

На правах рукописи

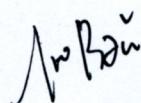
Лю Вэй

**ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА  
В СРЕДЕ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ**

По специальностям:

- 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ  
05.13.01 – Системный анализ, управление, и обработка  
информации (информатика, машиностроение)

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Москва – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель доктор физико-математических наук, доцент  
**Канатников Анатолий Николаевич**

Научный консультант доктор физико-математических наук, доцент  
**Четвериков Владимир Николаевич**

Официальные оппоненты:

**Дмитриев Михаил Геннадьевич,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН,  
главный научный сотрудник лаборатории 11-3

**Фомичев Василий Владимирович**  
доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук»**

Защита состоится «25» декабря 2018 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, зал Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана и на сайте <http://www.bmstu.ru>.

Автореферат разослан «      »        2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
кандидат технических наук, доцент



Аттетков  
Александр  
Владимирович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) играют важную роль, как в гражданских, так и военных отраслях. Одной из важнейших задач в практике применения БПЛА является управление. В настоящее время для выполнения различных миссий БПЛА используется дистанционное управление, которое сильно зависит от качества связи и погодных условий. Преодоление этих трудностей связано с повышением автономности БПЛА. Это требует разработки таких методов и алгоритмов, которые позволяют реализовывать миссию БПЛА без участия человека. Поэтому разработка методов автоматического построения траекторий БПЛА с учетом окружающей обстановки — безусловно, актуальная задача.

Планирование траекторий БПЛА зависит от того, с какой целью используется летательный аппарат. Типичной здесь является терминальная задача, в которой БПЛА следует из одной заданной точки в другую.

Траекторию БПЛА можно рассматривать как геометрический путь с профилем скорости вдоль него. Задачу планирования траектории можно рассматривать как прокладку геометрического пути с обходом препятствий и последующей разработке временного графика движения вдоль геометрического пути. Таким образом, построение траекторий можно интерпретировать как двухэтапный процесс: планирование пути и планирование временного графика (или профиля скорости). Прокладка геометрического пути в сложной окружающей обстановке посвящено много работ (например, O. Khatib, J. Borenstein, S. M. LaValle, J. J. Kuffner, R. Stuart, S. S. Ge, N. Amato). Среди ряда подходов к решению этой задачи можно выделить методы теории графов с применением последующей процедуры сглаживания (L. E. Dubins, W. Nelson, G. E. Van der Molen, K. Yang). Планирование временного графика приводит к задаче следования вдоль пути, которая в последние 20 лет активно изучалась (А.В. Пестерев, С. Б. Ткачев, M. Breivik, S. Park, B. P. Sujit). Отметим также ряд работ, посвященных моделированию окружающей среды (A. Elfes, S. Thrun, H.L.E. Fong, W. Burgard).

**Цели и задачи.** Целью диссертационной работы является автоматическое построение траекторий БПЛА в среде с препятствиями.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Проведен анализ существующих методов решения задач планирования пути, сглаживания и следования вдоль пути.
2. Проведен анализ методов моделирования трехмерной окружающей среды.
3. Разработан новый алгоритм планирования допустимого пути в трехмерной среде с препятствиями.
4. Проведен анализ методов сглаживания пути, представленного последовательностью путевых (опорных) точек и выбраны методы для решения задачи в рамках данной работы.
5. Разработаны методы следования вдоль пути на основе обобщения путевых координат, известных в двумерном случае.
6. Разработан программный комплекс в среде Matlab, в котором реализованы методы автоматического планирования траекторий, и проведено комплексное моделирование, направленное на оценку принятых решений.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы теории нелинейного управления, теории устойчивости, дифференциальной геометрии, методы интерполяции и численные методы. Математическое моделирование процессов автоматического планирования траекторий проводилось в среде Matlab.

