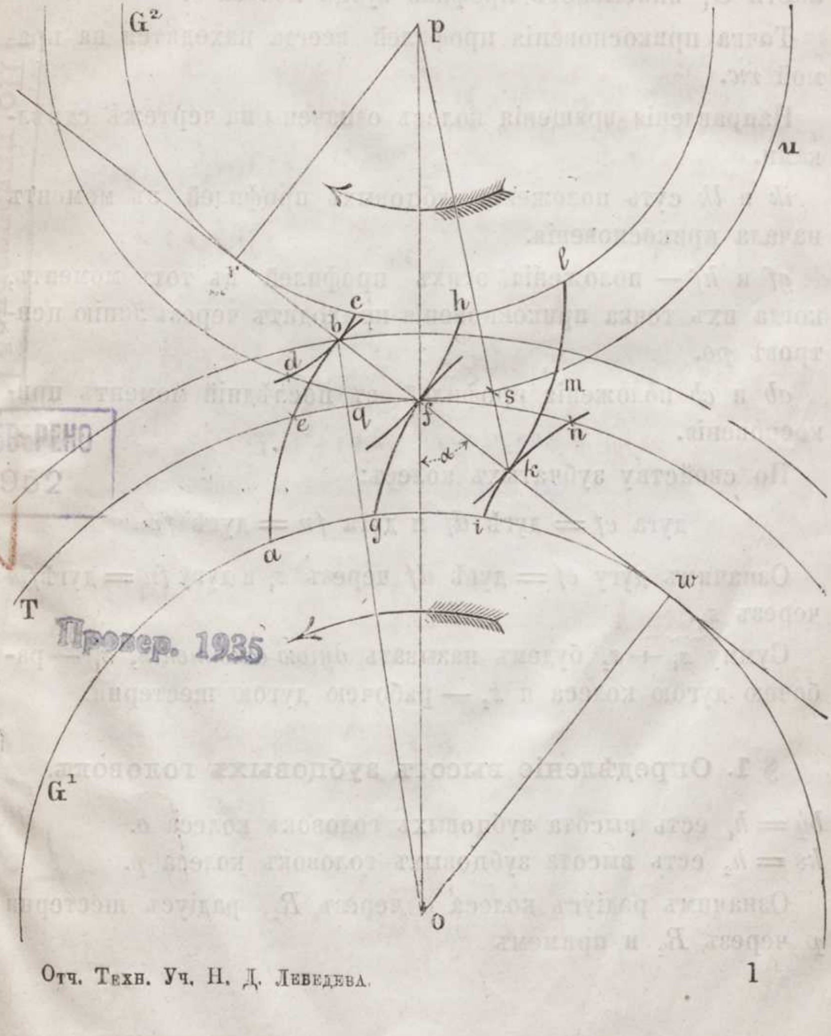
и И. Коорева — Разсчет ферм.

О ЗУБЧАТЫХЪ КОЛЕСАХЪ СЪ ОЧЕРТАНІЕМЪ ЗУБЬЕВЪ ПО РАЗВЕРТЫВАЮЩЕЙ КРУГА.

СТАТЬЯ ПРОФЕССОРА Д. Н. ЛЕБЕДЕВА.

На чертежѣ ф. 1 p и o означаютъ центры начальныхъ окружностей U и T, которыя принадлежатъ двумъ зубча-



тымъ колесамъ съ зубцами, очерченными по развертывающей круга.

G_1 и G_2 тѣ окружности, которыхъ развертывающія служатъ профилями зубцовъ.

Прямая rw, общая касательная окружностей G_1 и G_2 проходитъ черезъ точку f прикосновенія начальныхъ окружностей.

Точка k при навиваніи прямой rq на окружность G_2 даетъ профиль зубцовъ колеса p, а при развертываніи окружности G_1 описываетъ профиль зубца колеса o.

Точка прикосновенія профилей всегда находится на прямой rw.

Направленія вращенія колесъ означены на чертежѣ стрѣлками.

ik и lk суть положенія зубцовыхъ профилей въ моментъ начала прикосновенія.

gf и hf — положенія этихъ профилей въ тотъ моментъ, когда ихъ точка прикосновенія проходитъ черезъ линію центровъ po.

ab и cb положенія профилей въ послѣдній моментъ прикосновенія.

По свойству зубчатыхъ колесъ:

$$\text{дуга } ef = \text{дугѣ } df \text{ и дуга } fn = \text{дугѣ } fm.$$

Означимъ дугу $ef =$ дугѣ df черезъ z_1 и дугу $fn =$ дугѣ fm черезъ z_2.

Сумму $z_1 + z_2$ будемъ называть *дугою сцѣпленія*, z_1 — рабочею дугою колеса и z_2 — рабочею дугою шестерни.

§ 1. Опредѣленіе высотъ зубцовыхъ головокъ.

$bq = h_1$ есть высота зубцовыхъ головокъ колеса o.
$ks = h_2$ есть высота зубцовыхъ головокъ колеса p.

Означимъ радіусъ колеса o черезъ R_1, радіусъ шестерни p черезъ R_2 и примемъ

$$\frac{R_1}{R_2} = c, \text{ гдѣ } c > 1.$$

Изъ чертежа ф. 1 видно, что

$$h_1 = bq = bo - qo = bo - R_1$$

и изъ треугольника bfo:

$$bo^2 = bf^2 + R_1^2 - 2bf.R_1 cs(\pi - \alpha).$$

По свойству развертывающей круга

линія $bf =$ дугѣ ag.

