На правах рукописи

Белинская Юлия Сергеевна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ И ЛИУВИЛЛЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Научный: **руководитель**	доктор физико-математических наук, доцент **Четвериков Владимир Николаевич**
Официальные: **оппоненты**	**Фомичев Василий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Нелинейные динамические системы и процессы управления» факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
	Дмитриев Михаил Геннадьевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории 11-3 «Хаотические динамические системы» Института системного анализа ФИЦ ИУ РАН
Ведущая: **организация**	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук»

Защита состоится «___» _______________ 2018 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, стр. 1, зал Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «___» _______________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат технических наук, доцент — Аттетков Александр Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы темы диссертационной работы определяется необходимостью разработки новых методов решения задач терминального управления для нелинейных динамических систем с учетом ограничений. Подходы к решению таких задач известны лишь для отдельных классов систем. Например, для аффинных систем, преобразуемых в заданной области к специальному виду, называемому регулярным каноническим видом, программную траекторию, удовлетворяющую граничным условиям, задают в виде полиномов от времени, порядок которых определяется количеством граничных условий.

Более общим классом нелинейных систем с управлением, включающим в себя аффинные системы, преобразуемые к каноническому виду, являются плоские системы. Каждое решение плоской системы однозначно определяется некоторым набором функций, который называют плоским выходом системы. Для этого класса систем применим подход, основанный на полиномиальной зависимости плоского выхода от времени.

Для неплоских систем общие подходы к решению терминальных задач неизвестны. Однако выделен класс лиувиллевых систем, для которых в частных случаях разрабатывались методы решения задач управления.

Формулировка задачи терминального управления может содержать ограничения на состояние и управление системы. Указанные подходы не учитывают ограничения системы. Для учета таких ограничений ранее использовался, например, метод предварительного выбора пути, который обобщается в представленной диссертации.

Другим новым методом, используемым для решения задач терминального управления, применимым как к плоским, так и к неплоским системам, является метод, основанный на понятии накрытия. Он заключается в дополнении системы уравнениями на производные управления и в построении специального сюръективного отображения (накрытия) из расширенного фазового пространства дополненной системы в расширенное фазовое пространство новой системы. При этом любое решение новой системы должно удовлетворять всем начальным условиям терминальной задачи. Программное движение в этом случае может быть найдено как решение двух специально поставленных задач Коши для новой и дополненной систем.

Целью работы является решение терминальных задач для плоских и лиувиллевых систем при наличии ограничений.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач:**

1. Нахождение программного управления при известной зеркальной симметрии задачи терминального управления.

2. Разработка метода накрытий для решения задач терминального управления плоскими и лиувиллевыми системами.

3. Получение условий декомпозируемости систем для решения терминальных задач с учетом ограничений.

Методы исследования. В диссертации используются методы математической теории управления, дифференциальной геометрии, теории устойчивости, численные методы.

Научная новизна. Разработаны и обоснованы новые методы решения задач терминального управления, применимые к широкому классу управляемых систем и позволяющие учитывать ограничения на состояния и управления.

В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Метод накрытий для решения задач терминального управления в случае плоских систем.

2. Метод накрытий для решения задач терминального управления в случае лиувиллевых систем.

3. Решение задачи синтеза программного движения квадракоптера вдоль коридора подбором плоского выхода.

4. Метод решения задач терминального управления с учетом ограничений, основанный на декомпозиции систем.

5. Решение задачи синтеза программного движения вертолета вдоль горизонтальной прямой с применением зеркальной симметрии.

Достоверность и обоснованность научных результатов и математических выводов подтверждается строгостью используемого математического аппарата. Сформулированные в работе допущения обоснованы в рамках содержательной постановки задачи, а также в процессе математического моделирования.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов состоит в том, что реализуемые в работе методы позволяют решать задачи терминального управления при наличии ограничений на состояния и управление для широкого класса систем.

