

На правах рукописи

**Сорокин Всеволод Григорьевич**

**Математическое моделирование  
и численный анализ нелинейных систем  
реакционно-диффузионного типа с запаздыванием**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'V. Sorokin', is positioned in the lower-left quadrant of the page.

Москва — 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Научный доктор физико-математических наук, профессор  
руководитель: **Полянин Андрей Дмитриевич**

Официальные **Дородницын Владимир Анатольевич,**  
оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук», главный научный сотрудник

**Кащенко Илья Сергеевич,**  
кандидат физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова» (математический факультет), доцент кафедры математического моделирования, заместитель декана по научной работе

Ведущая федеральное государственное бюджетное образовательное  
организация: учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет»

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г. в \_\_\_ часов \_\_\_ минут на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, зал Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана и на сайте [www.bmstu.ru](http://www.bmstu.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат технических наук, доцент



Аттетков  
Александр  
Владимирович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Математические модели с запаздыванием используются в динамике популяций, биологии, теории массо- и теплопереноса, биохимии, биомедицине, механике, гидродинамике, физике, химии, теории управления, математической теории искусственных нейронных сетей, экологии, экономике и других областях (Р. Беллман, В.А. Дородницын, С.А. Кащенко, В.Б. Колмановский, А.Д. Мышкис, А.Д. Полянин, Л.Э. Эльсгольц, J. Hale, J. Huang, G.E. Hutchinson, Y. Kuang, M.C. Mackey, A.J. Nicholson, H.L. Smith, K. Wang, J. Wu и др.) и позволяют учитывать предыдущую эволюцию процесса, либо его отдельные состояния в конкретные моменты в прошлом. Наиболее простые пространственно однородные модели с запаздыванием описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Анализ и решение ОДУ с запаздыванием по сложности сопоставимы с анализом и решением уравнений в частных производных без запаздывания. Добавление диффузионного члена в модели с ОДУ дает возможность учесть распределение частиц, объектов или субстанции в пространстве и позволяет описывать более сложные явления или процессы.

Запаздывание может возникать ввиду различных причин. Например, в биологии и биомеханике запаздывание связано с ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине — в задачах о распространении инфекционных заболеваний — время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежутком времени от момента заражения до первых признаков проявления болезни); в динамике популяций запаздывание возникает из-за того, что особи вступают в репродуктивный период не сразу после рождения, а лишь по достижении определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с ограниченной скоростью распространения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов.

Многие методы численного интегрирования уравнений в частных производных без запаздывания допускают обобщения и модификации, после чего уже могут применяться для решения более сложных начально-краевых задач с запаздыванием (Д.А. Брацун, В.Г. Пименов, С.Т. Baker, A. Bellen, Z. Jackiewicz, C.V. Pao, Q. Zhang, B. Zubik-Kowal и др.). В литературе наибольшее распространение получили два класса методов: конечно-разностные методы и метод прямых (the method of lines). Метод прямых основан на аппроксимации рассматриваемого уравнения в частных производных с запаз-

дыванием системой ОДУ с запаздыванием, которая может быть жесткой. Полученную систему ОДУ с запаздыванием можно решить с помощью различных специализированных численных методов, однако, по-видимому, в настоящее время наиболее перспективным и экономичным путем здесь является привлечение численных методов, встроенных в последние версии пакетов вычислительных программ Mathematica и Maple (или MATLAB), которые пока не справляются с решением уравнений в частных производных с запаздыванием, но достаточно хорошо интегрируют такие системы ОДУ.

Численный анализ нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием (и более сложных моделей с запаздыванием) сопряжен с рядом специфических трудностей, к которым можно отнести возможную негладкость и неустойчивость решений, необходимость хранения большого массива данных и др. Важно отметить, что до сих не проводилось сопоставление результатов применения численных методов решения подобных задач с точными тестовыми решениями. Указанное обстоятельство связано с тем, что до середины 2012 года было известно всего лишь два уравнения реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, допускающих невырожденные инвариантные решения (только одно из них выражалось через элементарные функции), отличные от решений типа бегущей волны (S.V. Meleshko, 2008). Поэтому большой теоретический и практический интерес представляет собой разработка и развитие методов построения точных тестовых решений и тестовых задач нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, анализ качественных особенностей таких уравнений и разработка эффективных численных методов их интегрирования, а также использование тестовых задач для оценки точности и области применимости численных решений уравнений с запаздыванием.

**Цель работы** — разработка обобщенных нелинейных математических моделей реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, построение для них точных тестовых задач и решений, разработка и апробация соответствующих численных методов, основанных на комбинации метода прямых и нескольких методов численного решения систем ОДУ с запаздыванием.

