На правах рукописи

Велищанский Михаил Александрович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

По специальностям 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ,
05.13.01 – Системный анализ, управление
и обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор **Крищенко Александр Петрович**
Научный консультант:	доктор физико-математических наук, доцент **Канатников Анатолий Николаевич**
Официальные оппоненты:	**Фомичев Василий Владимирович**, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления
	Сазонов Виктор Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», главный научный сотрудник отдела №5
Ведущая организация:	федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук»

Защита состоится «___» ______________ 2017 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, ул. 2-я Бауманская, д.5, стр. 1, зал заседания Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «___» ______________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат технических наук, доцент — Аттетков Александр Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Среди задач управления движением различных механических объектов можно выделить класс, когда за заданное или конечное время требуется перевести объект из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Такие задачи называют терминальными. При этом, в большинстве случаев, решение данных задач осложняется наличием ограничений на состояния и управления. К подобным задачам относятся и рассматриваемые в данной работе задача переориентации космического аппарата (КА), а также задача движения летательного аппарата (ЛА) через заданные граничные состояния. К сожалению, большинство разработанных к настоящему моменту методов решения терминальных задач не дают возможности учета ограничений, наложенных на состояние системы. Применение принципа максимума Понтрягина к решению терминальных задач при наличии ограничений на управления ведет к получению управления, не являющегося непрерывным. Одним из возможных подходов к учету ограничений на состояния в терминальных задачах является метод локальных вариаций (Н.Н. Моисеев, Ф.Л. Черноусько, И.А. Крылов) применение которого, однако, может приводить к ограничениям на реализуемость траектории. В настоящее время широкое распространение получили методы, основанные на преобразовании аффинных систем к регулярному каноническому виду при помощи замен переменных состояния, управления и независимой переменной (B. Jakubczyk, W. Respondek, А.П. Крищенко, С.Б. Ткачев, M. Sampei, K. Furuta, M. Guay, B. Fang, G. Kalker, А.В. Пестерев, Л.Б. Рапопорт и др.). Поэтому актуальной является разработка методов решения терминальных задач при наличии ограничений для обратимых систем и, в частности, для систем канонического вида.

Цель проведенных исследований — разработка и программная реализация методов аналитического и численного решения терминальных задач для обратимых систем в множестве непрерывных управлений при наличии ограничений на переменные состояния и управления, применение разработанных методов для решения задач переориентации КА, планировании движения ЛА и сравнение различных решений этих задач.

Основными вопросами, рассматриваемыми в диссертации, являются методы построения параметрических множеств траекторий, удовлетворяющих граничным условиям, нахождение в этих множествах решения поставленной задачи, сравнение различных решений.

Методы исследования. В работе применяются методы математической теории управления, методы конечномерной оптимизации, концепция обратных задач динамики, метод Бубнова — Галеркина, различные численные методы и методы математического моделирования.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

1. Методы построения параметрических семейств траекторий для терминальных задач, реализуемых в классе непрерывных управлений, для систем с обратимым отображением «вход-выход».

2. Численный метод решения терминальных задач для класса обратимых систем при наличии ограничений.

3. Численное решение задач переориентации КА, планирования движения ЛА и сравнение различных решений этих задач.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата и подтверждается результатами математического моделирования.

Практическая значимость. Результаты диссертационной работы могут использоваться для разработки алгоритмов терминального управления для широкого класса механических систем, а также других динамических систем, используемых как модели в различных областях естествознания.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XIII-й международной конференции Process Control (Братислава, Словакия 2001), I-й Московской конференции «Декомпозиционные методы в математическом моделировании» (Москва, 2001), VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Екатеринбург, 2011), VII Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2002), XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2012), Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015, 2017), XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2016), 20-ом конгрессе ИФАК (Тулуза, Франция, 2017).

Основные научные результаты диссертации отражены в 7 научных работах общим объемом 3.47 п.л., в том числе в 6 статьях из Перечня российских рецензируемых научных журналов и изданий, и 8 тезисах докладов объемом 0.71 п.л.

Личный вклад соискателя. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 124 страницах, содержит 45 рисунков. Библиография включает 92 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе приведены основные сведения из геометрической теории нелинейных динамических систем и математической теории управления, включая понятия динамической системы, аффинной системы, системы канонического вида, терминальной задачи. Описаны основные идеи метода обратных задач динамики, широко используемого в данной работе. Введено понятие обратимой системы.

