. 715–724. (0,62 п.л./0,31 п.л.)
10. **Accuracy comparison of different approaches for vortex sheet discretization on the airfoil in vortex particles method / K.S. Kuzmina [et al.] // PARTICLES 2017: Proc. of the 5th Intern. Conf. Hannover, 2017.** Р. 691–702. (0,75 п.л./0,19 п.л.)

**11.** Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact analytical formulae for linearly distributed vortex and source sheets influence computation in 2D vortex methods // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 918. Art. 012013. (0,56 п.л./0,19 п.л.)

**12.** Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Open source code for 2D incompressible flow simulation by using meshless Lagrangian vortex methods // ISPRAS 2017: Proc. of Ivannikov ISPRAS Open Conf. Moscow, 2017. P. 97–103. (0,44 п.л./0,15 п.л.)

**13.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018615579. VM2D — программный комплекс для моделирования двумерных течений несжимаемой среды вихревыми методами / К.С. Кузьмина, И.К. Марчевский, Е.П. Рятина. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11.05.2018.

**14.** Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods // Mathematical Models and Computer Simulations. 2018. V. 10. No. 3. P. 276–287. (0,75 п.л./0,25 п.л.)

**15.** Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Moreva V.S. On vortex sheet intensity computation for airfoils with angle point in vortex methods // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. 2018. V. 9. No. 2. P. 799–809. (0,69 п.л./0,23 п.л.)

**16.** Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Numerical simulation in 2D strongly coupled FSI problems for incompressible flows by using vortex method // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2027. Art. 040045. (0,56 п.л./0,19 п.л.)

**17.** Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. VM2D: Open source code for 2D incompressible flow simulation by using vortex methods // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 910. P. 251–265. (0,94 п.л./0,31 п.л.)

**18.** Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Soldatova I.A. Improved algorithm of boundary integral equation approximation in 2D vortex method for flow simulation around curvilinear airfoil // Математика и математическое моделирование. 2018. № 6. С. 22–51. (1,88 п.л./0,63 п.л.)

**19.** Marchevsky I., Kuzmina K., Soldatova I. Improved algorithm of boundary integral equation approximation in 2D vortex method for flow simulation around curvilinear airfoil // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2027. Art. 040048. (0,44 п.л./0,15 п.л.)

**20.** Ryatina E., Kuzmina K., Marchevsky I. On investigation and efficient software implementation of fast methods for vortex influence computation in 2D flow simulation // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2027. Art. 040051. (0,5 п.л./0,17 п.л.)

Подписано к печати                            Заказ №  
Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

---

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана