На правах рукописи

Хан Зо Тун

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТОВ ПРИ ПОМОЩИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Пугачев Олег Всеволодович**

Официальные оппоненты: **Колесник Сергей Александрович,** доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры вычислительной математики и программирования

Бобылев Александр Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», доцент кафедры теории упругости

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «___» _________ 2018 г. в ___ час. ___ мин. на заседании диссертационного совета Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, зал Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте (www.bmstu.ru) Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Автореферат разослан «____» ___________ 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат технических наук, доцент — Аттетков Александр Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Многие физические задачи приводят к уравнениям в частных производных параболического типа. Для решения таких уравнений применяются разнообразные методы: сеточные, метод Фурье, вариационные. Однако, если тело имеет сложную форму или состоит из различных материалов (композит), эти методы трудно реализуемы. В таких случаях может оказаться более эффективным так называемый метод Монте-Карло — моделирование случайных событий, по параметрам распределения которых можно найти значения интересующих нас величин.

Композит может обладать новыми свойствами по сравнению со свойствами своих компонентов. По структуре можно разделить композиты на зернистые, волокнистые и слоистые. Исследованию теплопроводности таких тел посвящены работы Г.Н. Дульнева, Ю.П. Заричняка, В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина, Н.С. Солтанова, Л.П. Хорошуна, Т.Д. Шермергора и других авторов. Математические модели, описывающие процесс теплопроводности в композите, могут быть применены для оценки электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости композита.

Основная тема данной работы — исследование теплопроводности композитов. Для композита с шаровыми включениями удается построить адекватные математические модели, достаточно достоверно прогнозирующие зависимость его эффективного коэффициента теплопроводности (ЭКТ) от теплопроводности материалов матрицы и включений и от объемной концентрации включений. Одной из самых ранних можно считать формулу Рэлея (S.R. Rayleigh, 1892) для теплопроводности двухкомпонентного композита с шарообразными включениями:

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1} = \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2C_V(\lambda_2 - \lambda_1)}{2\lambda_1 + \lambda_2 - C_V(\lambda_2 - \lambda_1)}, \tag{1}$$

где λ_1 и λ_2 — теплопроводности материалов матрицы и включений, $\tilde{\lambda}$ — ЭКТ композита, C_V — объемная концентрация включений.

А. Миснар (1968) исследовал влияние формы включений и их ориентации. Параметрическое сопоставление ЭКТ композитов с различной формой включений, при их объемной концентрации в пределах 30%, показало, что различие в расчетных значениях ЭКТ для рассмотренных моделей не превышает 7,5%. Поэтому в большинстве работ, где исследуется теплопроводность зернистых композитов (например, У.Д. Кингери или А.Ф. Чудновского), форма этих частиц принята в виде шара.

В работе В.И.Большакова, И.В.Андрианова, В.В.Данишевского (2008) рассматриваются асимптотические методы расчета неоднородных композитных материалов с учетом микромеханических эффектов, вызванных особенностями внутренней структуры. Получены решения широкого круга задач, касающихся вычисления эффективных характеристик композитов.

В работе А.П. Янковского (2011) предложена численно-аналитическая методика моделирования теплофизического поведения пространственно армированных композитов. Для предельного случая проведено сравнение расчетных значений ЭКТ однонаправленно и перекрестно армированных композитов с экспериментальными данными. Показано удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных значений этих величин.

В работе Н.Н. Головина, В.С. Зарубина и Г.Н. Кувыркина (2012) были применены новые подходы к задаче оценки ЭКТ материала с включениями определенной формы из другого материала. Использовались методы вариационного исчисления, при этом рассматривалась упрощенная модель окрестности включения.

В нескольких работах В.С.Зарубина, Г.Н.Кувыркина и И.Ю.Савельевой (2012, 2013) с применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле получены верхняя и нижняя границы возможных значений ЭКТ. Выведена расчетная формула для оценки искомого ЭКТ этого материала во всем диапазоне возможного изменения объемной концентрации включений. По мере увеличения различия между коэффициентами теплопроводности включений и матрицы ширина полосы между нижней и верхней оценками возрастает, что может привести к увеличению возможной погрешности полученной расчетной зависимости.

