На правах рукописи

Касаткина Татьяна Сергеевна

РЕШЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АФФИННЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, машиностроение)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

Научный: **руководитель**	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор **Крищенко Александр Петрович**
Официальные: **оппоненты**	**Пестерев Александр Витальевич**, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук», ведущий научный сотрудник лаборатории динамики нелинейных процессов управления им. Е.С. Пятницкого
	Бортаковский Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры математической кибернетики
Ведущая: **организация**	федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится «___» ______________ 2016 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д212.141.15 при Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана по адресу: Москва, Рубцовская наб., 2/18, ауд. 1006 л.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана и на сайте www.bmstu.ru.

Автореферат разослан «___» ______________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат технических наук, доцент — Аттетков Александр Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из задач теории управления является построение решений терминальных задач, содержащих ограничения на состояния и управление. Для решения терминальных задач, содержащих ограничения на управление, может быть использован принцип максимума Понтрягина, но полученное таким образом управление не является непрерывным. В работах Н.Н. Моисеева, Ф.Л. Черноусько, И.А. Крылова для учета ограничений на состояния использован метод локальных вариаций. Идея этого метода заключается в поиске локального минимума функционала с помощью варьирования вектора фазовых координат аффинной системы. В случае, если размерности пространства состояний и управлений системы не равны, возникают ограничения на реализуемость построенной траектории.

Позднее была разработана техника преобразования аффинных систем к регулярному каноническому виду с помощью замен переменных состояния, управления и независимой переменной (B. Jakubczyk, W. Respondek, А.П. Крищенко, M. Sampei, K. Furuta, M. Guay, B. Fang, G. Kalker и др.). Данный подход применяется для решения задач управления движением различными система робототехники и мехатроники, задач следования вдоль заданной кривой (А.В. Пестерев, Л.Б. Рапопорт, С.Б. Ткачев) и заданной траектории (M. Fliess, P. Martin, P. Rouchon).

Для аффинных систем канонического вида каждой траектории системы соответствует функция независимой переменной. Варьирование значений этой функции позволяет строить траектории аффинных систем, которые удовлетворяют наложенным ограничениям.

Целью работы является решение задач терминального управления для аффинных систем при наличии ограничений на состояния и управление.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач:**

1. Нахождение условий существования преобразований аффинных систем к каноническому виду с использованием замен независимой переменной.

2. Разработка метода вариаций для решения задач терминального управления для аффинных стационарных систем со скалярным управлением регулярного канонического вида при наличии ограничений на состояния.

3. Решение задачи терминального управления для трехмерной аффинной системы, описывающей периодические процессы, протекающие в резервуаре химического реактора, при наличии ограничений на состояния и управление.

Методы исследования. В диссертации используются методы математической теории управления, дифференциальной геометрии, теории устойчивости, численные методы.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты, которые выносятся на защиту:

1. Свойства введенных интегрируемых и неинтегрируемых замен независимой переменной в аффинных стационарных системах.

2. Условия существования преобразования аффинных систем третьего порядка к каноническому виду с использованием замен независимой переменной.

3. Методы независимых и последовательных вариаций решения терминальных задач с фиксированным конечным временем для аффинных систем канонического вида при наличии ограничений на состояния.

4. Метод решения терминальных задач со свободным временем при наличии ограничений на состояния аффинной системы с использованием орбитальной линеаризации.

5. Решение задачи терминального управления со свободным временем для аффинной системы, описывающей периодические процессы в химическом реакторе.

Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами и результатами численного моделирования.

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что реализуемые в работе методы позволяют решать задачи терминального управления при наличии ограничений на состояния и управление.

Апробация результатов работы. Полученные в работе результаты докладывались на международных конференциях «Математика. Компьютер. Образование.» (Пущино, 2013), «Системный анализ и информационные технологии» (Красноярск, 2013; Светлогорск, 2015), «Физико-математические проблемы создания новой техники» (Москва, 2014), Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015).

Основные научные результаты диссертации отражены в 8 научных работах общим объемом 3,4 п.л., в том числе в 6 статьях из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, и в 3 тезисах докладов объемом 0,03 п.л.

Личный вклад соискателя. Исследования, результаты которых приведены в диссертации, проведены лично соискателем. Из совместных публикаций в диссертацию включены только те результаты, которые принадлежат непосредственно соискателю.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы. Работа изложена на 122 страницах, содержит 21 рисунок. Библиография включает 105 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе приведены понятия из дифференциальной геометрии и математической теории управления, включая понятия распределения и его инволютивности, классификацию аффинных систем и описание систем канонического вида. Приведены теоремы, содержащие условия существования преобразования аффинных систем к каноническому виду

$$y^{(n)} = f(\bar{y}) + g(\bar{y})u, \quad \bar{y} = (y,\, \dot{y},\, \ldots,\, y^{(n-1)})^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где f, g — гладкие функции, регулярному в тех точках, где $g(\bar{y}) \neq 0$.