**Научная новизна.** Разработаны новые обобщенные нелинейные математические модели реакционно-диффузионного типа с запаздыванием; с помощью комбинации методов обобщенного разделения переменных и функциональных связей получены новые точные тестовые решения различных классов уравнений в частных производных с запаздыванием. Впервые выявлены

качественные особенности различных классов задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, связанные с линейной и нелинейной неустойчивостью решений и некорректностью некоторых задач по Адамару и др. Впервые проведено обширное сопоставление численных и аналитических решений ряда тестовых задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, допускающих решения в элементарных функциях; численные решения получены в среде Mathematica с помощью комбинации метода прямых и трех методов численного интегрирования систем ОДУ с запаздыванием.

**Практическая значимость.** Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы для аналитического и численного решения различных классов реакционно-диффузионных и более сложных нелинейных задач с запаздыванием, для оценки точности и области применимости существующих методов численного интегрирования нелинейных уравнений в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием, а также для разработки и развития новых методов исследования таких уравнений.

**Методы исследования.** При формулировке и решении задач диссертационной работы использовались различные классы математических методов: метод обобщенного разделения переменных, метод функциональных связей, методы линейной теории устойчивости, метод прямых, методы численного интегрирования ОДУ с запаздыванием, численные и графические методы, встроенные в программный пакет Mathematica.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Разработаны обобщенные диффузионно-логистические и более сложные нелинейные математические модели параболического и гиперболического типов с запаздыванием (которые включают реакционно-диффузионные уравнения, уравнения Клейна — Гордона, нелинейные телеграфные уравнения и др.).

2. Развита новая модификация метода функциональных связей и доказаны некоторые леммы, которые позволяют конструктивно строить тестовые решения нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием. Получены точные решения различных классов нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием. Сформулированы тестовые задачи, решения которых выражаются в элементарных функциях.

3. Выявлены качественные особенности различных классов задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, связанные с линейной и

нелинейной неустойчивостью решений и некорректностью некоторых задач по Адамару и др.

4. Разработаны и апробированы программы численного интегрирования реакционно-диффузионных задач параболического и гиперболического типов с запаздыванием с помощью комбинации метода прямых и трех методов решения ОДУ с запаздыванием, встроенных в пакет Mathematica. Выполнено сопоставление точных тестовых решений (включая неустойчивые) и численных решений.

**Достоверность и обоснованность научных результатов** обеспечивается строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов вычислительных экспериментов с построенными в данной работе точными аналитическими решениями тестовых задач.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях: XXVIII Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-28)» (Саратов, 2015), IV конференция «Методы математической физики и математическое моделирование физических процессов» (Москва, 2015), V Международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование» (Москва, 2016), Международная конференция «22nd International Congress of Chemical and Process Engineering (CHISA 2016)» (Прага, Чехия, 2016), LXIX и LXX Научные конференции «Герценовские чтения», секция «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений» (Санкт-Петербург, 2016, 2017), VI Международная конференция «Проблемы математической физики и математическое моделирование» (Москва, 2017), Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах — 2017» (Пермь, 2017), XXX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-30)» (Санкт-Петербург, 2017), Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2017).

**Основные научные результаты диссертации отражены** в 12 научных работах в журналах, которые включены в Перечень рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертации, из них 5 публикаций включены в международные базы цитирования Web of Science и Scopus.

**Личный вклад автора.** Постановки задач, обсуждение и интерпретация результатов велись совместно с научным руководителем и соавтором. Подавляющее большинство тестовых решений и формулировки всех тестовых задач принадлежат автору (в диссертацию включены только те решения, которые получены соискателем). Разработка алгоритмов программ, постановка и реализация численных экспериментов, анализ результатов прямого численного анализа принадлежат лично автору.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 143 страницах, содержит 14 иллюстраций и 9 таблиц. Список литературы содержит 186 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы, описаны цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы. Сделан обзор публикаций по теме диссертации.

**В первой главе** описываются нелинейные реакционно-диффузионные модели с запаздыванием, развиваются точные методы исследования уравнений в частных производных с запаздыванием, которые затем применяются для построения точных тестовых решений этих уравнений.

В диссертации рассматриваются классы нелинейных моделей с запаздыванием, которые описываются следующими уравнениями:

1. Обобщенная модель реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$ ,  $F(u, w)$  — кинетическая функция,  $\tau > 0$  — время запаздывания. Модель (1) включает в себя как частные случаи реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием ( $\varepsilon = 0, \sigma = 1$ ), уравнения Клейна — Гордона с запаздыванием ( $\varepsilon = 1, \sigma = 0$ ), нелинейные телеграфные уравнения с запаздыванием.

2. Более сложные обобщенные модели с запаздыванием и нелинейным коэффициентом переноса или с переменным запаздыванием  $\tau = \tau(t)$ .

3. Некоторые нелинейные 2D и 3D модели и многокомпонентные модели.

В математических моделях с запаздыванием начальные данные задаются на отрезке  $-\tau \leq t \leq 0$  (или  $0 \leq t \leq \tau$ ), а граничные условия ставятся так же, как и для моделей без запаздывания.