**На защиту выносятся** следующие новые результаты:

1. Новый метод планирования пути в трехмерном пространстве с препятствиями.
2. Новый метод решения задачи путевой стабилизации в пространстве, основанный на пространственных путевых координатах.
3. Программный комплекс в среде Matlab, в котором реализованы методы автоматического построения траекторий, методы расчета управлений и моделирования движения летательного аппарата по построенной траектории, средства представления результатов моделирования.

**Научная новизна** диссертации заключается в следующем:

1. Разработан новый метод планирования пути в трехмерном пространстве с препятствиями.
2. Разработан новый метод решения задачи путевой стабилизации в пространстве, основанный на пространственных путевых координатах.
3. Предложен комплекс алгоритмов, обеспечивающих модели-

рование миссии летательного аппарата в трехмерной среде с препятствиями, включающий алгоритмы моделирования окружающей среды, алгоритмы построения пути ЛА и алгоритмы расчета управлений для следования вдоль построенного пути. Комплекс алгоритмов реализован в виде программного комплекса в среде Matlab.

**Теоретическая и практическая ценность** полученных результатов состоит в том, что предложен полный комплекс методов и алгоритмов моделирования миссии летательного аппарата в трехмерной среде с препятствиями, эффективность которого подтверждена компьютерным моделированием. Эти методы и алгоритмы могут использоваться для планирования и реализации сложных миссий беспилотных летательных аппаратов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на международных конференциях «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 2017), International Workshop on Computer Science and Engineering «WCSE 2015-IPCE» (Москва, 2015), Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems «MICNON 2015» (Санкт-Петербург), «Физико-математические проблемы создания новой техники» (Москва, 2014).

**Публикации.** Результаты диссертационной работы отражены в 6 научных трудах, в том числе 3 публикации из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций (в том числе 2 публикации, индексируемые в базе публикаций SCOPUS).

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа изложена на 140 страницах, содержит 75 иллюстраций и 6 таблиц. Библиография включает 83 наименования.

## **Содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность и важность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, обозначены подходы к построению траекторий полета в среде с препятствиями.

Указаны методы проведения исследований, представлены основные научные результаты, полученные в ходе выполнения работы.

**В первой главе** рассмотрена общая постановка задачи реализации миссии БПЛА в сложной окружающей обстановке, проведен обзор существующих методов для решения возникающих подзадач: планирования пути, сглаживания пути и следования вдоль пути.

Задача построения пути в среде с препятствиями включает в основном три аспекта. Во-первых, спланированный путь должен пролегать от заданной начальной точки к заданной конечной точке. Во-вторых, этот путь должен обеспечивать движение робота с обходом возможных препятствий. В-третьих, путь должен среди всех возможных путей, удовлетворяющих первым двум требованиям, быть в определенном смысле оптимальным.

В разделе 1.2 проанализированы основные подходы к указанной задаче (Рис. 1). В рамках данной работы для планирования пути в трехмерной среде применен подход на основе графов. Для построения графа предложен новый метод волнового распространения, являющийся усилением известного метода вероятностной дорожной карты. Метод приводит к построению маршрута следования в виде ломаной линии. Необходима дополнительная процедура сглаживания, анализу методов решения которой посвящен раздел 1.3.



Рис. 1. Классификация методов планирования пути

В разделе 1.4 обсуждается задача следования вдоль пути. Известные методы решения такой задачи работают в кинематической постановке задачи, а для учета динамики требуются новые методы управления. В данной работе разработан новый метод решения задачи следования вдоль пути, основанный на введения путевых координат в пространстве и последующем преобразования системы дифференциальных уравнений к каноническому виду.

**Во второй главе** приведен детальный анализ методов построения пути в среде с препятствиями, использованные в данной работе.

Для решения общей задачи выделены три подзадачи: построение модели окружающей среды; поиск допустимого маршрута в окружающей среде в виде ломаной линии; сглаживание построенного маршрута.