Во второй главе рассматривается задача преобразования аффинных систем

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u,\; x \in \mathbb{R}^n,\; u \in \mathbb{R}^m,\; t \in \mathbb{R},\; (\dot{\cdot}) = \frac{d(\cdot)}{dt}, \tag{2}$$

где $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\mathrm{T}}$, $B(x) = (b_{ij}(x))$ — матрица размера $n \times m$, $a_i(x)$, $b_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, к регулярному каноническому виду с использованием замен независимой переменной

$$\dot{\tau} = \frac{1}{s(x)}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad s(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad s(x) \neq 0. \tag{3}$$

Представлен обзор литературы по заменам независимой переменной и их применению. В разделе 2.1 вводится

Определение 1. Переход к дифференцированию по переменной τ, введенной с помощью равенства (3), называется интегрируемой заменой независимой переменной в области $O \in \mathbb{R}^n$, если существует такая функция $f(x) \in C^\infty(O)$, что $\tau = f(x)$. Иначе замена переменной называется неинтегрируемой.

После выполнения замены независимой переменной (3) система (2) принимает вид

$$x' = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)u, \tag{4}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной τ, $\tilde{A}(x) = s(x)A(x)$, $\tilde{B}(x) = s(x)B(x)$.

Теорема 1. Если в системе (2) в области $O \subset \mathbb{R}^n$ сделана интегрируемая замена независимой переменной $\dot{\tau} = h(x)$, $h(x) = \dot{f}(x)$, то ранг матрицы управляемости преобразованной системы (4) в области O меньше n.

Следствие 1. Если в системе (2) в области $O \subset \mathbb{R}^n$ сделана интегрируемая замена независимой переменной, то преобразованная система (4) не приводится к каноническому виду в области O.

В разделе 2.3 исследовано преобразование аффинной системы третьего порядка со скалярным управлением к регулярному каноническому виду с использованием орбитальной линеаризации, т.е. выполнения замены времени и последующей замены переменных состояния. Для аффинной системы $\dot{x} = A(x) + B(x)v$ со скалярным управление v, где $A(x) = (f_1(x), f_2(x), 0)^{\mathrm{T}}$, $B(x) = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, найден вид масштабирующей функции $s(x)$, которая определяет такую неинтегрируемую замену времени $\dot{\tau} = \frac{1}{s(x)}$, что система с новым временем τ и новым управлением $u = s(x)v$

$$x' = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)u, \tag{5}$$

где $\tilde{A}(x) = (f_1(x)s(x),\ f_2(x)s(x),\ 0)^{\mathrm{т}}$, $\tilde{B}(x) = (0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$, эквивалентна системе регулярного канонического вида.

Теорема 2. Пусть ранг матрицы управляемости системы (5) в точке x^0 равен трем, и распределение $\mathrm{span}\{\tilde{\mathbf{B}}, \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}}\}$ инволютивно в окрестности точки x^0. Пусть $c = c(x_1, x_2)$, $\alpha_1 = \alpha_1(x_1, x_2)$, $\alpha_2 = \alpha_2(x_1, x_2)$ такие функции класса C^∞ в окрестности точки x^0, что

$$c(x_1^0, x_2^0) \neq 0, \quad \alpha_1(x_1^0, x_2^0) f_1(x^0) + \alpha_2(x_1^0, x_2^0) f_2(x^0) \neq 0.$$

Тогда функция масштабирования времени может быть выбрана в виде

$$s(x) = \frac{c}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}. \tag{6}$$

Замечание 1. Если $s(x)$ имеет вид (6), то распределение $\mathrm{span}\{\tilde{\mathbf{B}}, \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}}\}$ инволютивно в окрестности точки x^0.

Для системы (5), (6) построена замена переменных состояния

$$z_1 = \phi(x_1),\ \ z_2 = c(x_2)\frac{d\phi}{dx_1},\ \ z_3 = c^2(x_2)\frac{d^2\phi}{dx_1^2} + \frac{f_2}{f_1}c(x_2)\frac{d\phi}{dx_1}\frac{dc(x_2)}{dx_2},$$

которая преобразует систему (5), (6) к регулярному каноническому виду в окрестности точки x^0.

В разделе 2.4 указана связь задач терминального управления для аффинной системы и для эквивалентной ей системы канонического вида, которая получена в результате замен переменных состояния, управления и независимой переменной.

Третья глава содержит методы решения задач терминального управления для аффинных систем канонического вида со скалярным управлением при наличии ограничений на состояния. Предложен метод вариаций, который содержит два этапа. Первый этап заключается в построении функции, которая определяет решение терминальной задачи в отсутствии ограничений. Второй этап заключается в модификации этой функции в случае, если нарушаются ограничения на состояния. Разработаны несколько модификаций метода вариаций: метод независимых вариаций, метод последовательных вариаций и метод независимых вариаций на фазовой плоскости. Эти методы позволяют решать задачи терминального управления с фиксированным конечным временем и со свободным временем и учитывать ограничения разных типов.