Ниже термин *точные тестовые решения* нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием применяется в случаях, когда решение выражается через элементарные функции и неопределенные (и/или определенные) интегралы или через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или ОДУ с запаздыванием (или систем таких уравнений). Допустимы также комбинации указанных решений.

Для построения точных тестовых решений используется комбинация методов обобщенного разделения переменных и функциональных связей (А.Д. Полянин, 2013). Решения ищутся в виде суммы

$$u = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t), \quad (2)$$

где функции  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(t)$  определяются в ходе дальнейшего анализа после подстановки выражения (2) в рассматриваемое уравнение.

Для класса обобщенных уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием (1) с кинетической функцией

$$F(u, w) = uf(z) + wg(z) + h(z), \quad z = z(u, w) \quad (3)$$

ищутся решения с обобщенным разделением переменных вида (2), удовлетворяющие одновременно уравнению (3) и одной из двух *функциональных связей* (метод функциональных связей):

$$z(u, w) = p(x) \quad \text{или} \quad z(u, w) = q(t). \quad (4)$$

Эти связи представляют собой разностные уравнения относительно  $t$ , где  $x$  играет роль свободного параметра. Функции  $p(x)$  и  $q(t)$  зависят от  $x$  и  $t$  неявно (выражаются в терминах  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(t)$ , соответственно). Частное решение любого из разностных уравнений (4) с учетом (2) определяет допустимый вид точного решения, окончательный вид которого находится путем подстановки выражения (2) в рассматриваемое уравнение с запаздыванием (1), (3).

Описанный метод позволил найти много точных решений обобщенных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. В частности, были получены точные решения трех классов уравнений достаточно общего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{tt} + \sigma u_t &= au_{xx} + uf(w/u), \quad w = u(x, t - \tau), \\ \varepsilon u_{tt} + \sigma u_t &= au_{xx} + uf(u \pm kw) + wg(u \pm kw) + h(u \pm kw), \\ \varepsilon u_{tt} + \sigma u_t &= au_{xx} + uf(u^2 + w^2) + wg(u^2 + w^2), \end{aligned}$$

где  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $h(z)$  — произвольные функции. Кроме того, были построены другие точные решения уравнений с запаздыванием вида (1) и более сложных уравнений с нелинейным коэффициентом переноса или с переменным запаздыванием  $\tau = \tau(t)$ .

Сформулированы и доказаны некоторые леммы, которые позволяют строить точные решения нелинейных 2D и 3D уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием.

**Во второй главе** исследуются качественные особенности нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием, которые могут существенно осложнить численный анализ соответствующих моделей. Описаны принципы построения тестовых задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием.

*Линейная неустойчивость решений.* Обсуждаются вопросы о линейной устойчивости (или неустойчивости) решений начально-краевых задач для уравнения (1) с граничными условиями Дирихле. Выведено дисперсионное (характеристическое) уравнение для спектрального параметра и исследованы его свойства. Получен достаточный признак линейной неустойчивости стационарных решений.

Показано, что любые стационарные решения  $u = u_0 = \text{const}$  нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными

$$u_t = aw_{xx} + f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau) \quad (5)$$

с произвольной кинетической функцией  $f(u, w)$ , удовлетворяющей условию  $f(u_0, u_0) = 0$ , являются неустойчивыми (в линейном приближении). В частном случае  $f \equiv 0$  уравнение (5) определяет линейную дифференциально-разностную модель теплопроводности Каттанео — Вернотте, в которой введено обозначение  $u(x, t) = \theta(x, t + \tau)$ , где  $\theta$  — температура.

*Нелинейная неустойчивость решений.* Рассмотрим класс обобщенных уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = au_{xx} + bu - b \frac{u - kw}{1 - k} + f\left(\frac{u - kw}{1 - k}\right), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (6)$$

где  $f(z)$  — произвольная функция (отличная от константы),  $\tau > 0$  — время запаздывания,  $a > 0$ ,  $k > 0$ ,  $b$  — свободные параметры. При  $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = 1$  и при отсутствии запаздывания, что соответствует значениям  $\tau = 0$  или  $k = 0$ , уравнение (6) переходит в обычное уравнение теплопроводности с нелинейным источником  $u_t = au_{xx} + f(u)$ .

Пусть  $u_0 = u_0(x, t)$  — решение уравнения (6). Тогда функция

$$u_1 = u_0 + \delta e^{ct} \sin(\gamma x), \quad c = (\ln k)/\tau, \quad \gamma = \sqrt{(b - \sigma c - \varepsilon c^2)/a}, \quad (7)$$

где  $\delta$  — произвольная постоянная и  $b - \sigma c - \varepsilon c^2 > 0$ , также является решением уравнения (6) (проверяется подстановкой).