В разделе 2.1 описаны методы построения модели окружающей среды. Препятствия представляются прямоугольными параллелепипедами, расположенными на горизонтальной плоскости. Математическая модель окружающей среды строится в виде карты высот. Горизонтальная плоскость моделируется двумерной регулярной сеткой. Она определяется диапазонами изменения координат (длины  $[M_{\min}, M_{\max}]$  и ширины  $[N_{\min}, N_{\max}]$ ), а также количеством отрезков  $k_m$  и  $k_n$  по координатам. В каждом узле двумерной сетки задается высота препятствия, если узел накрывается препятствием, или значение 0, указывающее на отсутствие препятствия.

В разделе 2.2 изложен метод планирования пути, который заключается в реализации следующих шагов: генерирование путевых точек в свободной области окружающей (множество  $N$  вершин графа); поиск соединений путевых точек, не имеющих пересечений с препятствиями (множество  $E$  ребер графа); поиск оптимального пути в графе  $R = (N, E)$ .

Путевые точки выбираются с помощью метода волнового распространения. В качестве путевых рассматриваются точки в пространстве, проекции которых на горизонтальную плоскость  $XOY$  находятся на концентрических окружностях с центром в стартовой точке  $(x_0, y_0)$ . Радиусы окружностей выбираются с фиксированным шагом  $dr = D/N$ , где  $D$  — расстояние между проекциями начальной и конечной точек на горизонтальную плоскость;  $N$  — количество окружностей. Координаты проекции путевой точки можно записать формулами:

$$x_{nm} = x_0 + dr \cdot n \cdot \cos \frac{2\pi m}{Kn}, \quad y_{nm} = y_0 + dr \cdot n \cdot \sin \frac{2\pi m}{Kn},$$

где  $n$ ,  $n \leq N$ , — номер концентрической окружности;  $m$ ,  $m \leq Kn$ , — номер точки на окружности;  $K$  — параметр, регулирующий количество точек на окружности (на окружности с номером  $n$  выбираются  $Kn$  точек). Параметры  $N$  и  $K$  определяют плотность точек на горизонтальной плоскости, которые расположены регулярно и равномерно. Высоты  $z_i$  путевых точек определяются как случайные величины, равномерно распределенные на отрезке  $[0, z_{\max}]$ , где  $z_{\max}$  — предельное значение для высот путевых точек.

Как показал сравнительный анализ, выполненный в работе, метод волнового распространения оказывается более эффективным, чем известный метод вероятностной дорожной карты.

На этапе поиска соединений точек основное время вычислений уходит на проверку коллизий соединений, т.е. их пересечений с препятствиями. Чтобы уменьшить объем вычислений, проверяются лишь пары достаточно близких путевых точек. Коллизии соединений проверяются бинарным методом: сначала середина отрезка, затем четверные доли и т.д.

Множество путевых точек и все выделенные соединения образуют дорожную карту (неориентированный граф). Задача планирования пути сводится к задаче поиска пути в графе. На этом этапе используется эвристический алгоритм  $A^*$  поиска оптимальных путей в графе.

В результате планирования пути получается ломаная, соединяющая начальную и конечную точки по последовательности путевых точек. В разделе 2.3 описываются локальные методы сглаживания этой ломаной, в которых сглаживание выполняется в окрестностях вершин ломаной. Проанализированы три подхода для выполнения сглаживания: метод Dubins (сглаживание по окружностям), метод полярных многочленов и метод на основе сплайнов.

При сглаживании главный вопрос — непрерывность кривизны сглаженной кривой и ее максимальное значение. Максимальная кривизна тем выше, чем меньше расстояние  $d$  от вершины ломаной до точки стыковки с кривой сглаживания. Но увеличение параметра  $d$  ведет к появлению коллизий кривой сглаживания. В работе детально обсуждается проблема выбора этого параметра. Требование локальности сглаживания обозначает верхнюю границу параметра  $d$  для разных звеньев:

$$d_1 = \min\left\{l_1, \frac{l_2}{2}\right\}; \quad d_i = \min\left\{\frac{l_i}{2}, \frac{l_{i+1}}{2}\right\}, \quad i = \overline{2, N-2}; \\ d_{N-1} = \min\left\{\frac{l_{N-1}}{2}, l_N\right\}.$$

Если такой выбор приводит к коллизии, уменьшаем соответствующее значение вдвое и снова проверяем на пересечение с препятствиями.