В разделе 3.1 рассмотрена задача терминального управления с фиксированным отрезком времени $[0;\, t_*]$ при наличии ограничений на состояния: для системы (1) найти непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0;\, t_*]$ с граничными значениями

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad u\big|_{t=t_*} = u_*, \tag{7}$$

которое, во-первых, переводит систему (1) за время t_* из начального положения $\bar{y}_0$ в конечное положение $\bar{y}_*$, где

$$\begin{aligned} \bar{y}\big|_{t=0} &= \bar{y}_0 = (y_0,\, \dot{y}_0,\, \ldots,\, y_0^{(n-1)})^{\mathrm{T}}, \\ \bar{y}\big|_{t=t_*} &= \bar{y}_* = (y_*,\, \dot{y}_*,\, \ldots,\, y_*^{(n-1)})^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{8}$$

а, во-вторых, траектория не выходит из множества Ω. Множество Ω задано системой неравенств

$$h_k(y,\, \dot{y},\, \ldots,\, y^{(n-1)}) \le 0, \quad k = \overline{1, K}. \tag{9}$$

Теорема 3. Терминальная задача (1), (7)-(8) эквивалентна задаче поиска такой функции $\psi(t) \in C^n[0;\, t_*]$, что

$$\begin{array}{llll} \psi\big|_{t=0} = y_0, & \dot{\psi}\big|_{t=0} = \dot{y}_0, & \ldots & \psi^{(n)}\big|_{t=0} = f(\bar{y}_0) + g(\bar{y}_0)u_0, \\ \psi\big|_{t=t_*} = y_*, & \dot{\psi}\big|_{t=t_*} = \dot{y}_*, & \ldots & \psi^{(n)}\big|_{t=t_*} = f(\bar{y}_*) + g(\bar{y}_*)u_*. \end{array}$$

В разделе 3.2 приведена функция $\psi(t)$ в виде многочлена степени $2n+1$, которая определяет решение терминальной задачи (1), (7)-(8) при отсутствии ограничений на состояния. Коэффициенты многочлена $\psi(t)$ однозначно определяются граничными условиями и конечным моментом времени t_*.

Если траектория $y = \psi(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}(t)$, ..., $y^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(t)$ не удовлетворяет ограничениям (9), то вводится такое разбиение отрезка $[0;\, t_*]$

$$0 < t_{l_1} < t_{r_1} < t_{l_2} < t_{r_2} < \ldots < t_{l_M} < t_{r_M} < t_*, \tag{10}$$

что ограничения (9) нарушены во всех точках интервалов $(t_{l_i};\, t_{r_i})$, $i = \overline{1,\, M}$, и выполнены во всех остальных точках отрезка $[0;\, t_*]$. Интервалы $(t_{l_i};\, t_{r_i})$ расширены таким образом, что ограничения (9) выполнены в конечных точках отрезков $[\tilde{t}_{l_j};\, \tilde{t}_{r_j}]$ $j = \overline{1,\, m}$, $m \le M$.

В разделе 3.3 предложен метод независимых вариаций учета ограничений (9). Строится функция $\varphi(t) \in C^n[0;\, t_*]$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \psi(t), \quad t \in [0;\, \tilde{t}_{l_1}], \\ \psi(t) + d_1\psi_1(t), \quad t \in [\tilde{t}_{l_1};\, \tilde{t}_{r_1}], \\ \psi(t), \quad t \in [\tilde{t}_{r_1};\, \tilde{t}_{l_2}], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(t), \quad t \in [\tilde{t}_{r_{m-1}};\, \tilde{t}_{l_m}], \\ \psi(t) + d_m\psi_m(t), \quad t \in [\tilde{t}_{l_m};\, \tilde{t}_{r_m}], \\ \psi(t), \quad t \in [\tilde{t}_{r_m};\, t_*], \end{cases} \tag{11}$$

где $d_1, \dots, d_m$ — параметры, а функции $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,\, m}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{llll} \psi_i(\tilde{t}_{l_i}) = 0, & \dot{\psi}_i(\tilde{t}_{l_i}) = 0, & \dots & \psi_i^{(n)}(\tilde{t}_{l_i}) = 0, \\ \psi_i(\tilde{t}_{r_i}) = 0, & \dot{\psi}_i(\tilde{t}_{r_i}) = 0, & \dots & \psi_i^{(n)}(\tilde{t}_{r_i}) = 0. \end{array} \tag{12}$$

Если существуют значения параметров $d_1, \dots, d_m$, при которых функции $\varphi_i(t) = \psi(t) + d_i\psi_i(t)$, $i = \overline{1,\, m}$, удовлетворяют неравенствам $h_k(\varphi_i(t), \dots, \varphi_i^{(n-1)}(t)) \le 0$, $k = \overline{1,\, K}$, $t \in [\tilde{t}_{l_i};\, \tilde{t}_{r_i}]$, то функция (11) определяет непрерывное программное управление

$$u(t) = \frac{\varphi^{(n)}(t) - f(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))}{g(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))},$$

являющееся решением терминальной задачи (1), (7)-(8) при наличии ограничений на состояние (9).