Основные научные результаты диссертации отражены в 9 научных работах, в том числе 5 статьях в журналах и изданиях, которые включены в Перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертации, и материалах российской и международной конференций.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены соискателем лично в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы были доложены на научных семинарах кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 2014, 2016); Всероссийской научной конференции «XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014» (Москва, 2014); Международной научной конференции «1st Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON-2015)» (Saint-Petersburg, 2015).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа изложена на 149 страницах, содержит 49 рисунков. Библиография включает 101 наименование.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе приведены известные теоретические результаты о решении задач терминального управления плоскими системами, о декомпозиции систем с управлением по статической обратной связи, изложены основные сведения из бесконечномерной геометрии систем с управлением, а также метод предварительного выбора пути.

Во второй главе изложены основные теоретические результаты, полученные в работе и выносимые на защиту.

Пусть задана система с одномерным управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n+2}$ с координатами $t, x_1, \dots, x_n, u$. Обозначим через U область этого пространства, где определена система (1). Рассмотрим модуль 1–форм Картана в области U:

$$\mathcal{C}^1\Lambda(U) = \underset{C^\infty(U)}{\operatorname{span}}\{dx_i - f_i(t, x, u)\, dt \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Элементы этого модуля есть в точности те 1–формы на U, которые равны нулю на графиках всех решений системы (1).

Предположим для системы (1) поставлена какая–либо задача терминального управления на отрезке $[t_0, t_f]$. Обозначим через M_0 множество точек области U, удовлетворяющих начальным условиям, а через M_f — множество точек области U, удовлетворяющих конечным условиям.

Пусть $t_c \in [t_0, t_f]$. Обозначим через U_1 и U_2 множество точек области U, координата t которых удовлетворяет условию $t \in [t_0, t_c]$ и $t \in [t_c, t_f]$ соответственно. Диффеоморфизм F из некоторой области пространства $\mathbb{R}^{n+2}$, содержащей U_1, в U называют *зеркальной симметрией задачи терминального управления*, если

1) $F^*\big(\mathcal{C}^1\Lambda(U)\big) \subseteq \mathcal{C}^1\Lambda(U)$;
2) $F(M_0) \subseteq M_f$;
3) $F^*(t) = 2t_c - t$.

Из условий 2 и 3 этого определения следует, что $2t_c = t_0 + t_f$ и $F(U_1) = U_2$.

Обозначим через M_c множество таких точек P области U, что точки P и $F(P)$ имеют одинаковые координаты $t, x_1, \dots, x_n$ и могут отличаться только значениями координаты u. Из условия 3 следует, что M_c лежит в слое $\{t = t_c\}$ области U.

Теорема 1. Пусть поставленная для системы (1) задача терминального управления имеет зеркальную симметрию F, а $\big(x_*(t), u_*(t)\big)$ — такое решение системы (1) на отрезке $[t_0, t_c]$, что $\big(t_0, x_*(t_0), u_*(t_0)\big) \in M_0$, $\big(t_c, x_*(t_c), u_*(t_c)\big) \in M_c$. Тогда

$$u(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in [t_0, t_c] \\ F^*(u)\big(2t_c - t, x_*(2t_c - t), u_*(2t_c - t)\big), & t \in (t_c, t_f] \end{cases}$$

есть решение поставленной задачи терминального управления, т.е. подставляя эту функцию в систему (1) и решая для такой системы задачу Коши с заданными начальными условиями, получаем решение, удовлетворяющее конечным условиям.

Таким образом, наличие зеркальной симметрии позволяет понизить количество граничных условий.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Y}$ — две определенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Накрытием* из системы $\mathcal{E}$ в систему $\mathcal{Y}$ называют сюръективное отображение расширенного фазового пространства системы $\mathcal{E}$ в расширенное фазовое пространство системы $\mathcal{Y}$, при котором любая траектория системы $\mathcal{E}$ отображается в траекторию системы $\mathcal{Y}$, а прообраз любой траектории системы $\mathcal{Y}$ состоит из точек траекторий некоторой подсистемы системы $\mathcal{E}$. При этом говорят, что система $\mathcal{E}$ *накрывает* систему $\mathcal{Y}$, *слоем накрытия* называют прообраз любой точки расширенного фазового пространства системы $\mathcal{Y}$, систему $\mathcal{Y}$ называют *базовой*, ее зависимые переменные — *базовыми* переменными, а остальные зависимые переменные системы $\mathcal{E}$ — *переменными слоя*.