**В третьей главе** обсуждается задача следования вдоль пути. В этой задаче требуется рассчитать управления, обеспечивающие движение БПЛА по заданному пути.

В разделе 3.1 описаны основы теории нормальных форм, позволяющей строить управление, стабилизирующее в нуле фазовые переменные.

В разделе 3.2 описана шестимерная модель летательного аппарата, которая используется при решении задачи следования вдоль пути. В этой модели в качестве переменных состояния используются:  $L$  — продольная дальность;  $H$  — высота;  $Z$  — боковое отклонение;  $V$  — модуль вектора скорости;  $\vartheta$  — угол наклона вектора скорости;  $\psi$  — угол курса. Соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{L} = V \cos \vartheta \cos \psi, & \dot{V} = (n_x - \sin \vartheta) g, \\ \dot{H} = V \sin \vartheta, & \dot{\vartheta} = \frac{(n_y \cos \gamma - \cos \vartheta) g}{V}, \\ \dot{Z} = -V \cos \vartheta \sin \psi, & \dot{\psi} = -\frac{n_y g \sin \gamma}{V \cos \vartheta}, \end{cases}$$

где  $n_x, n_y$  — продольная и поперечная перегрузки;  $\gamma$  — угол наклона вектора перегрузки. Эти величины рассматриваются как управления.

Замена управлений  $v_1 = n_x$ ,  $v_2 = n_y \cos \gamma$  и  $v_3 = n_y \sin \gamma$  преобразует эту систему в аффинную:

$$\begin{cases} \dot{L} = V \cos \vartheta \cos \psi, & \dot{V} = -g \sin \vartheta + g v_1, \\ \dot{H} = V \sin \vartheta, & \dot{\vartheta} = -\frac{\cos \vartheta}{V} g + \frac{g}{V} v_2, \\ \dot{Z} = -V \cos \vartheta \sin \psi, & \dot{\psi} = -\frac{g}{V \cos \vartheta} v_3. \end{cases} \quad (1)$$

В работе рассмотрены два случая: движение в горизонтальной плоскости и более сложное пространственное движение. В разделе 3.3 рассмотрено движение БПЛА в горизонтальной плоскости. В случае постоянной скорости система (1) упрощается:

$$\begin{cases} \dot{L} = V \cos \psi, \\ \dot{Z} = -V \sin \psi, \\ \dot{\psi} = -\frac{g}{V} v_3. \end{cases} \quad (2)$$

Управление  $v_1 = 0$  обеспечивает постоянство скорости, а управление  $v_2 = 1$  — постоянство высоты. Таким образом, мы получаем систему дифференциальных уравнений с одним управлением  $v_3$ . Эта система близка к системе уравнений, описывающих движение колесного робота (А.В. Пестерев, Л.Б. Рапопорт, С.Б. Ткачев). Управление можно строить, вводя путевые координаты.