Далее изложен учет ограничений на состояния $c_- \le y \le c_+$ для системы $\ddot{y} = f(y, \dot{y}) + g(y, \dot{y})u$, $t \in [0;\, t_*]$. Указан вид функции $\psi_i(t) = (t - \tilde{t}_{l_i})^3(\tilde{t}_{r_i} - t)^3$, $i = \overline{1,\, m}$, которая удовлетворяет условиям (12) ($n = 2$). Доказано достаточное условие существования значений параметров d_i, $i = \overline{1,\, m}$, при котором существует решение задачи терминального управления при ограничении $y \le c_+$.

Лемма 1. Для функции $\psi(t) + d_i\psi_i(t)$ существует такое $d_{i\_} \in \mathbb{R}$, что при всех $d_i \le d_{i\_}$ неравенство $\psi(t) + d_i\psi_i(t) \le c_+$ выполнено на отрезке $[\tilde{t}_{l_i};\, \tilde{t}_{r_i}]$, $i = \overline{1,\, m}$.

Аналогичным образом происходит учет ограничения $c_- \le y$.

В разделе 3.4 изложен метод последовательных вариаций учета ограничений (9). Для первого интервала разбиения (10) строится функция $\phi_1(t)$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \psi(t), \quad t \in [0;\, \tilde{t}_{l_1}], \\ \psi(t) + p\chi_1(t), \quad t \in [\tilde{t}_{l_1};\, \tilde{t}_{r_1}], \\ \psi_{r_1}(t), \quad t \in [\tilde{t}_{r_1};\, t_*], \end{cases} \tag{13}$$

где p — параметр, функция $\chi_1(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{llll} \chi_1(\tilde{t}_{l_1}) = 0, & \dot{\chi}_1(\tilde{t}_{l_1}) = 0, & \ldots & \chi_1^{(n)}(\tilde{t}_{l_1}) = 0, \\ \chi_1(\tilde{t}_{r_1}) = 1, & \dot{\chi}_1(\tilde{t}_{r_1}) = 0, & \ldots & \chi_1^{(n)}(\tilde{t}_{r_1}) = 0, \end{array} \tag{14}$$

а $\psi_{r_1}(t)$ — многочлен степени $2n+1$, коэффициенты которого задаются таким образом, чтобы $\phi_1(t) \in C^n[0;\, t_*]$ и были выполнены граничные условия при $t = t_*$. Если существует значение параметра $p = p_1$, при котором на отрезке $[\tilde{t}_{l_1};\, \tilde{t}_{r_1}]$ выполнены неравенства $h_k(\phi_1(t),\, \ldots,\, \phi_1^{(n-1)}(t)) \le 0$, $k = \overline{1,\, K}$, то эти неравенства выполнены на отрезке $[0;\, \tilde{t}_{r_1}]$. Если функция $\psi_{r_1}(t)$ удовлетворяет неравенствам (9) на отрезке $[\tilde{t}_{r_1};\, t_*]$, то функция (13) определяет непрерывное программное управление

$$u(t) = \frac{\phi_1^{(n)}(t) - f(\phi_1(t),\, \dot{\phi}_1(t),\, \ldots,\, \phi_1^{(n-1)}(t))}{g(\phi_1(t),\, \dot{\phi}_1(t),\, \ldots,\, \phi_1^{(n-1)}(t))},$$

являющееся решением терминальной задачи (1), (7)-(8) при наличии ограничений на состояние (9). Иначе модифицирование функции $\psi_{r_1}(t)$ на отрезке $[\tilde{t}_{r_1};\, t_*]$ происходит аналогичным образом. В общем случае процедура может содержать бесконечное число шагов.

Далее изложен учет ограничений на состояния $c_- \le \dot{y} \le c_+$ для системы канонического вида второго порядка. Предложена функция $\chi_1(t)$

$$\chi_1(t) = \tau^3(k_0 + k_1\tau^2 + k_2\tau^4), \quad \tau = \frac{t - \tilde{t}_{l_1}}{\tilde{t}_{r_1} - \tilde{t}_{l_1}},$$

где $k_0 = 4,375$, $k_1 = -5,25$, $k_2 = 1,875$, и доказана

Лемма 2. Для функции $\dot{\psi}(t) + p_1\dot{\chi}_1(t)$ существует такое $p = p_- < 0$, что при всех $p \le p_-$ неравенство $\dot{\psi}(t) + p_1\dot{\chi}_1(t) \le c_+$ выполнено на отрезке $[\tilde{t}_{l_1};\, \tilde{t}_{r_1}]$.

Аналогичным образом происходит учет ограничения $c_- \le \dot{y}$.

В разделе 3.5 для аффинных систем второго порядка изложено решение задач терминального управления при наличии ограничений на состояние со свободным временем t_* с помощью независимых вариаций на фазовой плоскости. Построена функция в виде многочлена, зависящего от переменной состояния y, которая определяет решение терминальной задачи при отсутствии ограничений. Представлена схема модификации данной функции с помощью независимых вариаций таким образом, чтобы решение удовлетворяло заданным ограничениям.