Далѣе, такъ какъ ae и fg суть два положенія одного и того же профиля, то дуги ag и ef соотвѣтствуютъ одному и тому же углу при центрѣ, а слѣдовательно длины ихъ пропорціональны ихъ радіусамъ, т.-е.

$$\frac{\text{дуга } ag}{\text{дугѣ } ef} = \frac{oq}{R_1}.$$

Такъ какъ изъ прямоугольнаго тріугольника foq слѣдуетъ, что $oq = R_1 sn\alpha$ и по нашему обозначенію дуга $of = z_1$, то послѣдняя пропорція даетъ:

$$\text{дуга } ag = z_1 sn\alpha,$$

а слѣдовательно и линія $bf =$ дугѣ $ag = z_1 sn\alpha$.

И такъ

$$bo^2 = z_1^2 sn^2\alpha + R_1^2 + 2R_1 z_1 sn\alpha.cs\alpha, \text{ откуда}$$

$$bo = R_1 \sqrt{1 + \frac{z_1}{R_1} sn2\alpha + \frac{z_1^2}{R_1^2} sn^2\alpha}.$$

Принявъ для краткости:

$$\text{(I)}...\sqrt{1 + \frac{z_1}{R_1} sn2\alpha + \frac{z_1^2}{R_1^2} sn^2\alpha} = F\left(\frac{z_1}{R_1}\right),$$

получимъ

$$\text{(1)}...h_1 = R_1 \left[F\left(\frac{z_1}{R_1}\right) - 1 \right].$$

Точно также найдемъ, что

$$(2)\ldots h_2 = R_2\left[F\left(\frac{z_2}{R_2}\right) - 1\right], \text{ гдѣ}$$

$$(\mathrm{II})\ldots F\left(\frac{z_2}{R_2}\right) = \sqrt{1 + \frac{z_2}{R_2}\, sn2\alpha + \frac{z_2^{\,2}}{R_2^{\,2}}\, sn^2\alpha}.$$

§ 2. Проэкціи профилей зубцовыхъ головокъ на начальныя окружности.

Эти проэкціи суть:
для зубцовъ колеса o дуга $eq = x_1$
для зубцовъ колеса p дуга $sm = x_2$.

Изъ чертежа фиг. 1 видно, что

$$x_1 = \text{дугѣ } ef - \text{дуга } qf$$

Здѣсь дуга $ef = z_1$ и дуга $qf = R_1\varphi_1$, гдѣ φ_1 есть мѣра угла bof.

$$x_1 = z_1 - R_1\varphi_1.$$

Изъ тріугольника bof имѣемъ:

$$\frac{bf}{sn\varphi_1} = \frac{bo}{sn\alpha}.$$

Такъ какъ $bf = z_1 sn\alpha$ и $bo = R_1 F\left(\frac{z_1}{R_1}\right)$, то по послѣдней пропорціи:

$$sn\varphi_1 = \frac{z_1 sn^2\alpha}{R_1 F\left(\frac{z_1}{R_1}\right)}$$

или

$$\varphi_1 = arc\left[sn = \frac{z_1 sn^2\alpha}{R_1 F\left(\frac{z_1}{R_1}\right)}\right].$$

И такъ:

$$(1)\ldots x_1 = z_1 - R_1 arc\left[sn = \frac{z_1 sn^2\alpha}{R_1 F\left(\frac{z_1}{R_1}\right)}\right].$$

Точно также найдемъ, что

$$(2)\ldots x_2 = z_2 - R_2 arc\left[sn = \frac{z_2 sn^2\alpha}{R_2 F\left(\frac{z_2}{R_2}\right)}\right].$$

§ 3. Случай, когда малое колесо вполнѣ утилизируется.

Разсматривая чертежъ ф. 1, мы видимъ что крайнею точкою прикосновенія профилей въ регіи круга U можетъ служить точка r. Если высота зубцовыхъ головокъ такова, что точка прикосновенія профилей достигаетъ этой точки, то мы будемъ говорить, что малое колесо вполнѣ утилизировано.

Положимъ, что большое колесо дано, слѣдовательно намъ извѣстна точка b пересѣченія линіи rw съ тою окружностью, которая ограничиваетъ головки зубцовъ колеса o. Возставивъ изъ точки b перпендикуляръ къ rw, получимъ на прямой po точку u, которая опредѣлитъ намъ радіусъ uf наименьшей шестерни, которая можетъ сцѣпляться съ даннымъ колесомъ o. Означивъ радіусъ такого колеса, черезъ P'_2 изъ прямоугольнаго тріугольника bfu имѣемъ:

$$(bf = z_1 sn\alpha) = (uf = R'_2) \times cs\alpha$$

или

$$z_1 sn\alpha = R'_2 cs\alpha$$

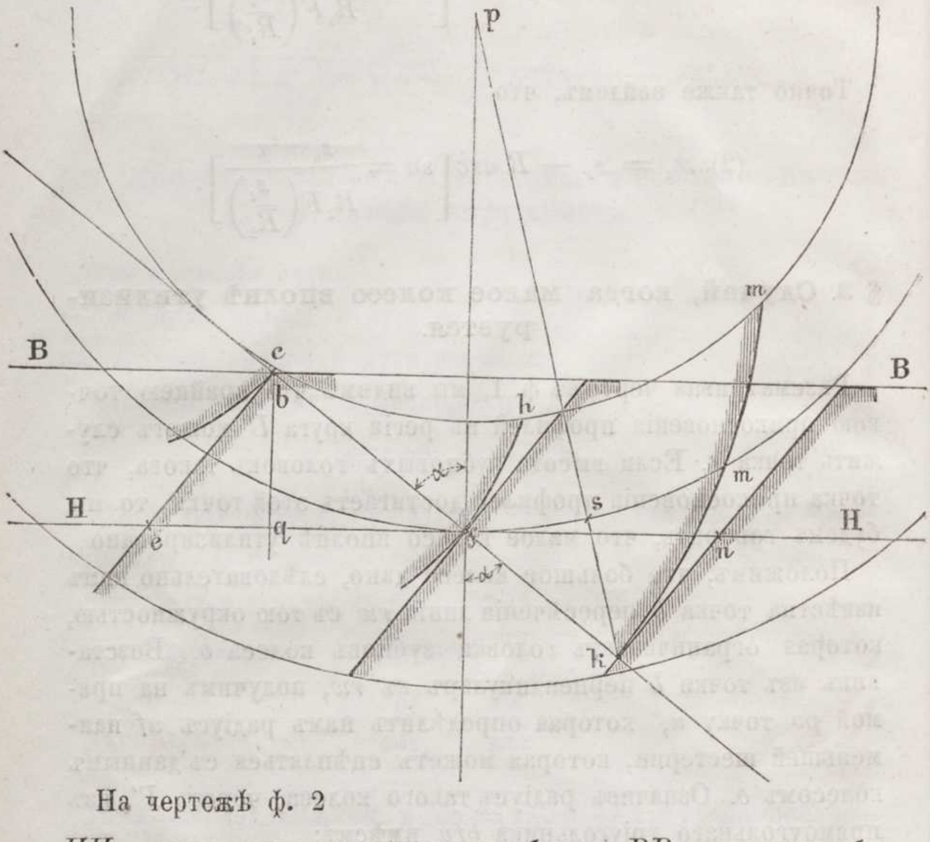
и

$$R'_2 = z_1 tg\alpha.$$

§ 4. Случай шестерни и зубчатой гребенки.

1) Если зубцы шестерни p ф. 2 очерчены по развертывающей круга, то профили зубцовъ гребенки суть прямыя,

перпендикулярныя къ cf, а слѣдовательно съ начальною прямою составляютъ уголъ $= \frac{\pi}{2} - \alpha$.



На чертежѣ ф. 2

HH — есть начальная прямая гребенки. BB — прямая, обрѣзающая зубцовыя головки гребенки.

Высота зубцовыхъ головокъ, для гребенки, есть $bq = h_1$, гдѣ bq — взята перпендикулярно къ HH. Проэкція профиля головки на начальную прямую $x_1 = eq$.

Рабочая дуга гребенки есть прямая $ef = z_2$.

Изъ прямоугольнаго тріугольника eqb, гдѣ уголъ $bef = \alpha$, имѣемъ:

$$eb = ef.cs\alpha = z_1 cs\alpha.$$

Изъ тріугольника же ebq, гдѣ уголъ при q прямой:

$$eq = ebcs\alpha \text{ и } bq = eb\,sn\alpha$$

или

$$eq = z_1 cs^2\alpha \text{ и } bq = z_1 sn\alpha.cs\alpha.$$

Итакъ для гребенки:

$$h_1 = z_1 sn\alpha.cs\alpha \text{ и } x_1 = z_1 cs^2\alpha.$$

2) Если шестерня, сцѣпляющаяся съ гребенкою, вполнѣ утилизирована, то

$$z_1 sn\alpha = R_2 cs\alpha,$$

а потому

$$h_1 = R_2 cs^2\alpha.$$

Изъ тріугольника fkp, гдѣ $fk = z_2 sn\alpha$, имѣемъ

$$(R_2 + h_2)^2 = R_2{}^2 + z_2{}^2 sn^2\alpha + 2R_2 z_2 sn\alpha\; cs\alpha.$$

Принимая $h_2 = h_1 = R_2 cs^2\alpha$, изъ послѣдняго равенства, получимъ:

$$\frac{z_2}{R_2} = ctg\alpha[\sqrt{3 + cs^2\alpha} - 1].$$

§ 5. Рабочія дуги z_1 и z_2.

1) Въ § 1 разсматривая тріугольникъ bfo, въ которомъ стороны суть

$$bf = z_1 sn\alpha,\; of = R_1 \text{ и } bo = R_1 + h_1$$

и внѣшній уголъ $bfp = \alpha$, мы имѣли

$$(h_1 + R_1)^2 = z_1{}^2 sn^2\alpha + R_1{}^2 + 2z_1 sn\alpha.R_1 cs\alpha.$$

Разрѣшивъ это равенство по $z_1 sn\alpha$ имѣемъ:

$$(1)\ldots z_1 = \frac{1}{sn\alpha}\sqrt{(h_1 + R_1)^2 - R_1{}^2 sn^2\alpha} - R_1 ctg\alpha.$$

Точно также изъ тріугольника fkp получимъ:

$$(2)\ldots z_2 = \frac{1}{sn\alpha}\sqrt{(h_2 + R_2)^2 - R_2{}^2 sn^2\alpha} - R_2 ctg\alpha.$$

2. Имѣя въ виду колеса съ одинаковыми высотами зубцовыхъ головокъ ($h_1 = h_1$) разсмотримъ выраженіе

$$(1')\ldots z = \frac{1}{sn\alpha}\sqrt{(h + R)^2 - R^2 sn^2\alpha} - R ctg\alpha,$$

которое черезъ постановку надлежащихъ индексовъ у R даетъ намъ z_1 и z_2.