Пусть выполнены условия

$$k > 1, \quad b > 0, \quad \tau > \tau_* = \frac{\ln k}{2b} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\varepsilon b}). \quad (8)$$

Тогда из (7) следует, что  $|u_1 - u_0| \leq \delta$  и  $|(u_1)_t - (u_0)_t| \leq c\delta$  при  $-\tau \leq t \leq 0$ . Поэтому для достаточно малого  $\delta > 0$  начальные данные для решений  $u_0$  и  $u_1$  сколь угодно мало отличаются друг от друга, однако при  $t \rightarrow \infty$  эти решения в точках  $x = \pi(2n + 1)/(2\gamma)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) будут неограниченно «разбегаться» за счет экспоненциального множителя  $e^{ct}$  в формуле (7). В диссертации показано, что при выполнении условий (8) некоторые начально-краевые задачи для уравнения (6) будут некорректными по Адамару для любой кинетической функции  $f(u)$ .

*Тестовые задачи.* В Таблице 1 приведены уравнения и точные аналитические решения трех тестовых задач. Начальные данные при  $-\tau \leq t \leq 0$  и граничные условия при  $x = 0$  и  $x = 1$  для этих задач получаются из приведенных решений  $U_m(x, t)$  и здесь опускаются. Эти и другие задачи использованы в последующих главах для тестирования применяемых численных методов.

Таблица 1.

Некоторые тестовые задачи с запаздыванием ( $0 \leq x \leq 1, t > 0$ )

№	Уравнение	Решение
1	$u_t = au_{xx} + bu[1 - s(u - kw)]$	$u = U_1(x, t) \equiv e^{ct} [\cos(\pi x/2) + 2 \sin(\pi x/2)],$ $k > 0, \quad b = (\ln k)/\tau + a\pi^2/4, \quad c = (\ln k)/\tau$
2	$u_t = au_{xx} + bu - s(u - kw)^2$	$u = U_2(x, t) \equiv 1 + \frac{e^{ct+1}}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x}), \quad c = (\ln k)/\tau$ $k > 0, \quad k \neq 1, \quad b = (\ln k)/\tau - a, \quad s = b/(1 - k)^2$
3	$u_{tt} = au_{xx} + u(u - w)$	$u = U_3(x, t) \equiv \sin(\beta x/\sqrt{a}) \cos(\beta t), \quad \beta = 2\pi/\tau$

**Третья глава** посвящена численному анализу нелинейных реакционно-диффузионных задач *параболического* типа с запаздыванием. Тестовые задачи используются для оценки области применимости методов, основанных на комбинации метода прямых для уравнений с частными производными и нескольких методов численного интегрирования ОДУ с запаздыванием, встроенных в программный пакет Mathematica 11.2.0.

Приведем краткое описание метода прямых. Рассмотрим одномерную начально-краевую задачу для нелинейного уравнения реакционно-диффузи-

онного типа с запаздыванием достаточно общего вида

$$\begin{aligned} u_t &= [p(x, t, u, w)u_x]_x + q(x, t, u, w)u_x + f(x, t, u, w), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \\ u(x, t) &= \varphi(x, t), \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u(0, t) &= \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $w = u(x, t - \tau)$ . Второе слагаемое в правой части уравнения соответствует возможной конвективной (движущейся) составляющей модели; в частности, при  $p(x, t, u, w) = 1$ ,  $q(x, t, u, w) = -u$  уравнение (9) является уравнением Бюргерса с нелинейным источником и запаздыванием.

Введем пространственную сетку  $x_m = mh$ , где  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $h = 1/M$  — шаг сетки. Аппроксимируя производные по  $x$  разностными аналогами и записывая уравнение в точке  $x_m$ , сводим задачу (9) к системе ОДУ:

$$\begin{aligned} (u_m)'_t &= \delta_x [p_m \delta_x u_m] + q_m \delta_x u_m + f_m, \quad m = 1, \dots, M - 1, \quad 0 < t \leq T; \\ u_m(t) &= \varphi(x_m, t), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ u_0 &= \psi_0(t), \quad u_M = \psi_1(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $u_m = u_m(t) = u(x_m, t)$ ,  $p_m = p(x_m, t, u_m, w_m)$ ,  $q_m = q(x_m, t, u_m, w_m)$ ,  $f_m = f(x_m, t, u_m, w_m)$ ,  $w_m = u(x_m, t - \tau)$ ,  $T$  — временной интервал вычислений,  $\delta_x$  — разностный оператор, который определяется так:

$$\delta_x u_m = \frac{1}{h}(u_{m+1} - u_m), \quad \delta_x [p_m \delta_x u_m] = \frac{1}{h^2}[p_m(u_{m+1} - u_m) - p_{m-1}(u_m - u_{m-1})].$$

Система (10) содержит  $M - 1$  неизвестную функцию  $u_m(t)$  и столько же уравнений, а также две известные функции  $u_0(t)$ ,  $u_M(t)$ . Отметим, что полученная система ОДУ часто является жесткой и ее решение должно вестись соответствующими численными методами.