В разделе 3.6 приведены результаты решения задач терминального управления для аффинной системы второго порядка, описывающей колебания однозвенного маятника, при наличии ограничений на состояния с помощью разработанных методов вариаций. Решены задачи терминального управления с фиксированным конечным временем и со свободным временем при наличии ограничений на переменные y и $\dot{y}$. На Рис. 1 приведен график функции $\varphi(t)$, полученной путем модификации функции $\psi(t)$ (сплошная линия) методом независимых вариаций. На Рис. 2 приведен график функции $\phi(t)$, полученной путем модификации функции $\psi(t)$ (сплошная линия) методом последовательных вариаций.

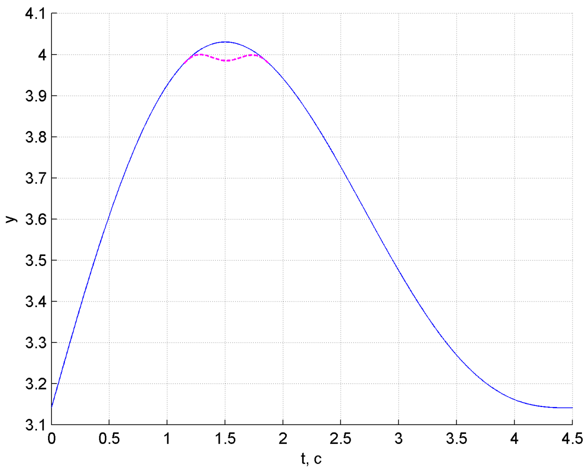

Рис. 1. Независимая вариация функции $\psi(t)$

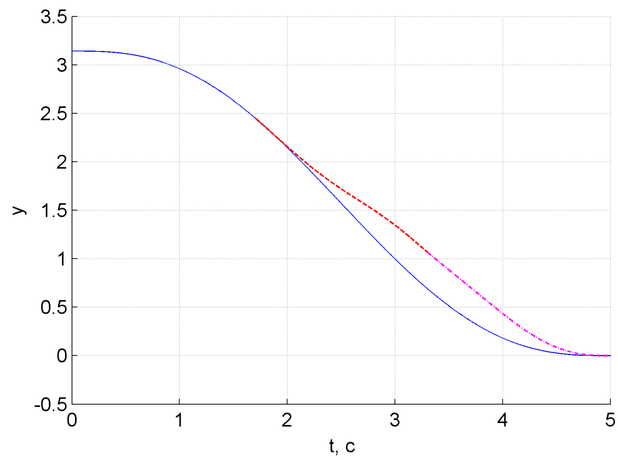

Рис. 2. Последовательная вариация функции $\psi(t)$

В четвертой главе изложено решение задачи терминального управления со свободным временем при наличии ограничений на состояния и управление для аффинной системы третьего порядка, описывающей периодические процессы в резервуаре химического реактора

$$\begin{cases} \dot C_A = -k_1(T)C_A^2, \\ \dot C_B = k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B, \\ \dot T = \gamma_1 k_1(T)C_A^2 + \gamma_2 k_2(T)C_B + a_0 + a_1 T + (b_0 + b_1 T)v, \end{cases} \tag{15}$$

где C_A, C_B — относительные концентрации веществ A и B, T — температура, $k_1(T) = A_{10}e^{-E_1/(RT)}$, $k_2(T) = A_{20}e^{-E_2/(RT)}$, E_1, E_2 — энергии активации, R — универсальная газовая постоянная, параметры $A_{10} > 0$, $A_{20} > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $b_0 < 0$, $b_1 > 0$, с граничными значениями состояния $x = (C_A,\, C_B,\, T)^{\mathrm{T}}$

$$x\big|_{t=0} = x_0 = (C_{A0},\, C_{B0},\, T_0)^{\mathrm{T}}, \;\; x\big|_{t=t_*} = x_* = (C_{A*},\, C_{B*},\, T_*)^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

и при наличии ограничений на состояния

$$\begin{gathered} 0 < C_A < 1, \quad 0 < C_B < 1, \quad C_A + C_B \le 1, \\ 0 < T_{\min} < T < T_{\max}, \quad k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B > 0 \end{gathered} \tag{17}$$

и управление $v \in [0;\, 1]$.

В разделе 4.2 указаны необходимые условия существования решения сформулированной терминальной задачи.

В разделе 4.3 доказано, что после выполнения в (15) интегрируемой замены независимой переменной

$$\frac{d\tau}{dt} = k_1(T)C_A^2, \quad \tau\big|_{t=0} = 0$$

для полученной системы существует ее преобразование $\overline{y} = \Phi(x)$, $\overline{y} = (y,\, y')$,

$$y = C_B, \quad y' = 1 - \frac{k_2(T)C_B}{k_1(T)(C_{A0} - \tau)^2}$$

в двумерную аффинную нестационарную систему второго порядка канонического вида

$$\begin{cases} y'' = f(\overline{y},\, \tau) + g(\overline{y},\, \tau)u, \\ f(\overline{y},\, \tau) = -\dfrac{k_2(T)}{k_1(T)}\left(\dfrac{y'}{(C_{A0}-\tau)^2} + \dfrac{2y}{(C_{A0}-\tau)^3}\right), \\ g(\overline{y},\, \tau) = \dfrac{(1-y')(E_1 - E_2)}{RT^2}, \\ T = \dfrac{E_1 - E_2}{R(\ln(A_{10}(1-y')(C_{A0}-\tau)^2) - \ln(A_{20}y))}, \quad \tau = C_{A0} - C_A, \end{cases} \tag{18}$$