Возьмемъ производную этого выраженія по R, принимая h и α постоянными

$$\frac{dz}{dR} = \frac{1}{sn\alpha} \cdot \frac{h + Rcs^2\alpha - cs\alpha\sqrt{(h + R)^2 - R^2 sn^2\alpha}}{\sqrt{(h + R)^2 - R^2 sn^2\alpha}}.$$

Внесемъ въ числителѣ $cs\alpha$ подъ корень и раскроемъ скобки $(h + R)^2$. Принявъ во вниманіе, что

$$h^2 cs^2\alpha = h^2 - h^2 sn^2\alpha$$

и

$$R^2 sn^2\alpha . cs^2\alpha = R^2 cs^2\alpha - R^2 cs^4\alpha$$

получимъ:

$$h + Rcs^2\alpha - cs\alpha\sqrt{(h + R)^2 - R^2 sn^2\alpha} =$$

$$= (h + Rcs^2\alpha) - \sqrt{(h + Rcs^2\alpha)^2 - h^2 sn^2\alpha}.$$

Такъ какъ

$$h + Rcs^2\alpha > \sqrt{(h + Rcs^2\alpha)^2 - h^2 sn^2\alpha},$$

то заключаемъ, что

$$\frac{dz}{dR} > 0.$$

т.-е. что z увеличивается вмѣстѣ съ R, или что большему R соотвѣтствуетъ и большое z. Такъ какъ $R_1 > R_2$, то

$$(3)\ldots z_1 > z_2, \text{ т.-е.}$$

что *рабочая дуга колеса всегда болѣе рабочей дуги шестерни*, или *что точка прикосновенія профилей большую часть своего пути описываетъ въ регіи шестерни.*

3) Имѣя въ виду колеса съ одинаковою высотою зубцовыхъ головокъ, имѣемъ

$$h_1 = h_2,$$

что по ур. (1) и (2) § 1 даетъ:

$$R_1\left[F\left(\frac{z_1}{R_1}\right) - 1\right] = R_2\left[F\left(\frac{z_2}{R_2}\right) - 1\right]$$

или

$$\frac{F\left(\frac{z_1}{R_1}\right) - 1}{F\left(\frac{z_2}{R_2}\right) - 1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{c}.$$

Такъ какъ $c > 1$, то $\frac{1}{c} < 1$

и

$$\frac{F\left(\frac{z_1}{R_1}\right) - 1}{F\left(\frac{z_2}{R_2}\right) - 1} < 1$$

или

$$(4)\ldots F\left(\frac{z_1}{R_1}\right) < F\left(\frac{z_2}{R_2}\right).$$

$F\left(\frac{z_1}{R_1}\right)$ и $F\left(\frac{z_2}{R_2}\right)$ получаются изъ выраженія:

$$F(x) = \sqrt{1 + x sn 2\alpha + x^2 sn^2\alpha}$$

по замѣнѣ въ немъ x черезъ $\frac{z_1}{R_1}$ или черезъ $\frac{z_2}{R_2}$.

Взявъ производную отъ $F(x)$, получимъ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{sn 2\alpha + 2x . sn^2\alpha}{2F(x)}.$$

Числитель $sn 2\alpha + 2x sn^2\alpha > 0$, ибо $\alpha > \frac{\pi}{2}$ и x всегда положительно. Слѣдовательно

$$\frac{dF(x)}{dx} > 0,$$

т.-е. $F(x)$ увеличивается вмѣстѣ съ x, или большимъ значеніямъ $F(x)$ соотвѣтствуютъ и большія величины x. А такъ какъ по (4)

$$F\left(\frac{z_1}{R_1}\right) < F\left(\frac{z_2}{R_2}\right) \text{ то и } \frac{z_1}{R_1} < \frac{z_2}{R_2} \ldots (5)$$

т.-е. *уголъ, соотвѣтствующій рабочей дугѣ колеса, менѣе угла, соотвѣтствующаго рабочей дугѣ шестерни.*

4) Уравненіе (2) § 5 даетъ:

$$\frac{z_2}{R_2} = \frac{1}{sn\alpha}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{h}{R_2}\right)^2 - sn^2\alpha} - cs\alpha\right].$$

Принимая высоту зубцовыхъ головокъ одинаковою для всѣхъ колесъ, видимъ изъ послѣдняго равенства, что наибольшей величинѣ $\frac{z_2}{R_2}$ соотвѣтствуетъ наименьшее R_2 или наибольшее $\frac{h}{R_2}$.

Такъ какъ по § 3 при данномъ радіусѣ большаго колеса, наименьшей радіусъ шестерни таковъ, что

$$z_1 sn\alpha = R_2 cs\alpha,$$

то приложивъ къ таковой парѣ колесъ имѣвшееся у насъ въ § 1 равенство

$$(R_1 + h)^2 = z_1{}^2 sn^2\alpha + R_1{}^2 + 2R_1 z_1 sn\alpha\, cs\alpha,$$

по замѣнѣ въ немъ $z_1 sn\alpha$ черезъ $R_2 cs\alpha$, получимъ:

$$2R_1 h + h^2 = R^2{}_2 cs^2\alpha + 2R_1 R_2 cs^2\alpha.$$

Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на R_2 и замѣтивъ, что $R_1 = cR_2$, имѣемъ:

$$2c\frac{h}{R_2} + \frac{h^2}{R^2{}_2} = cs^2\alpha(1 + 2c),$$

откуда:

$$\frac{h}{R_2} = \sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1+2c)} - c.$$

Производная этого выраженія по c:

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{h}{R_2}\right) = \frac{c + cs^2\alpha}{\sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1+2c)}} - 1$$

отрицательна. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $cs\alpha < 1$, то въ дроби:

$$\frac{c + cs^2\alpha}{\sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1+2c)}} = \sqrt{\frac{c^2 + 2c \,.\, cs^2\alpha + cs^4\alpha}{c^2 + 2c \,.\, cs^2\alpha + cs^2\alpha}}$$

числитель меньше знаменателя, а слѣдовательно сама дробь меньше единицы.