Определение. Система

$$\begin{cases} \dot{x} &= F(x,u), \\ y &= h(x), \end{cases}$$

называется обратимой, если для любого наперед заданного выхода $y(t)$ системы найдется реализующий его вход $u(t)$.

Приведены известные теоремы, содержащие условия существования преобразования аффинных систем к каноническому виду.

Во второй главе рассматривается задача переориентации КА из произвольного углового положения в требуемое конечное положение покоя за заданное время. В качестве математической модели КА выбрана модель, описывающая КА как твердое тело. Представлен обзор литературы по методам, используемым при решении данной задачи.

В разделе 2.1 вводится математическая модель, описывающая угловое движение КА как угловое движение твердого тела

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = u, \tag{1}$$

где кватернион $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$ удовлетворяет условию нормировки

$$|\Lambda(t)|^2 = \lambda_0^2(t) + \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t) = 1 \tag{2}$$

и задает положение связанной системы координат относительно неподвижной системы координат, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathbf{R}^3$ — вектор угловой скорости в проекциях на оси связанной системы координат, $u = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbf{R}^3$ — управление, I — матрица моментов инерции КА, $\circ$ — операция умножения кватернионов. Под управлением понимается суммарный момент, действующий на корпус КА со стороны исполнительных органов. В работе предполагается, что компоненты вектора управления как функции времени непрерывны.

Рассматривается задача переориентации КА из заданного начального положения

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0 \tag{3}$$

в заданное конечное положение покоя

$$\Lambda(t_*) = \Lambda_*, \quad \omega(t_*) = 0 \tag{4}$$

за промежуток времени $T = [0, t_*]$.

Приводится известное (Ермошина О.В., Крищенко А.П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2, С. 155-162.) решение терминальной задачи (1)-(4)

$$u = u(t) = 2I(\Lambda^{-1}(t) \circ \ddot{\Lambda}(t) - \Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t) \circ \Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t)) + \\ + 4\Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t) \times I\Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (5)$$

где

$$\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T, \ \lambda_i(t) = \frac{\mu_i(t)}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{3} \mu_i^2(t)}}, \quad i = \overline{0,3}, \quad (6)$$

$$\mu_i(t) = \lambda_{i*} + c_{i1}(t - t_*)^3 + c_{i2}(t - t_*)^4 + c_{i3}(t - t_*)^5, \quad i = \overline{0,3}. \quad (7)$$

Коэффициенты c_{ik}, $i = \overline{0,3}$, $k = \overline{1,3}$, однозначно выражаются через граничные условия:

$$\begin{array}{ll} \Lambda(0) = \Lambda_0, & \Lambda(t_*) = \Lambda_*, \\ \dot{\Lambda}(0) = 0.5\Lambda_0 \circ \omega_0, & \dot{\Lambda}(t_*) = 0, \\ \ddot{\Lambda}(0) = 0.5(\dot{\Lambda}_0 \circ \omega_0 + \Lambda_0 \circ I^{-1}(u_0 - \omega_0 \times I\omega_0)), & \ddot{\Lambda}(t_*) = 0, \end{array} \quad (8)$$

соответствующим условиям (3)–(4) и значениям управления $u(0) = u_0$, $u(t_*) = 0$, определяя тем самым единственную кинематическую траекторию.

В разделах 2.2, 2.3 предложены различные параметрические расширения набора функций (7) до множеств функций из C^2, удовлетворяющих граничным условиям (8), что позволяет расширить класс рассматриваемых движений и при выборе решения использовать оптимизационный подход.

В разделе 2.2 рассматривается расширение набора функций (7) до параметрического множества полиномиальных вектор-функций. Данное множество получается прибавлением к функциям $\mu_i(t)$, $i = \overline{0, 3}$, заданным в виде (7), полиномов

$$\mu_i^{k_i}(t) = t^3(t - t_*)^3(c_{i4} + c_{i5}t + \ldots + c_{ik_i}t^{k_i - 4}), \quad i = \overline{0,3}, \quad (9)$$

которые равны нулю при $t = 0$ и $t = t_*$ вместе со своими первыми двумя производными. Построенная при помощи полиномов $\tilde{\mu}_i(t) = \mu_i(t) + \mu_i^{k_i}(t)$

функция $\Lambda(\tilde{\mu}_i)$ также удовлетворяет граничным условиям (8), что позволяет использовать функции $\tilde{\mu}_i(t)$ для задания кинематической траектории по соотношениям (6), а затем по формуле (5) найти реализующее ее управление.