Функция  $w_m(t)$  является известной и обозначает функцию  $u_m(t - \tau)$ , которая была вычислена на несколько временных слоев ранее. Численное интегрирование уравнений с запаздыванием, в отличие от уравнений без запаздывания, требует хранения данных со всех временных слоев из промежутка от  $t_n - \tau$  до  $t_{n-1}$ , где  $t_n$  — расчетный временной слой, что приводит к существенным затратам оперативной памяти.

Основным методом численного интегрирования ОДУ и систем ОДУ, в том числе с запаздыванием, в среде Mathematica является команда (встроенная функция) `NDSolve`. Шаг по времени выбирается командой `NDSolve` автоматически. Без дополнительных опций команда `NDSolve` пытается решить систему комплексным методом, но обычно не справляется с решением жестких задач, выдавая ошибку и требуя указать конкретный метод решения. Опция `Method` команды `NDSolve` позволяет использовать один из встроен-

ных методов решения жестких систем ОДУ: метод из класса неявных методов Рунге — Кутты или неявный многошаговый метод Гира, основанный на формуле дифференцирования назад (BDF — Backward differentiation formula). Для класса методов Рунге — Кутты доступны в числе прочего выбор коэффициентов и порядка локальной точности.

Численные решения всех тестовых задач были получены путем применения метода прямых в комбинации с методом Рунге — Кутты второго порядка или с методом Гира на интервале  $0 \leq t \leq T = 50\tau$  для трех времен запаздывания  $\tau = 0.05$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $\tau = 0.5$  (в ряде случаев дополнительно использовался метод Рунге — Кутты четвертого порядка, а также рассматривались значения  $\tau = 1$  и  $\tau = 5$ ). Некоторые тестовые задачи из-за быстрого роста искомой величины (либо из-за неустойчивости решения) не удается решить на столь большом интервале: процедура интегрирования прерывается с ошибкой и указанием времени прерывания расчета. Тем не менее, в большинстве случаев адекватное численное решение задачи можно получить, если подходящим образом сократить рассматриваемый временной интервал вычислений.

Отметим, что применяемые методы команды `NDSolve` были предварительно протестированы на трех различных тестовых задачах для нелинейных ОДУ с запаздыванием при  $\tau = 0.05$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $\tau = 0.5$  на интервале  $0 \leq t \leq 50\tau$ . Было установлено, что методы работают с хорошей точностью в задачах, где отсутствует неустойчивость и быстрая осцилляция решений.

*Тестовая задача 1.* Решение  $u = U_1(x, t)$  тестовой задачи 1 при  $a = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $s = 0.2$  является монотонно затухающим по времени (см. строку № 1 в Таблице 1). Относительная погрешность численного решения становится заметной лишь при достаточно больших временах, когда решение практически равно нулю. Для обоих методов с увеличением времени запаздывания  $\tau$  (от 0.05 до 5.0) увеличивается временной интервал, на котором методы работают с малой относительной погрешностью. При  $M = 100$  численное решение, полученное методом Рунге — Кутты, начинает не совпадать с точным по достижении абсолютных значений порядка  $10^{-5}$  при  $\tau = 0.05$  и  $10^{-20}$  при  $\tau = 5$ ; численное решение, полученное методом Гира, начинает отклоняться по достижении значений порядка  $10^{-6}$  при  $\tau = 0.05$  и  $10^{-10}$  при  $\tau = 5$ . Абсолютные погрешности численных решений представлены в Таблице 2.

*Тестовая задача 2.* Решение  $u = U_2(x, t)$  тестовой задачи 2 при  $a = 1$ ,  $k = 0.5$  с увеличением  $t$  быстро выходит на стационарный режим  $\lim_{t \rightarrow \infty} u = 1$  (см. строку № 2 в Таблице 1). При умеренных временах запаздывания,

Таблица 2.

Абсолютные погрешности численных решений тестовой задачи 1 при  $a = 1$ ,  
 $k = 0.5$ ,  $s = 0.2$  на интервале  $0 \leq t \leq T = 50\tau$

Метод	$M$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 5$
Рунге — Кутты второго порядка	10	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
	50	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$
	100	$4.5 \cdot 10^{-6}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
	500	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
Гира	10	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
	50	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$
	100	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-6}$	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
	500	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-7}$	$6.4 \cdot 10^{-7}$