регулярную на множестве допустимых состояний $\hat{\Omega}_y$, содержащемся в множестве, заданном системой неравенств

$$0 \le \tau < C_{A0}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < y' < 1.$$

Каждое решение терминальной задачи для системы (18) с граничными условиями $\overline{y}_0 = \Phi(x_0)$, $\overline{y}_* = \Phi(x_*)$ определяет кривую на фазовой плоскости, которая может быть задана параметрически в виде $y = \xi(\tau)$, $y' = \xi'(\tau)$. Поскольку $y' > 0$, то $y' = \xi'(\xi^{(-1)}(y)) = \psi(y)$, и функция $y = \xi(\tau)$, $\tau \in [0; \tau_*]$ является решением задачи Коши $y' = \psi(y)$, $y|_{\tau=0} = y_0$. Функцию $\psi(y)$ предлагается искать в виде $\psi(y) = \psi_c(y) = ky + b + cd(y)$, где $d(y) \in C^1[y_0; y_*]$, $d(y_0) = 0$, $d(y_*) = 0$, а коэффициенты k, b выбраны так, что при $c = 0$ прямая на фазовой плоскости $y' = \psi_c(y)$ проходит через точки $\overline{y}_0$ и $\overline{y}_*$. Показано, что существует отрезок $[c_-; c_+]$, $c_- < 0$, $c_+ > 0$, при всех значениях c из которого кривая $y' = \psi_c(y)$ лежит внутри проекции множества $\hat{\Omega}_y$ на фазовую плоскость. Если существует $c = c_* \in [c_-; c_+]$ — решение интегрального уравнения

$$C_{A0} - C_{A*} = \int\limits_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi(y)},$$

то управление v_s в виде

$$v_s = \frac{k_1(T) C_A^2 u_s - \gamma_1 k_1(T) C_A^2 - \gamma_2 k_2(T) C_B - a_0 - a_1 T}{b_0 + b_1 T}, \qquad (19)$$

где

$$u_s = \frac{1}{g(\overline{y}, \tau)} \left(\frac{d\psi_{c_*}(\xi(\tau))}{d\xi} \psi_{c_*}(\xi(\tau)) - f(\overline{y}, \tau) \right) - \\ - \frac{c_1(y' - y'(\tau)) + c_0(y - y(\tau))}{g(\overline{y}, \tau)}, \quad c_0 > 0, \ \ c_1 > 0,$$

является решением терминальной задачи (15)-(17) при выполнении ограничений на температуру и управление. Постоянные c_0, c_1 задают динамику переходных процессов при отклонении состояния системы от программной траектории, соответствующей кривой $y' = \psi_c(y)$. Результаты численного решения терминальной задачи приведены в двух случаях. В первом случае управление (19) не выходит из отрезка $v \in [0;\ 1]$. Во втором случае граничные значения (16) таковы, что ограничение $v \in [0;\ 1]$ нарушено. Для учета ограничения $v \in [0;\ 1]$ использовано управление

$$v = v_* = \begin{cases} 0, \text{ если } v_s < 0, \\ v_s, \text{ если } v_s \in [0;\ 1], \\ 1, \text{ если } v_s > 1. \end{cases}$$

В разделе 4.4 приведено решение терминальной задачи (15)-(17) с использованием неинтегрируемой замены независимой переменной

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dt} = \frac{k_1(T)C_A^2}{C_B}, \quad \tilde{\tau}\big|_{t=0} = 0.$$

Построен диффеоморфизм $\overline{y} = \tilde{\Phi}(x)$, $\overline{y} = (y,\ y',\ y'')$,

$$y = C_A, \quad y' = -C_B, \quad y'' = -C_B + \frac{k_2(T)C_B^2}{k_1(T)C_A^2},$$

который преобразует систему (15) с независимой переменной $\tilde{\tau}$ к регулярному каноническому виду

$$\begin{cases} y''' = \tilde{f}(\overline{y}) + \tilde{g}(\overline{y})\tilde{u}, \quad \overline{y} \in \tilde{\Omega}_y, \\ \tilde{f}(\overline{y}) = y'' + \dfrac{2(y'' - y')(yy'' - y'^2)}{yy'}, \\ \tilde{g}(\overline{y}) = (y'' - y')\dfrac{R}{E_2 - E_1}\ln^2\left(\dfrac{A_{10}(y'' - y')y^2}{A_{20}y'^2}\right) \end{cases} \tag{20}$$

на множестве $\tilde{\Omega}_y$, заданном системой неравенств

$$0 < y < 1, \ \ -1 < y' < 0, \ \ 0 < y'' - y' < \frac{A_{20}y'^2}{A_{10}y^2}, \ \ y - y' \leq 1.$$