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{h}{R_2}\right) = 0$$

не можетъ быть, ибо это требуетъ чтобы $cs^2\alpha = 1$.

И такъ $\frac{h}{R_2}$ съ возрастаніемъ c уменьшается, а потому имѣетъ наибольшую величину при $c=1$. Но при $c=1$ выраженіе $\frac{h}{R_2}$ даетъ:

$$(6)\ldots \frac{h}{R_2} = \sqrt{1 + 3\,cs^2\alpha} - 1.$$

Это *уравненіе даетъ наименьшую величину* R_2 *соотвѣтствующую данному* h. Внеся это въ выраженіе $\frac{z_2}{R_2}$, получимъ *наибольшее* $\frac{z_2}{R_2} = ctg\alpha$.

Такъ какъ одновременно съ (6) имѣемъ $\frac{z_2}{R_2} = ctg\alpha$ и при $c=1$ $z_2 = z_1$, то по (6) для этихъ условій.

$$(7)\ldots z_2 = h.\, \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1 + 3\,cs^2\alpha} - 1.}$$

§ 6. Сравненіе величинъ x_1 и x_2.

Этотъ параграфъ посвящается рѣшенію необходимаго въ послѣдствіи вопроса о томъ, что больше x_1 или x_2.

Разсмотримъ выраженіе:

$$(1)\ldots x = R\left[\xi - arc\left(sn = \frac{\xi\, sn^2\alpha}{F(\xi)}\right)\right], \text{ гдѣ}$$

$$(2)\ldots F(\xi) = \sqrt{1 + \xi sn2\alpha + \xi^2 sn^2\alpha}$$

Уравненіе (1) даетъ намъ x_1 и x_2 по замѣнѣ ξ соотвѣтственно черезъ $\frac{z_1}{R_1}$ или $\frac{z_2}{R_2}$.

Отвѣтъ на нашъ вопросъ получаемъ, разсматривая производную ур. (1):

$$\frac{dx}{dR} = \xi - arc\left[sn = \frac{\xi sn^2\alpha}{F(\xi)}\right] + R\left\{\frac{d\xi}{dR} - \frac{sn^2\alpha\,\frac{d}{dR}\left(\frac{\xi}{F(\xi)}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2 sn^4\alpha}{F^2(\xi)}}}\right\}$$

Здѣсь первые два члена суть ни что иное какъ $\frac{x}{R}$, а потому:

$$\frac{dx}{dR} = \frac{x}{R} + R\left\{\frac{d\xi}{dR} - \frac{sn^2\alpha\,\frac{d}{dR}\left(\frac{\xi}{F(\xi)}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2 sn^4\alpha}{F^2(\xi)}}}\right\}$$

Далѣе

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\xi}{F(\xi)}\right) = \frac{F(\xi) - \xi F'(\xi)}{F^2(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{dR}.$$

По ур. (2)

$$F'(\xi) = \frac{sn2\alpha + 2\xi.sn^2\alpha}{2F(\xi)}$$

а слѣдовательно:

$$\frac{F(\xi)-\xi F'(\xi)}{F^2(\xi)}=\frac{2+\xi sn2\alpha}{F^3(\xi)}$$

Внеся это въ выраженіе $\frac{dx}{dR}$ и замѣтивъ, что

$$\frac{sn^2\alpha}{\sqrt{1-\frac{\xi^2 sn^4\alpha}{F^2(\xi)}}}=\frac{F(\xi)sn^2\alpha}{\sqrt{F^2(\xi)-\xi^2 sn^4\alpha}}$$

получимъ:

$$(3)\ldots\ \frac{dx}{dR}=\frac{x}{R}+R\cdot\frac{d\xi}{dR}\cdot\left[1-\frac{(2+\xi sn2\alpha)sn^2\alpha}{F^2(\xi)\sqrt{F^2(\xi)-\xi^2 sn^4\alpha}}\right].$$

Возьмемъ ур. (2)

$$F^2(\xi)=1+\xi^2 sn^2\alpha+\xi sn2\alpha.$$

Вычтемъ изъ обѣихъ частей этого равенства $\xi^2 sn^4\alpha$. Замѣтивъ, что

$$\xi^2 sn^2\alpha-\xi^2 sn^4\alpha=\xi^2 sn^2\alpha(1-sn^2\alpha)=\frac{\xi^2 sn^2 2\alpha}{4},$$

получаемъ:

$$F^2(\xi)-\xi^2 sn^4\alpha=\left(1+\frac{\xi sn2\alpha}{2}\right)^2=\frac{(2+\xi sn2\alpha)^2}{4}$$

и

$$\sqrt{F^2(\xi)-\xi^2 sn^4\alpha}=\frac{2+\xi sn2\alpha}{2}.$$

Внеся это въ ур. (3) находимъ:

$$(4)\ldots\ \frac{dx}{dR}=\frac{x}{R}+R\frac{d\xi}{dR}\left[1-\frac{2sn^2\alpha}{F^2(\xi)}\right].$$

Займемся теперь производною $\frac{d\xi}{dR}$.