В работе В.С. Зарубина, А.В. Котовича и Г.Н. Кувыркина (2012) применительно к перспективным конструкционным материалам современных энергетических установок, подверженных воздействию интенсивных тепловых нагрузок, построена математическая модель переноса тепловой энергии в композите с изотропной матрицей и анизотропными шаровыми включениями в предположении хаотической пространственной ориентации главных осей тензора теплопроводности материала включений. Получены оценки ЭКТ такого композита, в том числе с применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности. В предельном случае отсутствия матрицы эти оценки применимы к материалу, состоящему из анизотропных кристаллических зерен со статистически усредненной шаровой формой.

Возросшая мощность современных компьютеров позволяет применить принципиально другой подход к решению задачи об эффективной теплопроводности. Процесс теплопроводности можно моделировать при помощи диффузионных процессов, т. е. случайных блужданий виртуальных частиц тепловой энергии. Идея состоит в том, чтобы сформулировать удобно вычисляемую оценку температуропроводности, которая теоретически известна для однородного материала, и статистически оценивать ее для композитного материала.

Цель проведенных исследований — разработка методов математического моделирования эффективной теплопроводности композитов при помощи случайных блужданий.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач:**

1. Нахождение ЭКТ композита с шаровыми включениями. Проверка точности формулы Рэлея и гипотезы об одинаковости ЭКТ при упорядоченном и хаотичном расположении включений.

2. Проверка гипотезы об изотропности теплопроводности в случае анизотропного композита с эллипсоидными включениями при различных отношениях теплопроводности материалов матрицы и включений и формах включений.

3. Нахождение ЭКТ композита с параллельными цилиндрическими включениями, расположенными упорядоченно или хаотично, в поперечном направлении, и проверка гипотезы о совпадении полученных коэффициентов.

Методы исследования. При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: математической теории теплопроводности, теории случайных процессов, математической статистики.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Разработана и численно реализована математическая модель процесса теплопроводности, использующая случайные блуждания виртуальных частиц тепловой энергии. Модель учитывает различные значения теплопроводности и теплоемкости в разных областях материала.

2. Предложены два критерия эффективной теплопроводности композита: оценка смещения за заданное время так называемого центра тепловой энергии (C-метод) и оценка вероятности того, что виртульная частица успеет пересечь слой композита за заданное время (P-метод).

3. Найдены оптимальные параметры вычислительных экспериментов, использующих эти методы. Для обоих методов оценена точность при заданном объеме вычислений.

4. Статистически проверены гипотезы об одинаковости результатов, получаемых C-методом и P-методом, и одинаковости ЭКТ при упорядо-

ченном и хаотичном расположении шаровых или параллельных цилиндрических включений.

Практическая значимость диссертационной работы связана с ее прикладной ориентацией, а полученные результаты могут быть использованы при исследовании возможности создания композитов, имеющих необходимое соотношение коэффициентов теплопроводности, при котором можно обеспечить надежную работу элементов конструкций современных теплотехнических устройств.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Предложенные методы оценки эффективной теплопроводности композита при помощи случайных блужданий виртуальных частиц теплоты, основанные либо на смещении центра тепловой энергии за заданное время (С-метод), либо на вероятности того, что частица успеет пересечь слой композита за заданное время (Р-метод).

2. Статистически подтвержденные гипотезы об одинаковости результатов, получаемых С-методом и Р-методом, и одинаковости ЭКТ при упорядоченном и хаотичном расположении шаровых и параллельных цилиндрических включений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов вычислительных экспериментов с известными в литературе расчетными данными других исследователей.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы апробированы на XI Международном научном симпозиуме «Передовые технические системы и технологии»(Севастополь, 2015), Международной научно-методической конференции «Математика и естественные науки. Теория и практика»(Ярославль, 2015), International Conference on Aerospace Engineering (Москва, 2016), всероссийской конференции «Студенческая весна»(Москва, 2016, 2017).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 7 научных работах, в том числе в 5 научных публикациях в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных изданий.