Рассмотрим метод накрытий для решения задачи терминального управления для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

с граничными условиями

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f. \tag{3}$$

Предположим, что мы нашли функции $U_i, \varphi_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, переменных

$$t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(k_m-1)}, \quad k_1 + \ldots + k_m = n,$$

удовлетворяющие следующим условиям:
(A) Соотношения $p_j = \varphi_j, j = \overline{1, n}$, определяют накрытие из системы

$$\dot{x}_j = f_j(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), \qquad j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

$$u_i^{(k_i)} = U_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(k_m-1)}), \quad i = \overline{1, m}, \tag{5}$$

в систему вида

$$\dot{p} = P(t, p), \quad p \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

(B) Заданные конечные значения $x(t_f)$ однозначно определяют значения $p_f = p(t_f)$ и наоборот, значения $p(t_f)$ однозначно определяют значения $x(t_f)$.

(C) Если p_0 — значение в точке t_0 решения $p(t)$ системы (6), удовлетворяющего условию $p(t_f) = p_f$, то система нелинейных уравнений

$$p_0 = \varphi(t_0, x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, u_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0)) \tag{7}$$

имеет решение относительно $u_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0)$.

В случае выполнения условий (A), (B), (C) задача (2), (3) может быть решена следующим образом.

1. Из конечных условий (3) вычисляем значения $p(t_f)$.

2. Находим решение $p(t)$ системы (6), удовлетворяющее условию $p(t_f) = p_f$ (решение задачи Коши в сторону уменьшения времени: от t_f до t_0).

3. Вычисляем $p(t_0)$.

4. Из системы (7) находим значения $u_1(t_0)$, $\dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0)$, $u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0)$.

5. Решая задачу Коши для системы (4)–(5) с начальными значениями

$$t_0, x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, u_1(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0),$$

находим решение $\bigl(x(t), u(t)\bigr)$ системы (2).

Найденное таким образом решение есть решение задачи (2), (3), так как функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям (3) по построению, в конечным условиям (3) — из условия (B).

Изложенный алгоритм решения задачи терминального управления основан на построении таких функций $U_1, \dots, U_m$, для которых соответствующая система (4)–(5) накрывает систему вида (6). Условие (B) устанавливает связь этого накрытия с конечными условиями поставленной задачи терминального управления, а условие (C) — с начальными условиями этой задачи.

Систему вида (4)–(5), удовлетворяющую условиям (A), (B) и (C) для некоторых функций $\varphi_j, j = \overline{1, n}$, будем называть *$r$–замыканием* задачи терминального управления (2), (3). r–Замыкание позволяет решать задачу.

В случае, когда есть ограничения на x, u и производные u, необходимо подбирать r–замыкание так, чтобы соответствующее решение задачи терминального управления удовлетворяло этим ограничениям.

В разделе 2.3 изложены способы построения r–замыкания для плоских систем. Известно, что при $m = 1$ любая плоская система приводится к каноническому виду:

$$y^{(n)} = v, \tag{8}$$

а граничные условия преобразуются в условия $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$, $\tilde{y}(t_f) = \tilde{y}_f$, $\tilde{y} = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$. Из свойства инвариантности r–замыкания следует, что достаточно построить r–замыкание для этой задачи терминального управления.

Пусть $y = \chi(t, z_1, \ldots, z_{2n})$ — такая функция независимых переменных $t, z_1, \ldots, z_{2n}$, что матрица

$$(a_{ij}) = \left(\frac{\partial^i \chi}{\partial t^{i-1} \partial z_j}\right), \qquad i = \overline{1, 2n}, \quad j = \overline{1, 2n} \tag{9}$$

невырождена в точке $(t_f, \bar{z}_0)$, $\bar{z}_0 = (z_{1,0}, \ldots, z_{2n,0})$. Построим такое дифференциальное уравнение порядка $2n$, чтобы функция $y = \chi(t, z_1, \ldots, z_{2n})$ была его общим решением. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(t_f, \bar{z}_0)$ переменные $z_1, \ldots, z_{2n}$ представляют собой функции от $t, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(2n-1)}$:

$$z_i = Z_i(t, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(2n-1)}), \qquad i = \overline{1, 2n}. \tag{10}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $2n$:

$$y^{(2n)} = \frac{\partial^{2n} \chi}{\partial t^{2n}} \Big(t,\ Z_1(t, y, \ldots, y^{(2n-1)}),\ \ldots,\ Z_{2n}(t, y, \ldots, y^{(2n-1)})\Big), \tag{11}$$