Для этого возьмемъ изъ § 5 равенство (1′):

$$z = \frac{1}{sn\alpha}\sqrt{(h+R)^2 - R^2 sn^2\alpha} - Rctg\alpha.$$

Которое, вслѣдствіе того, что $\xi = \frac{z}{R}$ даетъ:

$$(5)\ldots\ \xi = \frac{1}{sn\alpha}\left[\sqrt{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 - sn^2\alpha} - cs\alpha\right],$$

откуда

$$\frac{d\xi}{dR} = -\frac{h}{R^2 sn\alpha}\cdot\frac{1+\frac{h}{R}}{\sqrt{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 - sn^2\alpha}}.$$

Обративъ вниманіе на ур. (1) и (2) § 1, видимъ, что

$$1+\frac{h}{R} = F(\xi),$$

а потому

$$\frac{d\xi}{dR} = -\frac{hF(\xi)}{R^2 sn\alpha\sqrt{F^2(\xi) - sn^2\alpha}}.$$

Вслѣдствіе того же самаго равенства

$$1+\frac{h}{R} = F.\xi)$$

изъ ур. (5) имѣемъ:

$$\xi = \frac{\sqrt{F^2(\xi) - sn^2\alpha} - cs\alpha}{sn\alpha},$$

откуда

$$\sqrt{F^2(\xi) - sn^2\alpha} = \xi sn\alpha + cs\alpha,$$

а потому

$$\frac{d\xi}{dR} = -\frac{h}{R^2 sn\alpha}\cdot\frac{F(\xi)}{(\xi sn\alpha + cs\alpha)}.$$

Внеся это въ ур. (4) получимъ

$$\frac{dx}{dR}=\frac{x}{R}-\frac{h}{Rsn\alpha(\xi sn\alpha+cs\alpha)}\cdot\frac{F^2(\xi)-2sn^2\alpha}{F(\xi)}.$$

Наконецъ, внеся сюда

$$F^2(\xi)=\xi^2 sn^2\alpha+\xi sn2\alpha+1,$$

приводимъ выраженіе $\frac{dx}{dR}$ въ такой видъ:

$$(6)\ldots\ \frac{dx}{dR}=\frac{x}{R}-\frac{h}{Rsn\alpha}\cdot\frac{\xi sn2\alpha+\xi^2 sn^2\alpha+2cs^2\alpha-1}{F(\xi)(\xi sn\alpha+cs\alpha)}.$$

Займемся этимъ равенствомъ.

Первый членъ $\frac{x}{R}$ его второй части есть величина существенно положительная. Знакъ же втораго члена зависитъ отъ перемѣнной величины ξ. А потому, приступая къ рѣшенію вопроса о знакѣ этого члена, посмотримъ сперва въ какихъ предѣлахъ измѣняется ξ.

Такъ какъ

$$\xi=\frac{z}{R}$$

и по смыслу вопроса z всегда положительно, то заключаемъ, что ξ *всегда положительно*. Если же это такъ, то знаменатель втораго члена второй части выраженія $\frac{dx}{dR}$ т.-е,

$$Rsn\alpha.F^2(\xi)(\xi sn\alpha+cs\alpha)$$

есть величина положительная, а слѣдовательно *знакъ дроби*

$$\frac{h}{Rsn\alpha}\cdot\frac{\xi sn2\alpha+\xi^2 sn^2\alpha+2cs^2\alpha-1}{F^2(\xi)(\xi sn\alpha+cs\alpha)}$$

зависитъ отъ знака ея числителя

$$\varphi(\xi)=\xi su2\alpha+\xi^2 sn^2\alpha+2cs^2\alpha-1.$$

Производная этого выраженія

$$\varphi'(\xi)=sn2\alpha+2\xi sn^2\alpha$$

есть величина положительная, ибо по вышесказанному ξ не можетъ быть отрицательною, а потому $\varphi(\xi)$ возрастаетъ вмѣстѣ съ ξ и $\varphi(\xi)$ получаетъ наибольшую величину при наибольшемъ ξ.

Взявъ выраженіе

$$\xi=\frac{1}{sn\alpha}\left[\sqrt{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2-sn^2\alpha}-cs\alpha\right],$$

видимъ, что наибольшая величина ξ, соотвѣтствуетъ наибольшей $\frac{h}{R}$, которая по § 5 4) есть

$$\sqrt{1+3cs^2\alpha}-1, \text{ и } \left(1+\frac{h}{R}\right)^2=1+3cs^2\alpha,$$

а потому

возможная наибольшая

$$\xi=\frac{1}{sn\alpha}[\sqrt{1+3cs^2\alpha-sn^2\alpha}-cs\alpha]=ctg\alpha.$$

Внеся въ выраженіе $\varphi(\xi)$, вмѣсто ξ $ctg\alpha$ получимъ, что возможная наибольшая

$$\varphi(\xi)=ctg\alpha.sn2\alpha+2cs^2\alpha+ctg^2\alpha.sn^2\alpha-1=5cs^2\alpha-1.$$

Если α таково, что

$$5cs^2\alpha-1<0, \text{ т.-е. } \alpha>63^\circ 26',$$

то возможная наибольшая величина $\varphi(\xi)$ отрицательна, а слѣдовательно таковы же и всѣ другія возможныя значенія $\varphi(\xi)$.

Если же

$$\varphi(\xi)=\xi sn2\alpha+\xi^2 sn^2\alpha+2cs^2\alpha-1<0,$$

то

$$-\frac{h}{Rsn\alpha}\cdot\frac{\xi sn2\alpha+\xi^2sn^2\alpha+2cs^2\alpha-1}{F^2(\xi)(\xi sn\alpha+cs\alpha)}>0$$

и тогда $\frac{dx}{dR}$, какъ сумма (см. ур. (6)) двухъ положительныхъ количествъ, есть величина положительная, т.-е. x возрастаетъ вмѣстѣ съ R, а слѣдовательно $x_1>x_2$.