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылкакми.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, общих результатов и выводов, списка литературы и приложения. Работа представлена на 111 страницах, содержит 30 иллюстраций и 23 таблицы. Список литературы включает 64 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор литературы по теме исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе описана математическая модель процесса теплопроводности, использующая случайные блуждания. Пусть пространство заполнено изотропным материалом, имеющим объемную теплоемкость C и коэффициент теплопроводности λ, тогда уравнение теплопроводности имеет вид $\dot{u} = a\,\nabla^2 u$, где $a = \lambda/C$ — коэффициент температуропроводности. Если известно начальное распределение температуры $u_0(x, y, z)$, то можно получить распределение температуры через время t при помощи свертки

$$u(t, x, y, z) = u_0 * p^{(t)}(x, y, z),$$

где $p^{(t)}(x, y, z)$ — плотность нормального распределения с нулевыми средними и матрицей ковариаций $2atE$, где E — единичная матрица.

Решение уравнения теплопроводности по формуле свертки можно получить с использованием винеровского процесса (ξ_t, η_t, ζ_t): пусть трехмерная случайная величина (X_0, Y_0, Z_0) имеет плотность распределения $u_0(x, y, z)$, тогда трехмерная случайная величина с координатами

$$X_t = X_0 + \xi_t, \quad Y_t = Y_0 + \eta_t, \quad Z_t = Z_0 + \zeta_t$$

будет иметь плотность распределения $u(t, x, y, z)$.

В данной математической модели процесс теплопроводности представляется как случайное блуждание виртуальных частиц, представляющих выборку из распределения, плотность которого в каждый момент времени пропорциональна плотности тепловой энергии.

Если рассматриватся ограниченное тело U, и на его поверхности нет теплообмена с окружающей средой путем теплопроводности или излучения, то решение уравнения теплопроводности при помощи случайных процессов модифицируется: траектории случайных точек (X_t, Y_t, Z_t) должны отражаться от теплоизолируемой поверхности. При математическом моделировании это означает запрет виртуальной частице при выборе очередного шага покидать область U.

Пусть композит состоит из матрицы — материала с объемной теплоемкостью C_1 и коэффициентом теплопроводности λ_1 — и включений из материала с объемной теплоемкостью C_2 и коэффициентом теплопроводности λ_2. Скорость диффузии в каждом материале пропорциональна его коэффициенту температуропроводности. При переходе же из одного материала в другой, с меньшим коэффициентом теплопроводности λ_j, виртуальные частицы с вероятностью $1 - \lambda_j/\lambda_i$ отражаются от поверхности раздела.

Во второй главе предложены методы оценки эффективной теплопроводности композита. В пространстве $Oxyz$ рассматривается плоский слой композита толщиной b, ограниченный параллельными плоскостями

$$U = \{0 \leq x \leq b\}.$$

Под эффективным коэффициентом температуроводности композита в направлении оси Ox будем понимать такую величину $\tilde{a}$, что в таком же слое однородного материала с постоянной температуроводностью $a = \tilde{a}$ температура будет выравниваться столь же быстро, как в рассматриваемом композите.

Эффективная объемная теплоемкость композита — это его средняя объемная теплоемкость $\tilde{C} = C_1(1 - C_V) + C_2 C_V$, где C_V — объемная концентрация включений. Тогда ЭКТ выражается формулой $\tilde{\lambda} = \tilde{C} \cdot \tilde{a}$.

Перераспределение температуры в слое однородного материала единообразно выражается через безразмерное время $\tau = at/b^2$. Мы будем рассматривать слой известной толщины b из материала, имеющего заранее неизвестную эффективную температуропроводность $\tilde{a}$. По тому, как теплота перераспределится в слое за время t, можно оценивать безразмерное время $\tau = \tilde{a}t/b^2$ и таким образом находить значение $\tilde{a} = b^2\tau/t$.

Назовем С-методом метод оценки τ по смещению центра тепловой энергии. Пусть U — тело в пространстве (x, y, z). Полная тепловая энергия тела равна

$$E = \iiint\limits_U C\, u\, dxdydz.$$

Будем называть статическими моментами тепловой энергии величины

$$M_x = \iiint\limits_U x\, C\, u\, dxdydz \qquad \text{и т. д.}$$

Центром тепловой энергии назовем точку с координатами

$$\bar{x} = M_x/E, \quad \bar{y} = M_y/E, \quad \bar{z} = M_z/E.$$

Сначала рассмотрим слой $\{0 \leq x \leq b\}$ однородного материала с коэффициентом температуропроводности a с теплоизолированными поверхностями. Пусть в начальный момент $(t = 0)$ тепловая энергия распределена с единичной поверхностной плотностью в бесконечно тонком слое $x = 0$.