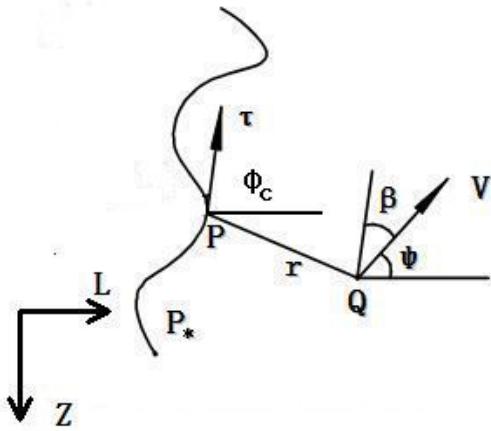


Рис. 2. Заданный путь и положение объекта

Пусть  $P_*(s) = (L_*(s), Z_*(s))$  — плоская кривая с натуральным параметром  $s$ , описывающая заданный путь (Рис. 2). Обозначим через  $Q$  центр масс движущегося БПЛА; через  $P$  — ближайшую точку на кривой  $P_*$  (целевая точка). Переменные  $s$  (параметр для точки  $P$ ),  $d$  (расстояние от  $Q$  до кривой) и  $\beta$  (угол между вектором скорости и касательным вектором кривой в точке  $P$ ) определяют путевую систему координат. В этих переменных система (2) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{V \cos \beta}{1 - kd}, \\ \dot{d} = V \sin \beta, \\ \dot{\beta} = -\frac{g}{V} v_3 - k \frac{V \cos \beta}{1 - kd}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $k$  — кривизна кривой в точке  $P$ . Система (3) определена на множестве  $D = \left\{ 1 - kd > 0, |\beta| < \frac{\pi}{2} \right\}$ .

Целью управления в системе (3), вытекающей из задачи следования вдоль пути, является стабилизация в нуле переменных  $d$  и  $\beta$ .

Выберем в качестве выхода системы (3) фазовую переменную  $d$ . Тогда система может быть преобразована к нормальной форме, что позволяет построить управление, стабилизирующее в нуле переменные  $d$  и  $\beta$ :

$$v_3 = \frac{-k \frac{v^2 \cos^2 \beta}{1 - kd} + c_1 d + c_2 V \sin \beta}{g \cos \beta}.$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  — это коэффициенты усиления, которые должны быть выбраны так, что уравнение  $\lambda^2 + c_2 \lambda + c_1 = 0$  является гурвицевым.

Описанный способ синтеза управления можно применить и в случае, когда скорость есть известная функция времени  $V(t)$ . Однако в этом случае в управление будет входить и функция  $V'(t)$ , что невыгодно с практической точки зрения. Построить управление, не включающее  $V'(t)$ , можно, выполнив в системе замену времени

$$\frac{d\xi}{dt} = V(t) \cos \beta,$$

где  $\xi$  — новая независимая переменная. С новой независимой переменной система (3) преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} s' = \frac{1}{1-kd}, \\ d' = \operatorname{tg} \beta, \\ \beta' = -\frac{k}{1-kd} - \frac{g}{V^2(t) \cos \beta} v_3. \end{cases} \quad (4)$$

Используя  $d$  в качестве выхода и преобразуя (4) к нормальной форме, получим управление

$$v_3 = -\frac{V^2(t) \cos^3 \beta}{g} \left( \frac{k}{(1-kd) \cos^2 \beta} - c_1 d - c_2 \operatorname{tg} \beta \right),$$

которое стабилизирует в нуле переменные  $d$  и  $\beta$  и тем самым решает задачу следования вдоль плоского пути. Отметим, что можно выбрать и другие варианты замены времени, позволяющие решать плоскую задачу следования вдоль пути при переменной скорости.

В разделе 3.4 изучается пространственная задача следования вдоль пути. Ее решение также основано на введении путевых координат в пространстве. Предложены два варианта введения путевых координат в пространстве: метод проекции на плоскость и метод на основе базиса Бишопа.

Метод проекции на плоскость основан на разделении задачи стабилизации на две: стабилизация движения в проекции на горизонтальную плоскость и стабилизация движения по высоте.

Пусть  $P(s): (l_*(s), z_*(s), h_*(s))$  — кривая, описывающая путь следования в пространстве. Введем следующие обозначения:  $P_*(s): (l_*(s), z_*(s))$  — проекция пути следования на горизонтальную плоскость;  $Q$  — текущее положение БПЛА;  $Q_*$  — проекция положения БПЛА на горизонтальную плоскость.