определенное в окрестности точки

$$\Big(t_f,\ y_f = \chi(t_f, \bar{z}_0),\ y_f^{(1)} = \frac{\partial \chi}{\partial t}(t_f, \bar{z}_0),\ \ldots,\ y_f^{(2n-1)} = \frac{\partial^{2n-1} \chi}{\partial t^{2n-1}}(t_f, \bar{z}_0)\Big). \tag{12}$$

По построению, для любого набора значений $z_1, \ldots, z_{2n}$ из окрестности точки $\bar{z}_0$ функции $y = \chi(t, z_1, \ldots, z_{2n})$ есть решение уравнения (11), а функция (10) — первые интегралы этого уравнения. Поэтому функции

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \chi\Big(t_f,\ Z_1(t,y,\ldots,y^{(2n-1)}),\ \ldots,\ Z_{2n}(t,y,\ldots,y^{(2n-1)})\Big),\\
p_2 &= \frac{\partial\chi}{\partial t}\Big(t_f,\ Z_1(t,y,\ldots,y^{(2n-1)}),\ \ldots,\ Z_{2n}(t,y,\ldots,y^{(2n-1)})\Big),\\
&\ldots\\
p_n &= \frac{\partial^{n-1}\chi}{\partial t^{n-1}}\Big(t_f,\ Z_1(t,y,\ldots,y^{(2n-1)}),\ \ldots,\ Z_{2n}(t,y,\ldots,y^{(2n-1)})\Big),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

как функции первых интегралов (здесь t_f — константа), также есть первые интегралы уравнения (11). Следовательно, их производные в силу этого уравнения равны нулю:

$$
\dot{p}_i = 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{14}
$$

Функции (10) как первые интегралы уравнения (11) не зависят от t на его решениях. Поэтому

$$
y^{(i-1)}(t_f) = \frac{\partial^{i-1}\chi}{\partial t^{i-1}}(t_f,\ z_1,\ldots,z_{2n}) = p_i(t_f), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{15}
$$

Теорема 2. Пусть $y = \chi(t,z_1,\ldots,z_{2n})$ — такая функция, что матрица (9) невырождена в точке $(t_f,\bar{z}_0)$, $\bar{z}_0 = (z_{1,0},\ldots,z_{2n,0})$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при $t_0 \in (t_f-\delta,t_f)$ существует такая окрестность $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ точки

$$
\left(\chi(t_0,\bar{z}_0),\ \frac{\partial\chi}{\partial t}(t_0,\bar{z}_0),\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1}\chi}{\partial t^{n-1}}(t_0,\bar{z}_0)\right),
$$

что для любой точки $(y_0,\ y_0^{(1)},\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$ из $\mathcal{V}$ уравнение (11) есть r–замыкание задачи терминального управления для уравнения (8) с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&y(t_0) = y_0, \quad y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},\\
&y(t_f) = y_f, \quad y^{(1)}(t_f) = y_f^{(1)}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_f) = y_f^{(n-1)},
\end{aligned}
$$

где числа $y_f, y_f^{(1)},\ldots,y_f^{(n-1)}$ определяются соотношениями (12).

В случае $m > 1$ формулы (9)–(15) можно обобщить. Кроме того, в диссертации метод накрытий обощается на случай так называемых лиувиллевых систем. Динамические системы с управлением, орбитально эквивалентные системам вида

$$
x_i^{(k_i)} = f_i(t,y,\ldots,y^{(s)}), \quad i = \overline{1,n}, \qquad y = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{16}
$$

называют *лиувиллевыми*. Множество решений лиувиллевой системы легко описать: множество решений системы (16) состоит из таких наборов функций $(x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_m(t))$, что функции $y_1(t), \dots, y_m(t)$ произвольны, а функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ находятся интегрированием правых частей системы (16). Переменные $y_1, \dots, y_m$ называют *лиувиллевыми*, их набор y — *лиувиллевым выходом*, а переменные $x_1, \dots, x_n$ — *интегральными*.