Из уравнения теплопроводности $\dot{u} = a\nabla^2 u = au_{xx}$ при $t > 0$ получаем

$$u = \frac{1}{b}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n x}{b} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{b^2}\right)\right).$$

Координата центра тепловой энергии $\bar{x}(t) = b\,X(\tau)$, где $\tau = at/b^2$,

$$X(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\exp\left(-\pi^2(2k+1)^2\tau\right)\right)$$

безразмерная функция. График функции $X(\tau)$ показан на Рис. 1.

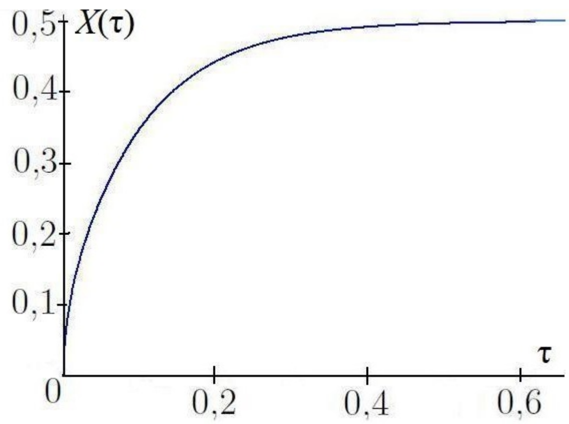

Рис. 1. График функции $X(\tau)$

Вычислительный эксперимент состоит в том, что n частиц стартуют с поверхности $x = 0$ и совершают броуновское движение, отражаясь от теплоизолированных поверхностей $x = 0$ и $x = b$. В некоторый момент времени t вычислим среднее значение $\hat{x}(t)$ координаты x этих частиц. Его математическое ожидание равно $\bar{x}(t)$. Дисперсия координаты x одной частицы равна

$$\mathbf{D}x(t) = b^2 D(\tau), \quad \text{где} \quad D(\tau) = \frac{1}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\exp\left(-\pi^2 n^2 \tau\right) - X^2(\tau).$$

Для n частиц имеем $\mathbf{D}\hat{x}(t) = \mathbf{D}x(t)/n = b^2 D(\tau)/n$. Если в вычислительном эксперименте получено значение $\hat{x}$, то точечную оценку эффективного коэффициента температуропроводности a находим из уравнения

$$b\,X(\tau) = \hat{x} \implies \tau = X^{-1}(\hat{x}/b) \implies a = \frac{b^2}{t}X^{-1}(\hat{x}/b).$$

Согласно центральной предельной теореме, α-доверительный интервал для $\hat{x}$ имеет вид

$$|\bar{x} - \hat{x}| < \frac{u_\rho \sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b,$$

где u_ρ — квантиль уровня $\rho = (1 + \alpha)/2$ стандартного нормального распределения.

Назовем P-методом метод оценки τ по вероятности прохождения виртуальной частицы сквозь слой материала. Так же будем рассматривать неограниченный слой $\{0 \le x \le b\}$. В качестве критерия температуропроводности рассмотрим вероятность P того, что частица теплоты, стартующая на поверхности $x = 0$, дойдет за время, меньшее T, до поверхности $x = b$. С физической точки зрения это означает, что к одной поверхности слоя, имевшего нулевую температуру, был приложен мгновенный равномерный источник тепловой энергии, а на другой поверхности слоя тепловая энергия поглощается (фиксирована нулевая температура), и нас интересует, какая часть тепловой энергии пройдет сквозь слой за заданное время. Для однородного материала с коэффициентом температуропроводности a имеем $P = \Psi(\tau)$, где $\tau = aT/b^2$, а безразмерная функция $\Psi(\tau)$ задана формулой

$$\Psi(\tau) = 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi\Big(-\frac{2k+1}{\sqrt{2\tau}}\Big);$$

ее график показан на Рис. 2.