Для нахождение коэффициентов c_{ij} используется задача конечномерной оптимизации

$$J(c_{ij},\ i = \overline{0,3},\ j = \overline{4, k_i}) \to \min .$$

При наличии ограничений на управления ($u \in U$) или угловые скорости ($\omega \in \Omega$) для нахождения коэффициентов c_{ij} используется задача конечномерной оптимизации при наличии ограничений

$$J(c_{ij},\ i = \overline{0,3},\ j = \overline{4, k_i})\,|_{u \in U, \omega \in \Omega} \to \min .$$

В качестве критерия оптимизации в работе принят

$$J = \int\limits_0^T \left(\frac{|u_1(\tau)|}{l_1} + \frac{|u_2(\tau)|}{l_2} + \frac{|u_3(\tau)|}{l_3} \right) d\tau, \tag{10}$$

где l_1, l_2, l_3 — нормирующие множители.

В разделе 2.3 расширение набора функций (7) до параметрического множества реализуется при помощи добавлении к каждой функции $\mu_i(t)$, $i = \overline{0,3}$, слагаемого

$$\mu_i^s(t) = t(t - t_*)p_i(t), \quad i = \overline{0,3}, \tag{11}$$

где $p_i(t)$ — кубический сплайн дефекта 1, построенный на отрезке времени $[0, t_*]$ по сетке с $n+1$ узлом $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t_*$, который вместе со своей первой производной $p_i'(t)$ равен нулю на концах интервала времени T. В результате функция $\Lambda(\hat{\mu}_i)$, где $\hat{\mu}_i = \mu_i(t) + \mu_i^s(t)$, удовлетворяет граничным условиям (8).

Вид кубического сплайна $p_i(t)$ зависит от параметров $p_{ij} = p_i(t_j)$, $j = \overline{1, n-1}$ — равных значению сплайна в узлах сетки. В результате получено p_{ij} -параметрическое множество решений терминальной задачи $j = \overline{1, n-1}$, $i = \overline{0,3}$. Для выбора значений p_{ij} используется задача конечномерной оптимизации с критерием (10).

В разделе 2.4 функции $\mu_i(t)$ из (6) ищутся в виде линейной комбинации кубических B-сплайнов, построенных на отрезке времени $[0, t_*]$ по сетке с $m+1$ узлом $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t_*$:

$$\mu_i(t) = \sum_{j=-1}^{m+1} b_{ij} B_j^{(3)}(t) \quad i = \overline{0,3}, \quad m \geq 3, \tag{12}$$

где b_{ij} — подлежащие определению неизвестные коэффициенты, а $B_j^{(3)}(t)$ — кубический B-сплайн. Если в (12) $m > 3$, то получается b_{ij} - параметрическое семейство решений. Для нахождение коэффициентов $b_{ij} \quad j = 2, m-2$ используется задача конечномерной оптимизации с критерием (10).

В разделе 2.5 строится стабилизирующее управление в виде нестационарной обратной связи из условия экспоненциального убывания ошибок $e_i = \lambda_i - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1,3}$. Построенное стабилизирующее управление имеет вид:

$$u_{cm}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t) = I N_0^{-1}(\Lambda)(2F(\bar{\Lambda}, \omega, t) - M_0(\omega) M(\omega)\Lambda) + \omega \times I\omega, \tag{13}$$

где $F(\bar{\Lambda}, \dot{\bar{\Lambda}}, t) = \begin{pmatrix} \ddot{\lambda}_1(t) - k_{11}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_1(t)) - k_{01}(\lambda_1 - \lambda_1(t)) \\ \ddot{\lambda}_2(t) - k_{12}(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_2(t)) - k_{02}(\lambda_2 - \lambda_2(t)) \\ \ddot{\lambda}_3(t) - k_{13}(\dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_3(t)) - k_{03}(\lambda_3 - \lambda_3(t)) \end{pmatrix}$, $M(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_0(\omega) = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$, $N_0(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, $k_{ij} > 0$, $\lambda_0 = \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$, в области $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_0 = -\sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$, в области $\lambda_0 < 0$.