Выберем на плоской кривой  $P_*(s)$  точку  $P_*^0$ , ближайшую к точке  $Q_*$ . Пусть  $d$  — расстояние от точки  $Q_*$  до точки  $P_*^0$ ;  $\beta$  — угол ме-

жду касательным вектором  $\tau$  к кривой  $P_*$  в точке  $P_*^0$  и проекцией вектора скорости на горизонтальную плоскость. Точка  $P$  на кривой  $P(s)$  — точка, которая проектируется в точку  $P_*^0$ . Полагаем  $h = H - h_*(s)$ . Переменные  $s$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $\beta$ ,  $\vartheta$  рассматриваем как новые фазовые переменные (путевые координаты). В этих переменных уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{V \cos \vartheta \cos \beta}{1 - kd}, \\ \dot{d} = V \cos \vartheta \sin \beta, \\ \dot{h} = V \sin \vartheta - h'_*(s) \frac{V \cos \vartheta \cos \beta}{1 - kd}, \\ \dot{\beta} = -\frac{V k \cos \vartheta \cos \beta}{1 - kd} - \frac{\nu_3 g}{V \cos \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} = -\frac{g \cos \vartheta}{V} + \frac{g \nu_2}{V}. \end{cases} \quad (5)$$

Цель управления в системе (5) — стабилизация в нуле переменных  $d$ ,  $h$ ,  $\beta$  и разности  $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta^*$ , где  $\vartheta^*$  — угол наклона касательного вектора к предписанной кривой в целевой точке.

В системе (5) в качестве выхода выбираем  $y = [d, h]^T$ . Тогда система (5) может быть преобразована к нормальной форме с векторным управлением  $\nu = (\nu_2, \nu_3)^T$ :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = P + Q\nu, \\ \dot{s} = \frac{V \cos \vartheta \cos \beta}{1 - kd}, \end{cases}$$

где столбец  $P$  и матрица  $Q$  являются функциями фазовых переменных. Если величины  $\Delta\vartheta$  и  $\beta$  достаточно малы, то определитель  $\det Q$  больше нуля, так что преобразование системы корректно. Управление находим согласно формуле

$$\nu = -Q^{-1}(P + c_1 z_1 + c_2 z_2),$$

в которой  $c_1$  и  $c_2$  — скалярные матрицы  $c_1 = \lambda_1 E$ ,  $c_2 = \lambda_2 E$  с коэффициентами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уравнения  $\sigma^2 + \lambda_1 \sigma + \lambda_2 = 0$ , имеющего положительные корни. Это управление стабилизирует в нуле переменные  $d$ ,  $\dot{d}$ ,  $h$ ,  $\dot{h}$ .

Метод на основе базиса Бишопа основан на введении сопутствующего базиса в точке  $P$  на пути следования, ближайшей к точке  $Q$  положения БПЛА. Сопутствующий базис вводится неоднозначно — с точностью до его вращения вокруг касательного вектора кривой. Среди всех вариантов есть сопутствующий базис с параллельным

переносом, или базис Бишопа, динамика которого описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} \frac{d\tau}{ds} \\ \frac{dn_1}{ds} \\ \frac{dn_2}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Базис Бишопа более выгоден по сравнению с базисом Френе, поскольку имеет меньшие требования по гладкости кривой и, кроме того, нет ограничения, чтобы кривизна была ненулевой.

В систему (6) входят неизвестные параметры  $k_1$  и  $k_2$ , ее использовать для построения базиса нельзя. В то же время динамику базиса Бишопа можно описать векторным уравнением

$$n'_1 = (\mathbf{P}'(s) \times \mathbf{P}''(s)) \times n_1,$$

в котором  $\mathbf{P}(s)$  — вектор-функция натурального параметра  $s$ , описывающая путь следования,  $n_1$  — один из векторов базиса.

Формулу динамики базиса Бишопа легко трансформировать на случай произвольного параметра кривой  $\tau$ :

$$n'_1 = \frac{(\mathbf{P}'(\tau) \times \mathbf{P}''(\tau)) \times n_1}{\|\mathbf{P}'(\tau)\|^2}.$$

Рассчитав вектор  $n_1(\tau)$  как функцию параметра кривой и вычислив касательный вектор  $\tau = \mathbf{P}'(\tau)/\|\mathbf{P}'(\tau)\|$ , можем найти третий вектор базиса через векторное произведение:  $n_2 = \tau \times n_1$ .