Построена проекция области достижимости начального положения $\overline{y}_0 = \tilde{\Phi}(x_0)$ системы (20) на фазовую плоскость. Решение терминальной задачи (20) с граничными значениями $\overline{y}_0 = \tilde{\Phi}(x_0)$, $\overline{y}_* = \tilde{\Phi}(x_*)$ определяет фазовая кривая $y' = \Psi_d(y) = \Psi_0(y) + d(y - y_*)^2(y - y_0)^2$, $y \in [y_*;\ y_0]$, где $\Psi_0(y) = ky + b + \alpha(y - y_0)(y - y_*) + \beta(y - y_0)^2(y - y_*)$, а значения k, b, α, β определяются граничными условиями. Если граничные условия таковы, что кривая $y' = \Psi_0(y)$ лежит в множестве $\tilde{\Omega}_y$, то существует отрезок $[d_-;\ d_+]$, где $d_- < 0$, $d_+ > 0$, такой что фазовая траектория $\Psi_d(y)$ лежит внутри области $\tilde{\Omega}_y$ при всех значениях параметра $d \in [d_-;\, d_+]$. Значение параметра $d \in [d_-;\, d_+]$ может быть выбрано из условий: наименьшее время движения по траектории, наименьшее изменение температуры, наименьшее изменение управления. Построено стабилизирующее управление

$$v(t) = \frac{k_1(T)C_A^2 u_{st}(\tilde{\tau}(t)) - C_B(\gamma_1 k_1(T)C_A^2 + \gamma_2 k_2(T)C_B + a_0 + a_1 T)}{C_B(b_0 + b_1 T)}, \quad (21)$$

где

$$u_{st}(\tilde{\tau}) = \frac{\hat{y}'''(\tilde{\tau}) - f(y, y', y'')}{g(y, y', y'')} - \\ - \frac{c_2(y'' - \hat{y}''(\tilde{\tau})) + c_1(y' - \hat{y}'(\tilde{\tau})) + c_0(y - \hat{y}(\tilde{\tau}))}{g(y, y', y'')},$$

а $\hat{y}(\tilde{\tau})$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy}{d\tilde{\tau}} = \Psi_d(y), \quad y\big|_{\tilde{\tau}=0} = y_0,$$

которое является решением терминальной задачи (15)-(17) при выполнении ограничений на температуру и управление. Коэффициенты c_0, c_1, c_2 выбираются таким образом, чтобы корни многочлена $p(\lambda) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ имели отрицательные действительные части. На Рис. 3 представлены переходные процессы в системе (15) при управлении (21) и $d = 0,09$, при котором время движения из начального положения в конечное при рассматриваемом множестве траекторий является минимальным для данных граничных условий.

Основные выводы и результаты работы

Интегрируемые и неинтегрируемые замены независимой переменной обладают разными свойствами. Выполнение интегрируемых замен независимой переменной уменьшает ранг матрицы управляемости системы. Использование неинтегрируемых замен независимой переменной позволяет преобразовывать аффинные системы к регулярному каноническому виду.

Методы независимых и последовательных вариаций позволяют учитывать ограничения на состояния в задачах терминального управления