В разделе 2.6 рассмотрены способы учета ограничений на управления следующего вида

$$|u_i| \leq u_{i\max}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{14}$$

Основным используемым в работе подходом к учету ограничений (14) является использование управления с насыщением, состоящее в замене обратной связи $u = u_{cm} = u_{cm}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t) = (u_{1cm}, u_{2cm}, u_{3cm})^T$

на обратную связь $u = \tilde{u} = \tilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T$, где $\tilde{u}_i = u_{icm}$, если $|u_{icm}| \leq u_{i\max}$, или $\tilde{u}_i = \operatorname{sign}(u_{icm})\, u_{imax}$, если $|u_{icm}| > u_{i\max}$. Наиболее часто данный подход использовался в несколько модифицированном виде, когда построение программной траектории осуществлялось с использование задачи конечномерной оптимизации при наличии ограничений (14).

В разделе 2.7 приведены результаты сравнения по критерию (10) алгоритмов управления при предложенных параметрических расширениях. Проведено моделирование работы предлагаемого алгоритма при наличии ограничений на управления, а так же в условиях неточной информации о матрице инерции КА. Приводятся рекомендации по использованию предлагаемого в работе алгоритма. В пункте 2.7.5 на задаче управления пространственным разворотом КА проведено сравнение с решением (Левский М.В. Управление переориентацией космического аппарата с минимальным интегралом энергии. //Автоматика и телемеханика. 2010. № 12. С. 25-42.), построенным на основе принципа максимума Понтрягина. Решения сравнивались с помощью интеграла от кинетической энергии вращения КА. Моделирование показало, что различие в значениях критерия оказалось в пределах $10 - 15\%$.

В третьей главе рассматривается задача автоматической прокладки траектории летательного аппарата при наличии ограничений на переменные состояния и управления. Время маневра считается известным. В качестве математической модели ЛА выбрана модель материальной точки, описываемая системой из шести дифференциальных уравнений. Учет ограничений на переменные состояния осуществлялся как средствами численной оптимизации, так и аналитическим методом.

В разделах 3.1, 3.2 приводится используемая математическая модель движения ЛА и ее преобразование к каноническому виду. Математическая модель ЛА имеет вид

$$\begin{cases} \dot{V} = (n_x - \sin\vartheta)g, & \dot{H} = V\sin\vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \dfrac{(n_y\cos\gamma - \cos\vartheta)g}{V}, & \dot{L} = V\cos\vartheta\cos\psi, \\ \dot{\psi} = -\dfrac{n_y g\sin\gamma}{V\cos\vartheta}, & \dot{Z} = -V\cos\vartheta\sin\psi, \end{cases} \tag{15}$$

где V — путевая скорость; ϑ — угол наклона траектории; ψ — угол курса; H — высота; L — продольная дальность; Z — боковая дальность;

n_x — продольная перегрузка; n_y — поперечная перегрузка; γ — угол крена; g — ускорение свободного падения. При этом высота H, продольная дальность L и боковая дальность Z представляют собой координаты положения центра масс в нормальной земной неподвижной системе координат, а V, ϑ и ψ задают движение в траекторной системе координат. В качестве управлений рассматривают перегрузки n_x, n_y и угол крена γ. Система (15) может быть приведена к следующему каноническому виду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_4, \\ \dot{y}_4 = -g + v_1 g \sin\vartheta + v_2 g \cos\vartheta, \\ \dot{y}_2 = y_5, \\ \dot{y}_5 = v_1 g \cos\vartheta \cos\psi - v_2 g \sin\vartheta \cos\psi + v_3 g \sin\psi, \\ \dot{y}_3 = y_6, \\ \dot{y}_6 = -v_1 g \cos\vartheta \sin\psi + v_2 g \sin\vartheta \sin\psi + v_3 g \cos\psi, \end{cases} \tag{16}$$

где $y_1 = H,\ y_2 = L,\ y_3 = Z,\ y_4 = \dot{y}_1 = V\sin\vartheta,\ y_5 = \dot{y}_2 = V\cos\vartheta\cos\psi$, $y_6 = \dot{y}_3 = -V\cos\vartheta\sin\psi$. $v_1 = n_x,\ v_2 = n_y\cos\gamma,\ v_3 = n_y\sin\gamma$.