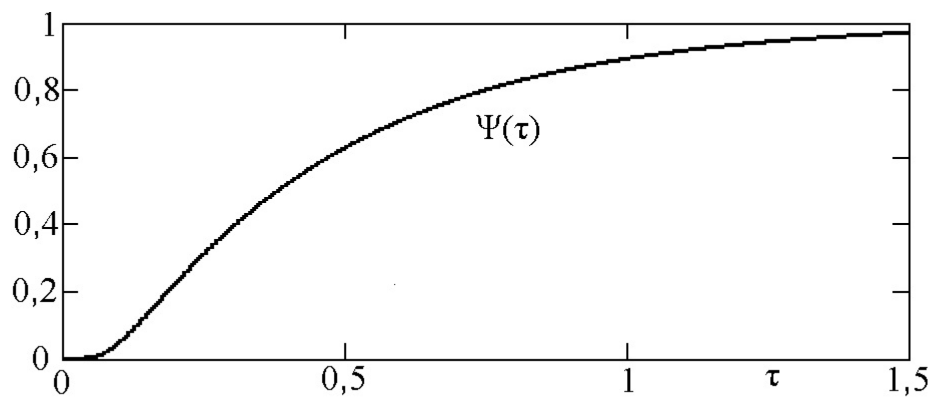

Рис. 2. График функции $\Psi(\tau)$

Вычислительный эксперимент выглядит следующим образом. Пусть n частиц стартуют с поверхности $x = 0$. Пусть $q = m/n$ — доля частиц, успевших за время, меньшее T, дойти до поверхности $x = b$. Согласно центральной предельной теореме, α-доверительный интервал для P имеет вид

$$P_1 = q - u_\rho \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} < P < q + u_\rho \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} = P_2,$$

где u_ρ — квантиль уровня $\rho = (1+\alpha)/2$ стандартного нормального распределения. Следовательно, α-доверительный интервал для $\hat{a}$ в линейном приближении имеет вид

$$\left|\hat{a} - \frac{b^2}{T}\Psi^{-1}(q)\right| < u_\rho \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} \big(\Psi^{-1}\big)'(q).$$

Сравнив описанные методы оценки τ, можно сделать вывод, что С-метод менее эффективен в вычислительном отношении. Для получения такой же точности при С-методе потребуется объем выборки n примерно вдвое больше, чем при Р-методе. Однако, Р-метод выглядит не вполне естественным. Может возникнуть сомнение в том, что результат, получаемый с его помощью, можно считать эффективной теплопроводностью. Были проведены несколько серий вычислительных экспериментов, подтвердивших гипотезу о том, что два рассматриваемых метода дают одинаковые значения ЭКТ. В дальнейшем используется Р-метод.

В третьей главе описаны результаты вычислительных экспериментов. Рассматривались шаровые включения одинакового размера, расположенные в узлах кубической решетки, и оценивался ЭКТ вдоль произвольной оси h. Искомый безразмерный результат зависит от единственного параметра — отношения $r = R/D$ радиуса включения к шагу кубической решетки, $0 < r < 0{,}5$. Толщина слоя b должна быть намного больше расстояний между центрами включений, решено взять $b = 4$. Затем были рассмотрены включения такого же радиуса, расположенные хаотично с плотностью $1/D^3$.

Полученные значения ЭКТ имели при объеме выборки $n = 10\,000$ относительную среднеквадратичную погрешность около 1,2%. Несколько серий вычислительных экспериментов подтвердили гипотезу о том, что ЭКТ одинаков в случае хаотичных и упорядоченных шаровых включений. Это весьма полезный результат, так как вычислительные эксперименты с хаотично расположенными шарами занимают намного больше времени из-за сложности процедуры случайной расстановки шаров.

Далее обосновывается выбор параметров времени для оценки τ по Р-методу. Пусть при моделировании случайного процесса мы взяли шаг времени Δt. Среднеквадратичные приращения каждой из трех координат при одном шаге составляют $\sqrt{2a\Delta t}$. Чтобы дискретный процесс не сильно отличался от непрерывного, нужно $\sqrt{2a\Delta t} \ll R$ (мы будем рассматривать $R \geq 0{,}2D$). Поскольку завышенные требования к малости шага Δt приведут к чрезмерному объему вычислений, решено не действовать наугад, а повторять вычислительный эксперимент, постепенно уменьшая Δt, начиная с 10^{-3}. Сравнив результаты вычислительных экспериментов по нахождению ЭКТ при различных значениях шага времени при значениях теплопроводности и объемной теплоемкости включений, отличающихся от тех же параметров материала матрицы не более, чем в 4 раза, а также случай нетеплопроводных включений, определен оптимальный шаг времени $\Delta t = 0{,}0005$.