Рассмотривается случай, когда $k_i = 1$ для всех $i = \overline{1, n}$ и $m = 1$. Предположим, что для системы (16) такого вида поставлена задача терминального управления с граничными условиями

$$\begin{aligned} &x|_{t=t_0} = x_0, \qquad \tilde{y}|_{t=t_0} = \tilde{y}_0, \qquad && x = (x_1, \dots, x_n), \\ &x|_{t=t_f} = x_f, \qquad \tilde{y}|_{t=t_f} = \tilde{y}_f, \qquad && \tilde{y} = (y^{(0)}, \dots, y^{(L-1)}). \end{aligned} \tag{17}$$

Для уравнения $y^{(L)} = v$ с конечными условиями $\tilde{y}|_{t=t_f} = \tilde{y}_f$ построим r-замыкание вида

$$y^{(k)} = U(t, \overline{y}), \quad k = n + 2L, \qquad \overline{y} = (y^{(0)}, \dots, y^{(k-1)}) \tag{18}$$

с накрытием, заданным функциями $p_j = p_j(t, \overline{y}), \quad j = \overline{1, L}$.

В расширенном фазовом пространстве системы (18) рассмотрим векторное поле

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=0}^{k-2} y^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(l)}} + U(t, \overline{y}) \frac{\partial}{\partial y_j^{(k-1)}},$$

и функции $F_i(t, \overline{y}), i = \overline{1, n}$, определенные условиями

$$\overline{D}(F_i) = f_i, \qquad F_i|_{t=t_f} = 0.$$

Теорема 3. Уравнение (18) удовлетворяет условиям (A) и (B) определения r–замыкания граничной задачи для системы

$$\dot{x}_i = f_i(t, y, \dots, y^{(s)}), \quad i = \overline{1, n},$$

с граничными условиями (17), а функции $p_j, q_i = x_i - F_i, j = \overline{1, L}, i = \overline{1, n}$, определяют соответствующее накрытие.

Таким образом можно построить r–замыкание для лиувиллевых систем.

Рассмотрим теперь понятия декомпозиции системы с управлением и связанное с ним понятие декомпозиции терминальной задачи.

Декомпозицией системы с управлением называют преобразование системы в систему вида

$$\begin{aligned} \dot z &= g_1(t,z,v), \qquad z\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad v\in\mathbb{R}^{m_1}, && (19)\\ \dot\zeta &= g_2(t,\zeta,z,v,\dot v,\dots,v^{(l)},\xi), \qquad \zeta\in\mathbb{R}^{n_2}, \quad \xi\in\mathbb{R}^{m_2}, && (20)\end{aligned}$$

с состоянием (z,ζ) и управлением (v,ξ).

Декомпозицию различают по типу используемого преобразования. Мы используем преобразование орбитальной эквивалентности и называем соответствующую декомпозицию *орбитальной декомпозицией*.

Построение теории преобразований общего вида, в частности, теории орбитальной декомпозиции, невозможно в рамках конечномерной дифференциальной геометрии. Необходимо рассматривать пространства бесконечных джетов и бесконечные продолжения систем. Для формулировки результатов работы нам потребуются некоторые сведения из бесконечномерной геометрии систем с управлением.

Отметим, что решением системы (2) является векторная функция $s(t)=(x(t),u(t))$.

Две векторные функции s_1,s_2 *касаются в точке* $t_0\in M$ *с порядком* k, если они имеют в точке t_0 одинаковые частные производные до порядка k включительно.

Касание порядка k в точке t_0 есть отношение эквивалентности, которое обозначается $s_1 \overset{k,t_0}{\sim} s_2$. Множество классов эквивалентных векторных функций обозначают $J^k_{t_0}$. Класс эквивалентности векторной функции s будем обозначать $[s]^k_{t_0}$ и называть *k-джетом векторной функции s в точке t_0* . Таким образом, если $s_1 \overset{k,t_0}{\sim} s_2$, то $[s_1]^k_{t_0}=[s_2]^k_{t_0}$.