В разделе 3.3 рассмотрена задача терминального управления с фиксированным временем при отсутствии ограничений: для системы (15) найти непрерывные управления n_x, n_y и γ, которые переводят систему (15) из заданного начального состояния

$$(H_0,\ L_0,\ Z_0,\ V_0,\ \vartheta_0,\ \psi_0),\ (n_{x0},\ n_{y0},\ \gamma_0) \tag{17}$$

при $t = 0$ в заданное конечное состояние

$$(H_*,\ L_*,\ Z_*,\ V_*,\ \vartheta_*,\ \psi_*),\ (n_{x*},\ n_{y*},\ \gamma_*) \tag{18}$$

за заданное время t_*. Для решения данной задачи система (16) записывается в виде системы из трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -g + v_1 g \sin\vartheta + v_2 g \cos\vartheta, \\ \ddot{y}_2 = v_1 g \cos\vartheta \cos\psi - v_2 g \sin\vartheta \cos\psi + v_3 g \sin\psi, \\ \ddot{y}_3 = -v_1 g \cos\vartheta \sin\psi + v_2 g \sin\vartheta \sin\psi + v_3 g \cos\psi, \end{cases} \tag{19}$$

которая в области $\Omega = \{|\vartheta| < \frac{\pi}{2},\ |\psi| < \pi,\ V > 0\}$ разрешима относительно управлений. Поэтому для любой траектории движения, заданной в виде

$y_i = y_i(t) \in C^2[0, t_*],\ t \in [0, t_*],\ i = \overline{1,3}$ можно найти управления $v_i = v_i(t)$, реализующие данную траекторию. В качестве таких функций были выбраны многочлены пятой степени следующего вида

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{2} \frac{y_{i0}^{(j)}}{j!} t^j + \sum_{j=1}^{3} c_{ij} t^{2+j},\ i = \overline{1,3}, \tag{20}$$

где $y_{i0}^{(j)}$ и c_{ij} — коэффициенты, однозначно определяющиеся из (17), (18).

В разделе 3.4 рассматривается задача улучшения свойств траектории, полученной в разделе 3.3, методами конечномерной оптимизации при свободном моменте времени t_*. Поскольку граничные условия полностью определяют вид полинома (20) и получаемых программных траектории и управлений, была рассмотрена задача выбора времени маневра таким образом, чтобы удовлетворялись наложенные на переменные состояния и управления ограничения. Искомое время t_* получается как решение следующей задачи одномерной минимизации при наличии ограничений:

$$t_*|_{u \in U,\ s \in (\Omega \cap S),\ t_* \in T} \to min, \tag{21}$$

где $u = (n_x, n_y, \gamma)$ – вектор управлений, $s = (H, L, Z, V, \vartheta, \psi)$ – вектор переменных состояния, T – множество допустимых значений времени маневра t_*, множества S и U задаются неравенствами (22) и (23) соответственно,

$$\begin{gathered} H \in [H_{min},\, H_{max}],\ L \in [L_{min},\, L_{max}],\ Z \in [Z_{min},\, Z_{max}],\ V \in [V_{min},\, V_{max}], \\ |\vartheta| \le \tfrac{\pi}{2},\ \vartheta \in [\vartheta_{min},\, \vartheta_{max}],\ \psi \in [\psi_{min},\, \psi_{max}], \end{gathered} \tag{22}$$

$$\gamma \in [\gamma_{min},\, \gamma_{max}],\ n_x \in [n_{x\,min},\, n_{x\,max}],\ n_y \in [n_{y\,min},\, n_{y\,max}]. \tag{23}$$

Вместо задачи (21) в разделе 3.4 предлагается использовать задачу безусловной минимизации с критерием

$$J(t_m) = \begin{cases} t_m, \quad \text{если} \ \ u(t) \in U,\ s(t) \in (\Omega \cap S),\ \forall t \in [0,\, t_m], \\ \hat{t}_* + \sum_{i=1}^{6} a_i \Delta s_i + \sum_{i=1}^{3} b_i \Delta u_i, \quad \text{иначе}, \end{cases} \tag{24}$$

где $u(t)$ и $s(t)$ – решения граничной задачи (17), (18) при $t_* = t_m$, $\hat{t}_*$ – верхняя граница отрезка $\hat{T} = [\hat{t}_0,\ \hat{t}_*]$, используемого в качестве области возможных значений t_*, Δs_i – величина максимального по абсолютной величине отклонения i-й переменной состояния от допустимого диапазона (22), Δu_i – величина максимального по абсолютной величине отклонения i-ого управления от допустимого диапазона (23), a_i, b_i – весовые множители.