И такъ, если мы будемъ имѣть въ виду

$$5cs^2\alpha-1<0,\text{ или }\alpha>63^0 26',$$

то всегда $x_1>x_2$.

§ 7. Приближенныя выраженія h_1, h_2, x_1 и x_2.

Сложность выраженій h_1 h_2 x_1 и x_2, данныхъ нами въ §§ 1 и 2, заставляетъ насъ въ слѣдующемъ § прибѣгнуть къ ихъ приближеннымъ выраженіямъ. Составленіе этихъ приближенныхъ выраженій и составляетъ предметъ § 7.

Такъ какъ разсматриваемыя выраженія зависятъ отъ

$$F(\xi)=\sqrt{1+\xi sn2\alpha+\xi^2sn^2\alpha},$$

гдѣ подъ ξ подразумѣвается $\frac{z_1}{R_1}$ или $\frac{z_2}{R_2}$, то посмотримъ сперва каковы тѣ условія, при которыхъ возможна замѣна $F(\xi)$ его приближеннымъ выраженіемъ:

Принявъ

$$\xi sn2\alpha+\xi^2sn^2\alpha=f(\xi),$$

имѣемъ

$$F(\xi)=\sqrt{1+f(\xi)}.$$

Для разложенія $F(\xi)$ въ рядъ:

$$F(\xi)=1+\frac{1}{2}f(\xi)-\frac{1}{8}f^2(\xi)+\frac{1}{16}f^3(\xi)$$

необходимо, чтобы при всякомъ возможномъ ξ

$$f(\xi) = \xi sn2\alpha + \xi^2 sn^2\alpha < 1.$$

Посмотримъ такъ-ли это на дѣлѣ. Такъ какъ ξ всегда положительно и $sn2\alpha$ есть тоже положительная величина, ибо $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $f(\xi)$ возрастаетъ вмѣстѣ съ ξ, а слѣдовательно достигаетъ возможной наибольшей величины при возможно наибольшей ξ, т.-е. при $\xi = ctg\alpha$. Поэтому возможно большая $f(\xi) = 3cs^2\alpha$.

Эта величина меньше единицы, если

$$cs\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ или } \alpha > 54^\circ 44'.$$

Имѣя въ виду $\alpha > 63^\circ 26'$, мы будемъ имѣть дѣло только съ такими величинами $f(\xi)$, которыя меньше единицы, а потому разложеніе

$$F(\xi) = 1 + \frac{1}{2}f(\xi) - \frac{1}{8}f^2(\xi) + \frac{1}{16}f^3(\xi) \ldots$$

всегда возможно.

Вставивъ въ этотъ рядъ

$$f(\xi) = \xi sn2\alpha + \xi^2 sn^2\alpha$$

получимъ:

$$F(\xi) = 1 + \frac{\xi}{2}[sn2\alpha + \xi sn^2\alpha] -$$

$$- \frac{\xi^2}{8}[sn2\alpha + \xi sn^2\alpha]^2 +$$

$$+ \frac{\xi^3}{16}[sn2\alpha + \xi sn^2\alpha]^3 \ldots,$$

или, ограничиваясь членами содержащими ξ въ степеняхъ, не высшихъ 3-й:

$$F(\xi) = 1 + \frac{\xi}{2} sn2\alpha + \xi^2\left[\frac{sn^2\alpha}{2} - \frac{sn^2 2\alpha}{8}\right] +$$

$$+ \xi^3\left[\frac{sn^3 2\alpha}{16} - \frac{2sn2\alpha sn^2\alpha}{8}\right].$$

Такъ какъ $sn2\alpha = 2sn\alpha . cs\alpha$, то

$$\frac{sn^2\alpha}{2} - \frac{sn^2 2\alpha}{8} = \frac{sn^2\alpha}{2} - \frac{4sn^2\alpha . cs^2\alpha}{8} = \frac{sn^4\alpha}{2}$$

и

$$\frac{sn^3 2\alpha}{16} - \frac{2sn2\alpha . sn^2\alpha}{8} = \frac{sn2\alpha}{4}\left[\frac{sn^2 2\alpha}{8} - \frac{sn^2\alpha}{2}\right] = -\frac{sn2\alpha . sn^4\alpha}{4}.$$

Вслѣдствіе этого получимъ:

$$(a) \ldots\ F(\xi) = 1 + \frac{sn2\alpha}{2} . \xi + \frac{sn^4\alpha}{2}\xi^2 - \frac{sn2\alpha . sn^4\alpha}{4}\xi^3.$$

Точно также найдемъ, что

$$(b) \ldots\ \frac{1}{F(\xi)} = 1 - \frac{sn2\alpha}{2} . \xi - \frac{sn^2\alpha}{2}[1 - 3cs^2\alpha]\xi^2 +$$

$$+ \frac{sn2\alpha . sn^2\alpha}{4}[1 - 5cs^2\alpha]\xi^3.$$

Принявъ

$$(3) \ldots\ ctg\alpha = \mu,$$

позволимъ себѣ, по малости μ (α полагается $> 63^0$), въ ур. (1) и (2) принять:

$$sn\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = 1 - \frac{1}{2}\mu^2,\ cs\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \mu$$

$$sn2\alpha = 2sn\alpha . cs\alpha = 2\mu,$$

$$sn^2\alpha = 1 - \mu^2,\ cs^2\alpha = \mu^2$$

и

$$sn^4\alpha = 1 - 2\mu^2.$$

Это приводитъ ур. (a) и (b) къ такому виду:

$$(a')\ldots F(\xi) = 1 + \mu\xi + \frac{1}{2}\xi^2$$

$$(b')\ldots \frac{1}{F(\xi)} = 1 - \mu\xi - \frac{1}{2}\xi^2.$$

Здѣсь мы позволили себѣ откинуть члены, содержащіе произведеніе $\mu^2\xi^2$, и члены высшаго порядка.