Три вектора  $\tau$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  образуют ортонормированный базис в  $R^3$ , его можно задать матрицей перехода  $U(s) = (\tau, n_1, n_2)$ , составленной из столбцов координат векторов в базисе земной системы координат. С помощью матрицы перехода  $U(s)$  координаты положения объекта можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + U(s)\mathbf{d}. \quad (7)$$

где  $\mathbf{d} = (0, d_1, d_2)^T$ .

Переменные  $d_1$ ,  $d_2$  и их производные можно рассматривать как новые фазовые переменные, которые, наряду с натуральным параметром  $s$ , описывают состояние системы. Эти переменные будем называть путевыми координатами. В путевых координатах задача следования вдоль пути сводится к стабилизации в нуле переменных  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\dot{d}_1$ ,  $\dot{d}_2$ .

Систему уравнений движения в путевых координатах можно получить путем дифференцирования по времени уравнения (7). В результате получаем:

$$\begin{cases} \ddot{d}_1 = -\frac{(V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2)k_1}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2} + (\mathbf{n}_1, \ddot{\mathbf{q}}), \\ \ddot{d}_2 = -\frac{(V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2)k_2}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2} + (\mathbf{n}_2, \ddot{\mathbf{q}}). \end{cases}$$

Согласно системе (1)

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cos\psi \\ \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \sin\psi \end{pmatrix} (\nu_2 - \cos\vartheta) g + \begin{pmatrix} \sin\psi \\ 0 \\ \cos\psi \end{pmatrix} \nu_3 g.$$

Введем промежуточное управление  $\tilde{\nu}_2 = \nu_2 - \cos\vartheta$ . Положим

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\ddot{\mathbf{d}} = F + G\boldsymbol{\nu}.$$

где

$$F = -\frac{V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad G = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^T \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cos\psi & \sin\psi \\ \cos\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} g.$$

Стабилизирующее управление выбирается в виде:

$$\boldsymbol{\nu} = -G^{-1}(F + \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{c}_2 \mathbf{d}),$$

где, как и выше,  $\mathbf{c}_1 = \lambda_1 E$ ,  $\mathbf{c}_2 = \lambda_2 E$  и параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выбираем так, что у квадратного уравнения  $\sigma^2 + \lambda_1\sigma + \lambda_2 = 0$  действительные положительные корни.

**В четвертой главе** обсуждаются структура и функциональные возможности программного комплекса, предназначенного для моделирования миссий БПЛА в среде с препятствиями.

В разделе 4.1 проведен анализ требований к среде разработки и возможные решения по выбору такой среды. Обоснован вывод, что наиболее удобным выбором является среда разработки Matlab, которая имеет развитый аппарат для решения научных задач и удобную и мощную графическую подсистему, использование которой упрощает разработку средств визуализации.

В разделе 4.2 описана структура программного комплекса. Программный комплекс построен на модульной основе в соответст-

вии с его функциональной структурой. Выделены следующие функциональные модули программного комплекса: МОС — модуль построения окружающей среды; ПП — модуль планирования пути; СП — модуль сглаживания пути; РУ — модуль следования вдоль заданного пути; МВ — модуль визуализации. Модуль построения окружающей среды осуществляет расчет модели окружающей среды в виде карты высот и может работать в двух режимах: автоматическом или ручном. Модуль планирования пути предназначен для построения дорожной карты (графа маршрутов) и реализует один из двух методов: метод вероятностной дорожной карты и метод волнового распространения. По вычисленной дорожной карте модуль определяет оптимальный путь в графе методом А\*. Результатом работы модуля планирования пути является ломаная линия, соединяющая стартовую и конечную точки в обход препятствий. В модуле сглаживания пути по ломаной линии, построенной в модуле планирования пути, конструируется гладкий путь, соединяющий стартовую и конечную точки в обход препятствий. Процедура сглаживания локальная, выполняется последовательно по вершинами ломаной. Она может реализовываться с помощью метода Dubins (метод окружностей) или метода неравномерного кубического В-сплайна. Перед выполнением процедуры сглаживания в модуле выполняется процедура редукции, направленная на уменьшение количества звеньев ломаной. Модуль следования вдоль заданного пути позволяет для построенного пути рассчитать стабилизирующее управление и провести моделирование полета БПЛА по полученному гладкому пути.