В разделе 3.5 приведены результаты численного решения задачи (24).

В разделе 3.6 представлен альтернативный способ построения программной траектории, удовлетворяющей наложенным на состояния ограничениям. Основным отличием предлагаемого способа является использование фазовой плоскости, а не пространства состояний. В основу метода положен способ решения следующей задачи терминального управления с фиксированным временем при наличии ограничений на переменные состояния: для динамической системы

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = g(y, \dot{y})u \tag{25}$$

найти управление $u(t)$, которое переводит систему (25) за время t_* из заданного начального положения в заданное конечное

$$\begin{gathered} y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad y(t_*) = y_*,\ \dot{y}(t_*) = \dot{y}_*, \quad t_{\inf} < t_* < t_{\sup}, \\ t_{\inf} = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_+(y)}, \quad t_{\sup} = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_-(y)}, \end{gathered} \tag{26}$$

при наличии ограничений на переменные состояния

$$Y = \left\{(y, \dot{y}) \in R^2 : y \in [y_0, y_*], 0 < \psi_-(y) < \dot{y} < \psi_+(y),\ \psi_\pm(y) \in C^1[y_0, y_*]\right\}, \tag{27}$$

считая, что $g(y, \dot{y}) \neq 0$ при $(y, \dot{y}) \in Y$ и управление является непрерывной функцией времени.

Решение задачи (25)–(27) эквивалентно нахождению функции $\psi(y) \in \in C^1[y_0, y_*]$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi(y)} = t_*, \tag{28}$$

$$0 < \psi_-(y) < \psi(y) < \psi_+(y), \quad y \in [y_0, y_*], \tag{29}$$

$$\psi(y_0) = \psi_0, \quad \psi(y_*) = \psi_*. \tag{30}$$

Искомая функция $\psi(y)$ представляется в виде:

$$\psi(y) = \frac{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}{c_*\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) + (1 - c_*)\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)}, \tag{31}$$

где

$$c = c_* = \frac{t_* - t_-(\hat{\varepsilon})}{t_+(\bar{\varepsilon}) - t_-(\hat{\varepsilon})} \in (0,\ 1),\ t_+(\bar{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)},\ t_-(\hat{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}.$$

Функции $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ зависят от вычисляемых параметров $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$ и $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$ соответственно.

Построенной функции $\psi(y)$ (31) соответствует программное управление, являющееся решением задачи (25)–(27) и имеющее вид:

$$u(y(t)) = [\psi'(y(t))\psi(y(t)) + f(y(t), \psi(y(t)))]/g(y(t), \psi(y(t))),$$

где $y(t)$ — программная траектория, вычисляемая согласно $\dot{y} = \psi(y)$. Стабилизирующее управление имеет вид:

$$u(y) = [\ddot{y}(t) + f(y, \dot{y}) - k_1(\dot{y} - \dot{y}(t)) - k_2(y - y(t))]/g(y, \dot{y}),$$

где $k_1, k_2 > 0$ – константы, задающие динамику убывания ошибки $e = y - y(t)$.

Наличие параметров-векторов $\bar{\varepsilon}$ и $\hat{\varepsilon}$, от которых зависит искомая функция (31), позволяет искать решение задачи (25)–(27) в параметрическом классе функций. Эта трактовка позволяет использовать оптимизационный подход к решению данной задачи, что дает возможность находить траектории, обеспечивающие уменьшение максимального значения программного управления, уменьшение среднего значения управления и т.д. Приведены результаты анализа численного решения задачи (25)–(27).