Пространством (или *многообразием*) *k-джетов* называют объединение $J^k_{t_0}$ по всем точкам $t_0\in M$:

$$J^k\pi=\bigcup_{t_0\in M} J^k_{t_0}.$$

Для любой векторной функции s определим кривую $j_k(s)(t)=[s]^k_t, t\in\mathbb{R}$ в $J^k\pi$ и назовем ее *k–джетом векторной функции s*.

Уравнением будем называть любое подмножество $\mathcal{E} \subset J^k\pi$. Множество $\mathcal{E}^{(1)} \subset J^{k+1}\pi$, состоящее из таких точек $[s]_t^{k+1}$, что k–джет векторной функции s касается уравнения $\mathcal{E}$ в точке $[s]_t^k$, называют *первым продолжением уравнения* $\mathcal{E}$. Продолжение $\mathcal{E}^{(l)}$ порядка l уравнения $\mathcal{E}$ определяется индуктивно, как первое продолжение продолжения $\mathcal{E}^{(l-1)}$ порядка $l-1$: $\mathcal{E}^{(l)} = \left(\mathcal{E}^{(l-1)}\right)^{(1)}$. Многообразие $\mathcal{E}^{(l)}$ лежит в $J^{k+l}\pi$ и задается всеми дифференциальными следствиями уравнения $\mathcal{E}$ вплоть до порядка l включительно.

Пространство бесконечных джетов $J^\infty\pi$ определяется как обратный предел цепочки проекций

$$J^0\pi \xleftarrow{\pi_{1,0}} J^1\pi \leftarrow \ldots \leftarrow J^k\pi \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} J^{k+1}\pi \leftarrow \ldots,$$

где $\pi_{k+1,k}$ — это проекция

$$\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}\pi \to J^k\pi, \qquad \pi_{k+1,k}([s]_t^{k+1}) = [s]_t^k.$$

А именно, элементом $J^\infty\pi$ является последовательность таких точек $\theta_k \in J^k\pi$, $k \geq 0$, что

$$\theta_0 \xleftarrow{\pi_{1,0}} \theta_1 \leftarrow \ldots \leftarrow \theta_k \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} \theta_{k+1} \leftarrow \ldots.$$

Определим *бесконечное продолжение* $\mathcal{E}^\infty$ (или *диффеотоп*) *уравнения* $\mathcal{E} \subset J^k\pi$ как подмножество $J^\infty\pi$, состоящее из таких точек $\theta = \{\theta_l\} \in J^\infty\pi$, что для любого натурального l точка θ_{k+l} принадлежит $\mathcal{E}^{(l)}$. График в $\mathcal{E}^\infty$ любого решения s уравнения $\mathcal{E}$ касается векторного поля

$$D_{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} u_l^{(j+1)}\frac{\partial}{\partial u_l^{(j)}},$$

которое называют *полной производной по переменной* t.

Набор векторных полей $X_1, \ldots, X_q$ на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы $\mathcal{E}$ будем называть *f–набором* системы $\mathcal{E}$, если

1) векторные поля $X_1, \ldots, X_q$ порождают инволютивное распределение на $\mathcal{E}^\infty$;

2) векторные поля $X_1, \ldots, X_q$ и $D_{\mathcal{E}}$ линейно независимы в каждой точке и порождают инволютивное распределение на $\mathcal{E}^\infty$;

3) существует такое кольцо $\mathcal{K}$ функций на $\mathcal{E}^\infty$, что $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ для некоторого целого $l \geq 0$ и $X_i(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ для любого $i = 1, \ldots, q$.

Регулярной точкой f–набора назовем точку общего положения $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ соответствующего кольца $\mathcal{K}$, в окрестности которой существуют такие функции $\zeta_1, \ldots, \zeta_q \in \mathcal{K}$, что матрица $\big(X_i(\zeta_j)(\theta)\big)$ невырождена.