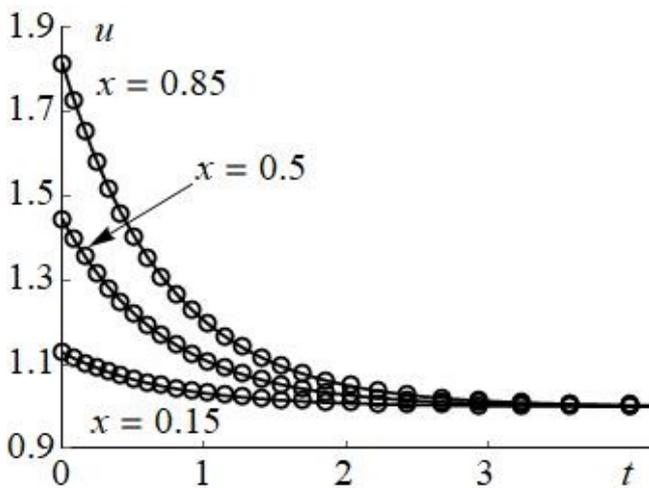


Рис. 1. Точные решения (сплошные линии) и полученные с помощью комбинации метода прямых и метода Рунге — Кутты второго порядка численные решения (кружочки) тестовой задачи 2 при  $M = 100$ ,  $a = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $\tau = 0.5$  и  $x = 0.15$ ,  $x = 0.5$ ,  $x = 0.85$

например при  $\tau = 0.5$ , оба численных метода демонстрируют хорошую аппроксимацию точного решения на всем интервале  $0 \leq t \leq T = 50\tau$ . Соответствующие графики точных решений и полученных методом Рунге — Кутты второго порядка численных решений системы ОДУ при  $M = 100$  для тестовой задачи 2 представлены на Рис. 1. Графики численных решений, полученных методом Гира, выглядят аналогично и здесь не приводятся. В Таблице 3 представлены относительные погрешности численных решений, полученных методами Рунге — Кутты второго порядка и Гира при умеренных и больших временах запаздывания на отрезке  $0 \leq t \leq T = 50\tau$ .

На Рис. 2,а и 2,б приведены графики зависимостей численных и точных решений от времени при фиксированном  $x = 0.5$ , при  $a = 1$ ,  $k = 0.5$  и малых временах запаздывания  $\tau = 0.05$  и  $\tau = 0.1$ . Выбор средней точки  $x = 0.5$  в области изменения пространственной переменной связан с тем, что именно в этой точке наблюдалось максимальное отклонение численного решения от точного. При  $\tau = 0.05$  оба используемых численных метода

Относительные погрешности численных решений тестовой задачи 2 при  $a = 1$ ,  $k = 0.5$  на интервале  $0 \leq t \leq T = 50\tau$

Метод Рунге — Кутты второго порядка				Метод Гира			
$M$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 5$	$M$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 5$
10	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$5.4 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$	10	$7.2 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$
50	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	50	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$
100	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$	100	$6.3 \cdot 10^{-7}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$
500	$8.2 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	500	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-8}$

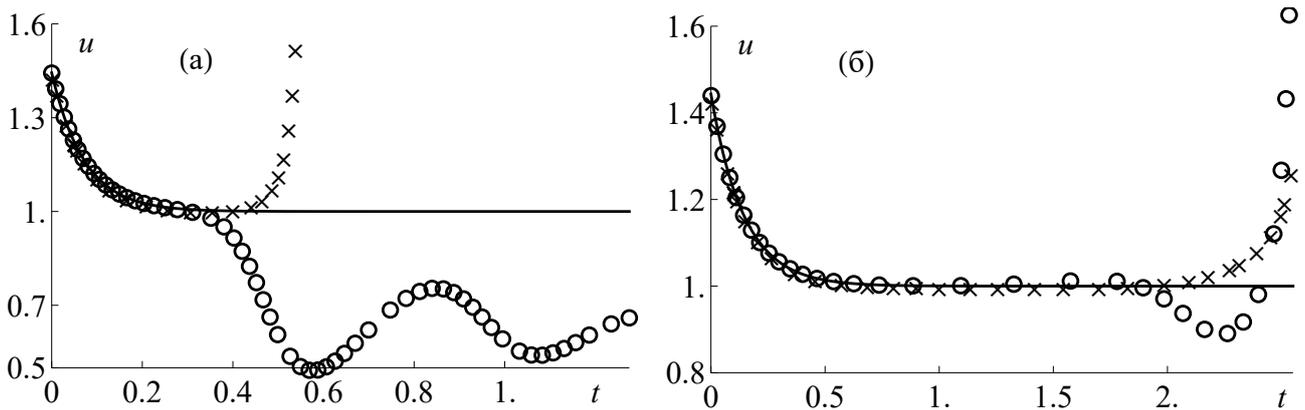


Рис. 2. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (метод Рунге — Кутты — кружочки, метод Гира — крестики) тестовой задачи 2 при  $a = 1$ ,  $k = 0.5$  в точке  $x = 0.5$  для  $M = 100$  и двух времен запаздывания:

(а)  $\tau = 0.05$  и (б)  $\tau = 0.1$

адекватно работают только на очень коротком начальном участке (немного не успевая выйти на асимптоту); затем метод Рунге — Кутты второго порядка дает уходящую вниз немонотонную колеблющуюся кривую, не имеющую ничего общего с точным решением, а метод Гира приводит к кривой, которая сильно отклоняется от точного решения, резко поднимаясь вверх. При  $\tau = 0.1$  метод Рунге — Кутты и метод Гира обеспечивают достаточно точную аппроксимацию искомого решения на довольно значительном интервале времени (успевая выйти на асимптоту), причем метод Гира имеет немного больший диапазон применимости по  $t$ . Зависимость от времени погрешности численного решения, полученного методом Гира, является монотонной, в отличие от таковой для метода Рунге — Кутты. В обоих случаях погрешности резко возрастают через некоторое время после установления стационарного режима, а затем выполнение программы прерывается с ошибкой.

Чтобы объяснить причину неудовлетворительных результатов численного интегрирования тестовой задачи 2 при малых временах запаздывания, проведем анализ линейной устойчивости ее предельного состояния. Данное

реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием (см. строку № 2 в Таблице 1) допускает стационарное решение  $u_0 = 1$ , которое соответствует предельному состоянию этой задачи. Рассмотрим возмущенные решения вида

$$u = 1 + \delta e^{-\lambda t} \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где  $\delta$  — малый параметр. Подставив (11) в уравнение и отбросив члены порядка  $\delta^2$  и выше, получим дисперсионное уравнение для определения  $\lambda$ :

$$(1 - k)\lambda - a(\pi n)^2(1 - k) - b(1 + k) + 2bke^{\lambda\tau} = 0, \quad b = -a + (\ln k)/\tau. \quad (12)$$

При  $a = n = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $\tau = 0.05$  дисперсионное уравнение (12) имеет отрицательный корень  $\lambda \approx -27.0213$ . Отсюда следует, что второй член в формуле (11) экспоненциально растет при  $t \rightarrow \infty$  и рассматриваемое стационарное решение данного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием при  $\tau = 0.05$  является неустойчивым в линейном приближении. При увеличении времени запаздывания до значения  $\tau_* \approx 0.09153$  (величины остальных параметров не меняются) также имеется один или два действительных отрицательных корня трансцендентного уравнения (12), а при  $\tau > \tau_*$  это уравнение не имеет действительных отрицательных корней. При  $a = n = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $\tau = 0.1$  дисперсионное уравнение (12) имеет комплексный корень с отрицательной действительной частью  $\text{Re } \lambda = -4.38498$ ; поэтому данное стационарное решение также является неустойчивым в линейном приближении. При  $\tau = 0.5$ ,  $\tau = 1$ ,  $\tau = 5$  стационарные решения устойчивы с  $\text{Re } \lambda > 0$ .

Таким образом, неудовлетворительные результаты численного анализа тестовой задачи 2 при малых временах запаздывания не связаны с недостатками используемых численных методов, а обусловлены неустойчивостью предельного состояния рассматриваемой модели. Интересно отметить, что применяемые численные методы даже в неустойчивой области неплохо описывают динамическую часть процесса (до выхода на стационарный режим).

Численно интегрировались также две другие нелинейные задачи реакционно-диффузионного типа с запаздыванием.

**Четвертая глава** посвящена численному анализу нелинейных реакционно-диффузионных задач *гиперболического* типа с запаздыванием. Описывается процедура интегрирования методом прямых обобщенного нелинейного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием, которое включает в себя как частные случаи все уравнения, рассматриваемые в предыдущих главах; приводится схема алгоритма программы. Для применения метода прямых к уравнениям гиперболического типа вводим вторую искомую функцию

$v = u_t$ . Затем аналогично процедуре, описанной ранее, вводим пространственную сетку и, аппроксимируя производные по  $x$  разностными аналогами и записывая уравнение в точке  $x_m$ , сводим исходное уравнение к системе ОДУ первого порядка с запаздыванием, состоящей из  $2M - 2$  уравнений для  $u_m$  и  $v_m$ .

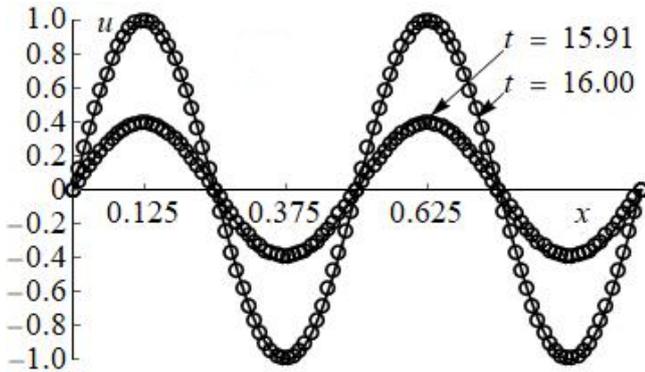


Рис. 3. Точные решения (сплошные линии) и полученные с помощью комбинации метода прямых и метода Рунге — Кутты второго порядка численные решения (кружочки) тестовой задачи 3 при  $M = 200$ ,  $a = 1$ ,  $\tau = 0.5$  в моменты времени  $t = 15.91$  и  $t = 16$