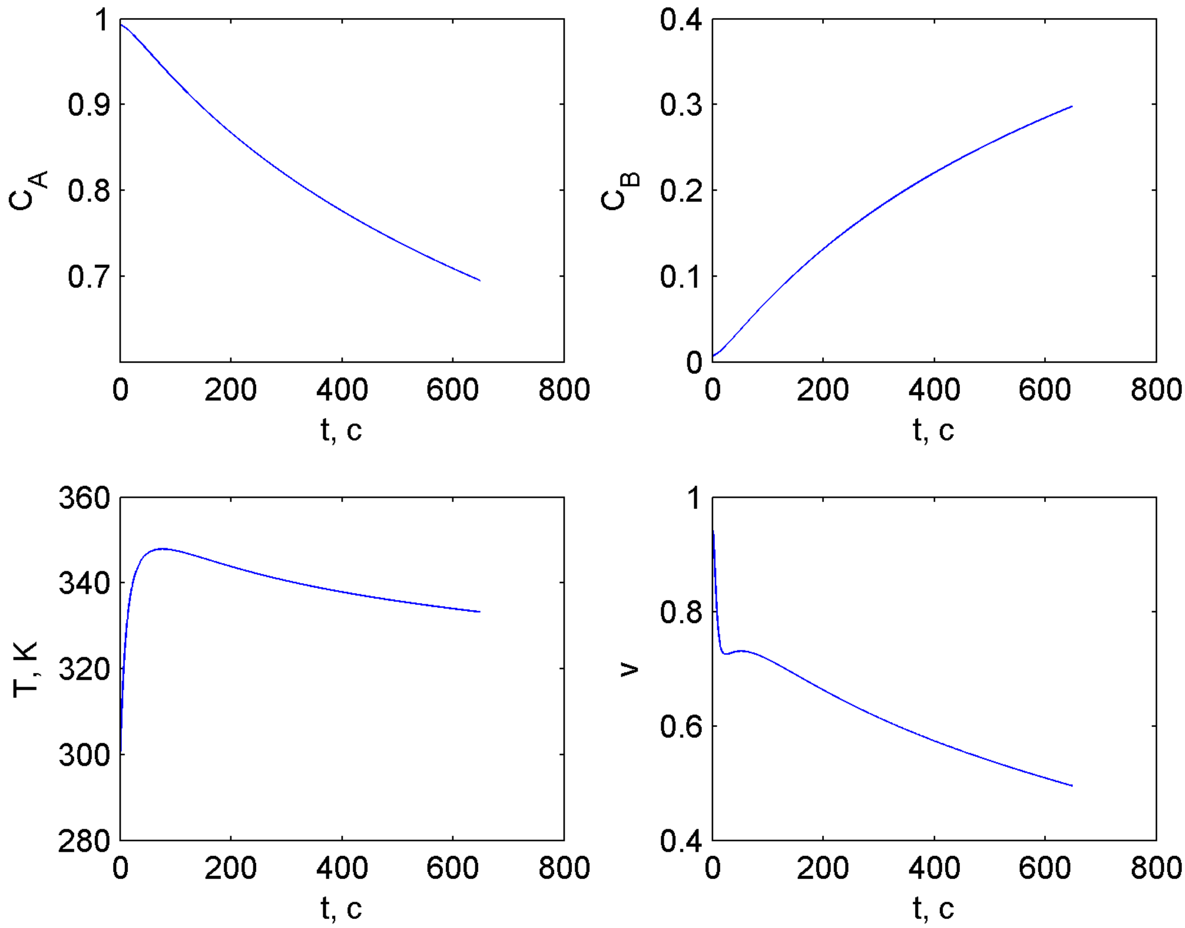

Рис. 3. Переходные процессы в системе (15) при управлении (21) и $d = 0,09$

для аффинных систем канонического вида. В задачах терминального управления с фиксированным временем необходимо варьирование значений функции, зависящей от времени. Выбор метода вариаций определяется типом ограничений. В задачах терминального управления со свободным временем для учета ограничений может быть использован метод независимых вариаций на фазовой плоскости.

Использование замен независимой переменной позволяет решить задачу терминального управления периодическими процессами в резервуаре химического реактора, которая содержит ограничения на состояния и управление.

В задачах со свободным временем учет ограничений на состояния также может проводиться методом последовательных вариаций на фазовой плоскости.

Методы учета ограничений с помощью независимых и последовательных вариаций могут быть распространены на терминальные задачи со свободным временем для аффинных систем n-го порядка.

Основные результаты диссертации отражены в работах

1. **Канатников А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 7. С. 211–223. URL: http://technomag.edu.ru/doc/445496.html (дата обращения 20.01.2016) (0,6 п.л. / 0,3 п.л.)**
2. Касаткина Т.С. Влияние независимой переменной на ранг матрицы управляемости // Математика. Компьютер. Образование: Тез. докл. XX Международной конференции. Дубна, 2013. С. 103. (0,01 п.л.)
3. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Три типа преобразований нелинейных систем с управлением // Системный анализ и информационные технологии: Труды V Международной конференции. Красноярск, 2013. Т. 1. С. 101–104. (0,2 п.л. / 0,1 п.л.)
4. **Касаткина Т.С. Преобразование аффинных систем к каноническому виду с использованием замен независимой переменной // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7. С. 285–298. URL: http://technomag.edu.ru/doc/566578.html (дата обращения 20.01.2016) (0,6 п.л.)**
5. **Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Терминальное управление процессами в химических реакторах методом орбитальной линеаризации // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 355–372. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/612563.html (дата обращения 20.01.2016) (0,8 п.л. / 0,6 п.л.)**
6. Касаткина Т.С. Решение задачи терминального управления процессами в химическом реакторе методом орбитальной линеаризации // Физико-математические проблемы создания новой техники: Тез. докл. Международной научной конференции. М., 2014. С. 54–55. (0,01 п.л.)

7. **Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Решение терминальной задачи для систем 3-го порядка методом орбитальной линеаризации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2014. № 12. С. 781–797. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/612563.html (дата обращения 20.01.2016) (0,8 п.л. / 0,5 п.л.)**
8. **Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Метод вариаций решения терминальных задач для двумерных систем канонического вида при наличии ограничений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2015. № 5. С. 266–280. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/766238.html (дата обращения 20.01.2016) (0,8 п.л. / 0,5 п.л.)**
9. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Решение терминальных задач для аффинных систем канонического вида // Системный анализ и информационные технологии: Труды VI Международной конференции. М., 2015. Т. 1. С. 80–84. (0,2 п.л. / 0,1 п.л.)
10. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Построение терминального управления для систем 2-го порядка // Тез. докл. Международной конференции по математической теории управления и механике. М., 2015. С. 70–71. (0,2 п.л. / 0,1 п.л.)
11. **Касаткина Т.С. Решение терминальных задач для систем второго порядка при наличии ограничений на состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 17–26. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-17-26. (0,6 п.л.)**