В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 4.
(a) Набор векторных полей $\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_q$ является f-набором системы

$$a(t, z, \dot{z}, \ldots, z^{(l)}) = 0, \quad a \in \mathbb{R}^{n_1},\ z \in \mathbb{R}^{n_1+m_1}, \tag{21}$$

$$\dot{\zeta} = b(t, \zeta, z, \ldots, z^{(l)}, \xi, \ldots, \xi^{(l)}), \quad \zeta \in \mathbb{R}^q,\ \xi \in \mathbb{R}^{m_2}. \tag{22}$$

(b) Любой f–набор системы $\mathcal{E}$ в окрестности регулярной точки определяет для системы $\mathcal{E}$ орбитальную декомпозицию вида (21)–(22).
(c) Для любой орбитальной декомпозиции вида (21)–(22) системы $\mathcal{E}$ существует f–набор системы $\mathcal{E}$, определяющий эту декомпозицию.

Алгоритм построения декомпозиции по f–набору.
Пусть $(X_1, \ldots, X_q)$ — f–набор системы $\mathcal{E}$, $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — его регулярная точка.
1. Определяем кольцо $\mathcal{K}$ и его образующие.
2. В качестве новой независимой переменной τ системы $\mathcal{E}$ выбираем такой общий первый интеграл векторных полей $X_1, \ldots, X_q$, что $\tau \in \mathcal{K}$ и $D_t(\tau)(\theta) \neq 0$.
3. Дополняем функцию τ функциями $g_1, \ldots, g_p \in \mathcal{K}$ до максимального функционально независимого набора общих первых интегралов полей $X_1, \ldots, X_q$.
4. Выбираем такие функции $\zeta_1, \ldots, \zeta_q \in \mathcal{K}$, что матрица $\big(X_i(\zeta_j)(\theta)\big)$ невырождена (см. определение f–набора). Тогда в окрестности θ любой элемент из $\mathcal{K}$ есть функция от $\tau, g_1, \ldots, g_p, \zeta_1, \ldots, \zeta_q$.
5. Находим дифференциальные соотношения на $g_1, \ldots, g_p, \zeta_1, \ldots, \zeta_q$ и получаем систему вида

$$a(\tau, g, D_\tau(g), \ldots, D_\tau^l(g)) = 0, \tag{23}$$

$$D_\tau(\zeta) = b(\tau, \zeta, g, \ldots, D_\tau^{l_1}(g)). \tag{24}$$

6. Среди функций $g_1, \ldots, g_p$ находим те, которые вместе со своими производными не содержатся ни в одном уравнении вида (23). Обозначаем

их через $\xi_1, \ldots, \xi_{m_2}$. Остальные функций набора $g_1, \ldots, g_p$ обозначаем через $z_1, \ldots, z_{n_1+m_1}$. Тогда уравнения (23) принимают вид (21), а уравнения (24) — вид (22).

Если f–набор X системы $\mathcal{E}$ определяет декомпозицию (21)–(22), то систему (21) называют *факторизацией* системы $\mathcal{E}$ вдоль X. Образующие какой-либо алгебры Ли классических симметрий системы образует ее f–набор.

Рассмотрим теперь произвольную систему вида (2), которая имеет декомпозицию (19)–(20). Предположим, что задача терминального управления на решения системы (2) с граничными условиями (3) сводится к двум граничным задачам: на решения $\big(z(t), v(t)\big)$ системы (19) и на решения $\big(\zeta(t), \xi(t)\big)$ системы (20). Такое разделение задачи терминального управления на две граничные задачи называется *декомпозицией задачи терминального управления.*

Отметим, что декомпозицию задачи терминального управления следует строить так, чтобы возникающие граничные задачи имели решения.

В третьей главе приведены примеры решения задач терминального управления изложенными в диссертации методами. В разделе 3.1 для задачи терминального управления динамической системой, описывающей движение вертолета вдоль горизонтальной прямой, использованы зеркальные симметрии, чтобы снизить количество граничных условий для задачи, и метод накрытий, чтобы построить управление такой системой. Кроме того, с помощью декомпозиции задачи терминального управления показано, как построить программное управление движением вертолета в вертикальной плоскости.

В разделе 3.2 показано, как подбором плоского выхода можно решить задачу терминального управления для плоской динамической системы, описывающей движение квадрокоптера в коридоре. А именно, плоский выход выбирается так, чтобы все его значения были допустимыми. Такая замена позволяет учесть ограничения на область значений плоского выхода.

В разделе 3.3 показано, как для системы, описывающей движение автомобиля при отсутствии проскальзывания, на основе декомпозиции задачи терминального управления удается решить задачу терминального управления при сложной области допустимых значений переменных.