*Тестовая задача 3.* Решение  $u = U_3(x, t)$  тестовой задачи 3 для нелинейного уравнения Клейна — Гордона с запаздыванием является периодическим по обоим переменным (см. строку № 3 в Таблице 1). При умеренных временах запаздывания  $\tau = 0.5$  методы Рунге — Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира показывают приемлемую аппроксимацию точного решения для  $M = 100$  с абсолютной погрешностью 0.08 на отрезке  $0 \leq t \leq 20\tau$  (при  $M = 200$  абсолютная погрешность на этом отрезке уменьшается в четыре раза). При уменьшении времени запаздывания

период функции  $u = U_3(x, t)$  уменьшается и требуется больше точек по пространству (больше уравнений системы) для достижения приемлемой погрешности. Графики точного решения и полученного с помощью комбинации метода прямых и метода Рунге — Кутты второго порядка численного решения системы ОДУ при  $M = 200$ ,  $a = 1$ ,  $\tau = 0.5$  для тестовой задачи 3 представлены на Рис. 3. Графики численных решений, полученных другими методами, выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Численно интегрировались также три другие нелинейные задачи гиперболического типа с запаздыванием.

## Основные результаты диссертационной работы

1. Разработаны обобщенные диффузионно-логистические и более сложные нелинейные математические модели параболического и гиперболического типов с запаздыванием (которые включают реакционно-диффузионные

уравнения, уравнения Клейна — Гордона, нелинейные телеграфные уравнения).

2. Развита новая модификация метода функциональных связей и доказаны некоторые утверждения, которые позволяют конструктивно строить тестовые решения нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием. Описанные точные решения содержат ряд свободных параметров (которые можно варьировать) и используются для формулировки тестовых задач, допускающих решения в элементарных функциях. Описаны принципы построения и выбора тестовых задач с запаздыванием.

3. Выявлены качественные особенности различных классов задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, связанные с линейной и нелинейной неустойчивостью решений и некорректностью некоторых задач по Адамару и др.

4. Разработаны программы численного интегрирования уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, основанные на комбинации метода прямых для уравнений с частными производными и трех методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, встроенных в пакет Mathematica. Выполнено обширное сопоставление численных и точных решений (включая неустойчивые) тестовых задач. Установлено, что разработанные программы позволяют с высокой точностью интегрировать начально-краевые задачи, описываемые нелинейными уравнениями параболического и гиперболического типов с запаздыванием в области некритических значений параметров, соответствующих устойчивым решениям.

#### **Основные результаты диссертации отражены в работах:**

1. Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2014. Т. 3. № 2. С. 141–148. (1,1 п.л./0,7 п.л.).

2. Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Вязьмин А. В. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: Точные решения, глобальная неустойчивость // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 4. С. 53–73. (1,8 п.л./0,7 п.л.).

3. Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Точные решения типа бегущей волны // Вестник Национального исследовательского

го ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4. № 2. С. 119–126. (1,2 п.л./0,7 п.л.).

4. Polyaniin A. D., Sorokin V. G., Vyazmin A. V. Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2015. Vol. 49. No. 5. P. 622–635. (2,4 п.л./1,0 п.л.).

5. Сорокин В. Г. Точные решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2015. Т. 4. № 6. С. 393–500. (1,1 п.л.).

6. Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55. (1,9 п.л./1,0 п.л.).

7. Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Численные методы и тестовые задачи // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6. № 2. С. 126–142. (2,1 п.л./1,2 п.л.).

8. Vyazmin A. V., Sorokin V. G. Exact solutions to nonlinear delay differential equations of hyperbolic type // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). 2017. Vol. 788. 012037. (0,5 п.л./0,3 п.л.).

9. Polyaniin A. D., Sorokin V. G. Nonlinear reaction-diffusion equations with delay: Some theorems, test problems, exact and numerical solutions // Journal of Physics: Conference Series (JPCS). 2017. Vol. 937. 012041. (0,5 п.л./0,3 п.л.).

10. The heat and mass transfer modeling with time delay / V. G. Sorokin [et al.] // Chemical Engineering Transactions. 2017. Vol. 57. P. 1465–1470. (0,8 п.л./0,2 п.л.).

11. Polyaniin A. D., Sorokin V. G., Vyazmin A. V. Reaction-diffusion models with delay: some properties, equations, problems, and solutions // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2018. Vol. 52. No. 3. P. 334–348. (2,1 п.л./0,8 п.л.).

12. Сорокин В. Г., Полянин А. Д. Численное интегрирование нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием методом прямых // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2018. Т. 7. № 3. С. 212–228. (1,9 п.л./1,2 п.л.).