Предложенный метод решения имеет обобщение на следующую терминальную задачу: для аффинной системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in R^{2n},\ u \in R^n, \tag{32}$$

приводимой к каноническому виду

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = f_1(y, \dot{y}) + \sum\limits_{j=1}^{n} g_{1j}(y, \dot{y}) u_j, \\ \quad \dots \\ \ddot{y}_n = f_n(y, \dot{y}) + \sum\limits_{j=1}^{n} g_{nj}(y, \dot{y}) u_j, \quad y = (y_1, \dots, y_n)^T, \end{cases} \tag{33}$$

найти управления $u_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, которые переводят систему (33) за время t_* из заданного начального положения в заданное конечное

$$y_i(0)=y_{i0},\ \dot y_i(0)=\dot y_{i0},\quad y_i(t_*)=y_{i*},\ \dot y_i(t_*)=\dot y_{i*},\quad i=\overline{1,n}, \tag{34}$$

при наличии следующих ограничений на переменные состояния:

$$Y=\Big\{(y,\dot y)\in R^{2n}:\ \begin{array}{l} y_i\in[y_{i0},y_{i*}],\ 0\le\psi_{i-}(y_i)\le\dot y_i\le\psi_{i+}(y_i),\\ \psi_{i\pm}\in C[y_{i0},y_{i*}],\quad i=\overline{1,n}\Big\}, \end{array} \tag{35}$$

предполагая, что матрица $G(y,\dot y)=||g_{ij}(y,\dot y)||,\ i,j=\overline{1,n}$ является невырожденной при $(y,\dot y)\in Y$ и управления u_i являются непрерывными функциями времени.

Лемма. Для существования решения задачи (33)-(35) необходимо и достаточно, чтобы ограничения удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\psi_{i-}(y_{i0})<\dot y_{i0}<\psi_{i+}(y_{i0}),\ \psi_{i-}(y_{i*})<\dot y_{i*}<\psi_{i+}(y_{i*}),\\ \int_{y_{i0}}^{y_{i*}}\frac{dy}{\psi_{i+}(y)}\le t_*\le\int_{y_{0i}}^{y_{i*}}\frac{dy}{\psi_{i-}(y)},\quad i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{36}$$

Решение искомой терминальной задачи (33)-(35) имеет вид

$$\begin{gathered}u(y(t))=G^{-1}(y(t),\psi(y(t)))\begin{pmatrix}\psi_1'(y_1(t))\psi_1(y_1(t))-f_1(y(t),\psi(y(t)))\\ \cdots\cdots\cdots\\ \psi_n'(y_n(t))\psi_n(y_n(t))-f_n(y(t),\psi(y(t)))\end{pmatrix},\\ \psi(y)=(\psi_1(y_1),\ldots,\psi_n(y_n))^T.\end{gathered} \tag{37}$$

Данным методом получено решение терминальной задачи (16)-(18) при наличии следующих ограничений на переменные состояния:

$$\dot H_{min}<\dot H<\dot H_{max},\quad \dot L_{min}<\dot L<\dot L_{max},\quad \dot Z_{min}<\dot Z<\dot Z_{max}. \tag{38}$$

Вводя новые «виртуальные» управления

$$\begin{gathered}u_1=-g+v_1g\sin\vartheta+v_2g\cos\vartheta,\\ u_2=v_1g\cos\vartheta\cos\psi-v_2g\sin\vartheta\cos\psi+v_3g\sin\psi,\\ u_2=-v_1g\cos\vartheta\sin\psi+v_2g\sin\vartheta\sin\psi+v_3g\cos\psi,\end{gathered} \tag{39}$$

систему (16) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{H} = u_1, \\ \ddot{L} = u_2, \\ \ddot{Z} = u_3. \end{cases} \tag{40}$$

Решение задачи (16)-(18), (38) получается согласно (37). При этом управления v_1, v_2 и v_3 выражаются через новые «виртуальные» управления (39) при помощи следующих соотношений:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{(u_1 + g)\sin\vartheta + u_2\cos\vartheta\cos\psi - u_3\cos\vartheta\sin\psi}{g}, \\ v_2 = \dfrac{(u_1 + g)\cos\vartheta - u_2\sin\vartheta\cos\psi + u_3\sin\vartheta\sin\psi}{g}, \\ v_3 = \dfrac{u_2\sin\psi + u_3\cos\psi}{g}. \end{cases}$$

Исходные управления n_x, n_y и γ определяются как

$$n_x = v_1,\ \gamma = \mathrm{arctg}(v_3/v_2),\ n_y = v_2/\cos\gamma.$$

Основные выводы и заключение по работе

Метод параметрических расширений множеств траекторий позволяет находить решения терминальных задач для обратимых систем как с дополнительными свойствами, так и с улучшенными характеристиками. Для n-мерных систем, которые приводятся к регулярному каноническому виду, в котором все индексы приводимости равны двум, данный метод позволяет получать аналитическое решение терминальной задачи при наличии ограничений на переменные состояния.