В разделе 3.4 на примере системы, описывающей движение маятника Капицы, показано, как можно использовать метод накрытий для лиувиллевых систем.

Основные выводы и результаты работы

В диссертации рассмотрены различные дифференциально-геометрические подходы к решению задач терминального управления плоскими и лиувиллевыми системами при наличии ограничений.

На примере решения задачи управления движением вертолета вдоль горизонтальной прямой показано, как использование зеркальной симметрии задачи позволяет снизить количество граничных условий.

Сформулированный в работе метод накрытий применен к плоским и к лиувиллевым системам. Хотя доказаны только локальные факты, т.е. когда начальный момент близок к конечному, а начальные условия близки к конечным условиям, но представленная конструкция r-замыкания и накрытия может быть применима и в нелокальной ситуации.

Показано, что для плоской системы в качестве r-замыкания можно выбрать произвольную определенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, порядок которой равен количеству условий терминальной задачи. На примере управления автомобилем показано, как этот факт может быть использован для учета ограничений. А именно, в качестве r-замыкания была выбрана система, обладающая инвариантным множеством, все точки которого удовлетворяют ограничениям задачи. Найденная траектория лежит в этом инвариатном множестве и поэтому удовлетворяет всем ограничениям задачи.

На примере терминального управления движением квадрокоптера в коридоре показано, как замена плоского выхода позволяет учесть ограничения на его значения.

Использование декомпозиции системы позволяет разбить поставленную задачу терминального управления на две более простые граничные задачи, что продемонстрировано на примере задачи объезда автомобилем трех столбиков.

Итак, **основные выводы диссертации** могут быть сформулированы следующим образом:

1. Зеркальные симметрии могут быть применены при решении задач терминального управления нелинейными динамическими системами для уменьшения количества граничных условий.

2. Метод накрытий может быть применен для решения задач терминального управления плоскими и лиувиллевыми системам.

3. Для плоской системы в качестве r-замыкания может быть выбрана произвольная определенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, порядок которой равен количеству условий терминальной задачи. Это позволяет для учета ограничений задачи использовать инвариантные множества r-замыкания.

4. Использование декомпозиции системы позволяет разбить поставленную для нее задачу терминального управления на две более простые граничные задачи.

5. При решении задач терминального управления плоской системой замена плоского выхода позволяет учесть ограничения на его значения.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. **Белинская Ю. С., Четвериков В. Н. Управление четырехвинтовым вертолетом // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 5. С.157-171. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/397373.html (дата обращения 11.10.2016). (0,8 п.л. / 0,4 п.л.)**
2. Белинская Ю. С. Реализация типовых маневров четырехвинтового вертолета // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон.журн. 2013. № 2. Режим доступа: http://sntbul.bmstu.ru/doc/551872.html (дата обращения 22.03.2017). (0,7 п.л.)
3. **Белинская Ю.С., Четвериков В.Н., Ткачев С.Б. Автоматический синтез программного движения вертолета вдоль горизонтальной прямой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С.285–298. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/660675.html (дата обращения 17.01.2017). (0,7 п.л. / 0,2 п.л.)**

4. Белинская Ю.С. Построение автоматического управления горизонтальным движением вертолета // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 1 (25). С. 6. (0,3 п.л.)
5. Белинская Ю.С. Автоматическое управление вертолетом вдоль горизонтальной прямой // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: труды. Электронный ресурс. М, 2014. С. 1524–1535. (0,7 п.л.)
6. **Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1629–1640. (0,4 п.л. / 0,2 п.л.)**
7. **Belinskaya Yu. S. and Chetverikov V. N. Covering method for point-to-point control of constrained flat system // IFAC-Papers OnLine. 2015. Vol. 48. Issue 11. P. 924-929. (0,3 п.л. / 0,1 п.л.)**
8. **Белинская Ю.С. Решение задачи терминального управления для плоской системы с учетом ограничений заменой плоского выхода // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2016. № 6 (69). С. 122–134. (0,7 п.л.)**
9. **Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Симметрии, накрытия, декомпозиция систем и терминальное управление // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1477. (0,5 п.л. / 0,2 п.л.)**