Далее установлено, как оптимально задать время T для оценки τ по Р-методу. Было обнаружено, что эффективность вычислений максимальна при $T = 3$. При увеличении T она снижается медленно, а при уменьшении T снижается быстро.

Полученные нашим методом значения ЭКТ, представленные в Таблицах 1 и 2, мало отличаются от предсказанных по формуле Рэлея, если коэффициент температуропроводности включений $a_2 = \lambda_2/C_2$ не сильно отличается от коэффициента температуропроводности матрицы $a_1 = \lambda_1/C_1$.

Таблица 1.

ЭКТ композитов с шаровыми включениями радиуса $r = 0{,}3$ (левая часть таблицы) и ее относительная разность с оценкой по формуле Рэлея (1) в промилле (правая часть)

$\lambda_2 \backslash C_2$	0,25	0,5	1	2	4	(1)	0,25	0,5	1	2	4
0	0,835					0,839	–5				
0,25	0,890	0,888	0,915	0,938	0,996	0,891	–1	–3	26	53	118
0,5	0,931	0,941	0,925	0,949	0,998	0,934	–3	8	–9	16	69
1	1,016	1,009	1	1,006	1,021	1	16	9	0	6	21
2	1,124	1,087	1,080	1,091	1,117	1,087	34	0	–7	3	27
3	1,162	1,163	1,159	1,128	1,192	1,142	17	18	15	–12	44
4	1,209	1,188	1,185	1,170	1,208	1,180	25	7	5	–9	23

Таблица 2.

ЭКТ композитов с шаровыми включениями радиуса $r = 0{,}45$ (левая часть таблицы) и ее относительная разность с оценкой по формуле Рэлея (1) в промилле (правая часть)

$\lambda_2 \backslash C_2$	0,25	0,5	1	2	4	(1)	0,25	0,5	1	2	4
0	0,513					0,519	–12				
0,25	0,661	0,656	0,685	0,732	0,766	0,661	–1	–8	36	106	217
0,5	0,809	0,782	0,792	0,819	0,878	0,787	28	–6	6	40	115
1	1,046	1,004	1	1,013	1,039	1	46	4	0	13	39
2	1,442	1,344	1,317	1,294	1,349	1,316	95	21	0	–17	25
3	1,705	1,600	1,536	1,498	1,574	1,541	106	38	–3	–28	22
4	1,979	1,773	1,637	1,627	1,712	1,708	159	38	–41	–47	2

В четвертой главе рассмотрены анизотропные композиты с однонаправленными цилиндрическими волокнами одинакового диаметра. Распространение теплоты вдоль и поперек волокон происходит независимо. Эффективную теплопроводность $\tilde{\lambda}_x$ вдоль волокон легко вычислить по формуле

$$\tilde{\lambda}_x = \lambda_1(1 - C_V) + \lambda_2 C_V.$$

В работе В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина и И.Ю. Савельевой (2013) была получена формула для оценки ЭКТ волокнистого композита $\tilde{\lambda}_\perp$ в поперечном направлении

$$\frac{\tilde{\lambda}_\perp}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + C_V(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2 - C_V(\lambda_2 - \lambda_1)}. \qquad (2)$$

Мы провели серию вычислительных экспериментов Р-методом, моделирующих процесс теплопроводности при помощи случайных блужданий виртуальных частиц теплоты сквозь слой композита толщины b (рассматривалась двумерная модель).

В случае волокнистого композита также была подтверждена гипотеза о том, что ЭКТ одинаков в случае хаотичного и упорядоченного расположения параллельных цилиндрических волокон.

Часть результатов представлена в Таблице 3. Как и в случае шаровых включений, мы видим, что полученные нашим методом ЭКТ мало отличаются от теоретически предсказанных (2), если коэффициент температуропроводности включений не сильно отличается от коэффициента температуропроводности матрицы.

Таблица 3.