В программном комплексе также реализован модуль визуализации, который обеспечивает графический интерфейс пользователя, необходимый для управления комплексом, а также визуальные средства представления результатов моделирования.

В разделе 4.3 представлены результаты моделирования с помощью созданного программного комплекса. При организации моделирования преследовались две цели: демонстрация работы комплекса при решении задач организации миссий летательных аппаратов и сравнительный анализ работы алгоритмов, реализованных программным комплексом. Демонстрация работы комплекса состоит в показе взаимодействия пользователя с комплексом в процессе последовательного решения задач: моделирования окружающей среды, планирования и сглаживания пути, расчета управлений и демонстрации полета БПЛА.

В процессе моделирования был проведен сравнительный анализ алгоритмов вероятностной дорожной карты и волнового распространения при различных характеристиках окружающей среды, отражающих степень заполненности пространства препятствиями. Моделирование показало более высокую эффективность метода волнового распространения. Также был проведен анализ влияния коэффициентов усиления, используемых в расчете стабилизирующих управлений, на качественные характеристики траектории. Показано, что при увеличении коэффициентов усиления максимальные значения перегрузок меняются мало, но время переходного процесса существенно сокращается.

### **Основные результаты диссертационной работы**

В данной диссертационной работе были получены следующие результаты:

- предложена модель статической окружающей среды, основанная на карте высот, построены алгоритмы расчета этой модели для препятствий простейшей формы — параллелепипедов;
- рассмотрены методы построения путей следования в среде с препятствиями; на основе анализа методов предложен метод волнового распространения для планирования пути, являющийся усилением метода вероятностной дорожной карты ВДК;
- рассмотрены современные методы сглаживания путей и выбраны простые и эффективные методы сглаживания: метод окружностей Dubins и метод неравномерных кубических В-сплайна;
- предложены два варианта решения задачи путевой стабилизации в пространстве, один на основе проектирования на плоскость, другой на основе базиса с параллельным переносом (базиса Бишопа);
- разработан программный комплекс в среде Matlab, позволяющий моделировать миссии БПЛА в среде с препятствиями на основе предложенных методов, и с помощью программного комплекса проведен ряд вычислительных экспериментов.

### **Основные результаты диссертации отражены в работах**

1. Лю В. Метод путевой стабилизации беспилотного летательного аппарата // Физико-математические проблемы создания новой техники: Тез. докл. Международной научной конференции. М., 2014. С. 59. (0.1 п.л.)

- 2. Tkachev B.S., Liu W. Design of Path Following Method for Unmanned Aerial Vehicles using Normal Forms // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No. 11. P. 10–15. (0,3 п.л. / 0,1 п.л.)**
- 3. Канатников А.Н., Лю В., Ткачев С.Б. Путевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 10. С. 5-19. (0,8 п.л. / 0,3 п.л.)**
- 4. Канатников А.Н., Лю В. О задаче путевой стабилизации в пространстве // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тез. докл. Владимир, 2017. С. 77–78. (0,1 п.л./0,05 п.л.)**
- 5. Лю В. Планирование пути БПЛА в трехмерной среде с препятствиями // Математика. Компьютер. Образование: Тез. докл. XXIV Международной конференции. Пущино, 2017. С. 195. (0,1 п.л.)**
- 6. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор). Математика и математическое моделирование. 2018. № 1. С.15-58. DOI:10.24108/mathm.0118.0000098. (3 п.л.)**