Использование параметрических расширений множеств траекторий позволяет получать решение задачи переориентации КА в классе непрерывных управлений, близкое к оптимальному решению по использованному критерию качества.

Использование параметрических расширений множеств траекторий для шестимерной модели ЛА позволило предложить аналитический метод построения пространственных траекторий ЛА с учетом ограничений на переменные состояния.

Вместе с тем необходимо дальнейшее расширение класса систем, для которых применим метод параметрических расширений множеств траекторий а так же аналитический метод построения траекторий с учетом наложенных ограничений на переменные состояния. Для улучшения применимости аналитического метода в практических задачах необходимо дальнейшее его развитие с целью возможности автоматического учета ограничений на производные более высокого порядка, нежели это представлено в данной работе.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. Attitude control design for spacestation with variable structure / M.A. Velishchanskii [et al.] // XIII Int. Conf. on Process Control'01. Bratislava, 2001. P.36. (0.06 п.л. / 0.01 п.л.)

2. Крищенко А.П., Велищанский М.А. Управление угловым движением твердого тела на основе концепций обратных задач динамики // Декомпозиционные методы в математическом моделировании: Тез. докл. I-й Московской конф. М., 2001. С. 23-24. (0.13 п.л. / 0.06 п.л.)

3. Управление угловым положением космического аппарата с изменяющейся структурой / М.А. Велищанский [и др.] // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Тез. докл. М., 2001. С. 150. (0.06 п.л. / 0.01 п.л.)

4. Велищанский М.А. Управление угловым положением твердого тела с использованием параметрических множеств функций // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. VII международного семинара. М., 2002. С. 155-157. (0.19 п.л.)

5. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Квазиоптимальная переориентация космического аппарата // Межведомственный сборник научных трудов. Механика твердого тела. 2002. Вып 32. С. 144-153. (0.63 п.л. / 0.21 п.л.)

6. **Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156-163. (0.5 п.л. / 0.17 п.л.)**

7. **Велищанский М.А. Исследование свойств квазиоптимального и оптимального алгоритмов переориентации космического аппарата // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 2. С. 1–12. URL:**

http://technomag.bmstu.ru/doc/345396.html (дата обращения: 28.03.2017). (0.75 п.л.)

8. Велищанский М.А. Сравнение квазиоптимального и оптимального алгоритмов переориентации космического аппарата // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. XII международной конференции. М., 2012. С. 76-77. (0.13 п.л.)

9. **Велищанский М.А. Синтез квазиоптимальной траектории движения беспилотного летательного аппарата // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 12 С. 417–430. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/646471.html (дата обращения: 28.03.2017). (0.88 п.л.)**

10. Велищанский М.А., Канатников А.Н. Задача терминального управления с ограничениями на состояние // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тез. докл. Суздаль, 2015. С. 48-49. (0.13 п.л. / 0.06 п.л.)

11. **Велищанский М.А., Крищенко А.П. Задача терминального управления для системы второго порядка при наличии ограничений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 8. С. 301-318. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/793667.html (дата обращения: 28.03.2017) (1.13 п.л. / 0.56 п.л.)**

12. Велищанский М.А. Терминальное управление механической системой при наличии ограничений на переменные состояния // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. XIII международной конференции. М., 2016. С. 95-97. (0.19 п.л.)

13. **Велищанский М.А. Движение летательного аппарата в вертикальной плоскости при наличии ограничений на состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 70-81. (0.75 п.л.)**

14. Велищанский М.А., Крищенко А.П. Задача терминального управления летательным аппаратом с фазовыми ограничениями // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тез. докл. Суздаль, 2017. С. 49-50. (0.13 п.л./ 0.06 п.л.)

15. **Solution of a terminal control problem under state constraints / M.A. Velishchanskiy [et al.] // IFAC PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 10679-10684. (0.6 п.л. / 0.15 п.л.)**