ЭКТ в поперечном направлении композитов с однонаправленными цилиндрическими включениями радиуса $r = 0{,}45$ (левая часть таблицы) и ее относительная разность с оценкой по формуле (2) в промилле (правая часть)

$\lambda_2 \backslash C_2$	0,25	0,5	1	2	4	(2)	0,25	0,5	1	2	4
0	0,197					0,222	–114				
0,25	0,447	0,441	0,460	0,477	0,563	0,447	–1	–14	28	66	258
0,5	0,669	0,651	0,655	0,670	0,705	0,650	29	1	8	31	84
1	1,062	1,016	1	1,012	1,026	1	62	16	0	12	26
2	1,757	1,579	1,509	1,510	1,558	1,538	142	26	–19	–18	13
3	2,316	1,969	1,849	1,847	1,931	1,933	198	19	–43	–44	–1
4	2,823	2,294	2,078	2,074	2,167	2,235	263	26	–70	–72	–30

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Обоснован метод решения уравнений параболического типа при помощи выборки положений случайно блуждающих частиц, плотность распределения которых через заданное время пропорциональна искомой функции.

2. Разработана и реализована на компьютере модель процесса теплопроводности, использующая случайные блуждания виртуальных частиц тепловой энергии. Модель учитывает различные значения теплопроводности и теплоемкости в разных областях материала.

3. Разработаны два метода оценки эффективной теплопроводности композитов при помощи построенной модели процесса теплопроводности:

а) по моментам распределения тепловой энергии (C-метод),

б) по вероятности прохождения частицы сквозь слой (P-метод).

Найдены оптимальные параметры численных экспериментов по моделированию теплопроводности в слое композита: толщина слоя, шаг времени, ограничение на время распространения тепла.

4. Проведено сравнение двух предложенных методов оценки эффективной теплопроводности композитов: проверена гипотеза об одинаковости получаемых результатов; более эффективным в вычислительном отношении признан P-метод.

5. Проверена гипотеза об одинаковости эффективной теплопроводности при упорядоченном и хаотичном расположении шаровых включений, а также при упорядоченном и хаотичном расположении параллельных цилиндрических включений. В обоих случаях полученные результаты согласуются с предсказанными аналитически.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Пугачев О.В., Хан З.Т. Теплопроводность композита с нетеплопроводными шаровыми включениями// Наука и образование: Электрон. журнал. МГТУ им.Н.Э. Баумана: 2015. № 5. С. 205 – 217. Режим доступа: http:// technomag.bmstu.ru/doc/ 493560.htm (дата обращения: 31.12.2015). (0,8 п. л. / 0,5 п. л.)

2. Пугачев О.В., Хан З.Т. Эффективная теплопроводность композита с шаровыми включениями// Наука и образование: Электрон. журнал. МГТУ им.Н.Э. Баумана: 2015. № 6. С. 99 – 111. Режим доступа: http:// technomag.bmstu.ru/doc/493560. htm (дата обращения: 31.12.2015). (0,8 п. л. / 0,5 п. л.)

3. Хан З.Т. Эффективная теплопроводность композита с шаровыми включениями// Передовые технические системы и технологии: Труды XI Международного научного симпозиума. Севастополь, 2015. С. 123 – 129. (0,4 п. л. / 0,4 п. л.)

4. Han Z.T. Research of effective heat conductivity of anisotropic composite materials by means of momenta// International Conference on Aerospace Engineering. M., 2016. P. 56 – 64. (0,5 п. л. / 0,5 п. л.)

5. Пугачев О.В., Хан З.Т. Нахождение эффективной теплопроводности композита методом моментов// Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер.: Естественные науки. 2016. № 4. С. 28 – 39. (0,8 п. л. / 0,5 п. л.)

6. Пугачев О.В., Хан З.Т. Исследование эффективной теплопроводности анизотропных композитов методом статистических моментов// Математическое моделирование и численные методы. 2016. № 4. С. 101 – 113. (0,8 п. л. / 0,5 п. л.)

7. Пугачев О.В., Хан З.Т. Моделирование теплопроводности композита с шаровыми включениями// Научный вестник МГТУ ГА. 2017. № 20(2). С. 83 – 93. (0,7 п. л. / 0,4 п. л.)