Пользуясь приближенными выраженіями (a'), получимъ изъ ур. (1) и (2) § 1:

$$(1)\ldots h_1 = z_1\left[\mu + \frac{1}{2}\cdot\frac{z_1}{R_1}\right]$$

$$(2)\ldots h_2 = z_2\left[\mu + \frac{1}{2}\cdot\frac{z_2}{R_2}\right].$$

Общая формула для x_1 и x_2 по § 2 есть:

$$x = R\left[\xi - arc\left[sn = \frac{\xi sn^2\alpha}{F(\xi)}\right]\right].$$

Внеся въ $\frac{\xi sn^2\alpha}{F(\xi)}$ вмѣсто $sn^2\alpha \ldots 1-\mu^2$ и вмѣсто $\frac{1}{F(\xi)}$ его выраженіе (b'), получимъ:

$$\frac{\xi sn^2\alpha}{F(\xi)} = \xi(1-\mu^2)\left(1-\mu\xi-\frac{1}{2}\xi^2\right) = \xi(1-\mu^2) - \xi^2\mu - \frac{1}{2}\xi^3.$$

Пользуясь формулою разложенія $arsn$ въ рядъ, найдемъ:

$$arc\left[sn = \frac{\xi sn^2\alpha}{F(\xi)}\right] = \xi - \mu^2\xi - \mu\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3.$$

И наконецъ:

$$x=R\left(\mu^2\xi+\mu\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3\right).$$

откуда, внося вмѣсто ξ послѣдовательно $\frac{z_1}{R_1}$ и $\frac{z_2}{R_2}$ и ставя соотвѣтственный знакъ у R предъ скобками, получаемъ:

$$(3)\ldots\ x_1=z_1\left[\mu^2+\mu\frac{z_1}{R_1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z_1^{\,2}}{R_1^{\,2}}\right]$$

$$(4)\ldots\ x_2=z_2\left[\mu^2+\mu\frac{z_2}{R_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z_2^{\,2}}{R_2^{\,2}}\right].$$

§ 8. Высота зубцовыхъ головокъ.

Задавшись условіемъ, что всѣ колеса одного и того же шага зацѣпленія имѣютъ одну и ту же высоту зубцовыхъ головокъ, мы должны, при назначеніи величины этой высоты имѣть въ виду, чтобы ни одно колесо не имѣло бы остроконечныхъ зубьевъ. А это значитъ, что для всѣхъ колесъ проэкція профиля зубцовой головки на начальную окружность должна быть менѣе половины толщины зуба.

Если *отношеніе толщины зуба къ шагу зацѣпленія* t *есть* a, то для всѣхъ колесъ

$$x<\frac{at}{2}.$$

Такъ какъ по § 6 $x_1>x_2$, то, если будетъ удовлетворено неравенство $x_1<\frac{at}{2}$, неравенство $x_2<\frac{at}{2}$ и подавно будетъ имѣть мѣсто.

И такъ, опредѣляя высоту зубцовыхъ головокъ, мы должны имѣть въ виду неравенство

$$(1)\ldots\ x_1<\frac{at}{2},$$

гдѣ

$$(2)\ldots\ x_1 = z_1\left(\mu^2 + \mu\frac{z_1}{R_1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z_1^2}{R_1^2}\right).$$

Взявъ во (2) $\frac{z_1^2}{R_1^2}$ за скобку и принявъ

$$(3)\ \mu\frac{R_1}{z_1} = \eta,$$

получимъ

$$(2')\ldots\ x_1 = \frac{z_1}{3}\left(\frac{z_1}{R_1}\right)^2[3\eta^2 + 3\eta + 1].$$

Означивъ *отношеніе высоты зубцовой головки къ шагу зацѣпленія* t *черезъ* b, получимъ

$$h_1 = h_2 = bt;$$

и по ур. (1) § 7

$$bt = z_1\left(\mu + \frac{1}{2}\cdot\frac{z_1}{R_1}\right),$$

откуда

$$\frac{z_1}{R_1} = \frac{1}{z_1}\cdot\frac{2bt}{1 + 2\mu\frac{R_1}{z_1}} = \frac{1}{z_1}\cdot\frac{2bt}{1+2\eta}.$$

Внеся это выраженіе $\frac{z_1}{R_1}$ въ выраженіе $(2')$ x_1 получимъ:

$$(3)\ldots\ x_1 = \frac{4b^2t^2}{3z_1}\cdot\frac{3\eta^2+3\eta+1}{(1+2\eta)^2}.$$

Примемъ

$$(4)\ldots\ z_1 = m_1 t,\quad z_2 = m_2 t$$

и $$(5)\ldots\ \frac{3\eta^2+3\eta+1}{(1+2\eta)^2} = f(\eta).$$

Пользуясь этими обозначеніями, приводимъ ур. (3) въ такой видъ:

$$(6)\ldots\ x_1 = \frac{4b^2 t}{3m_1} f(\eta).$$

Неравенство (1) вслѣдствіе ур. (6) обращается въ слѣдующее:

$$\frac{4b^2}{3m_1} \cdot f(\eta) < \frac{a}{2},$$

которое будетъ удовлетворено, если b будетъ удовлетворять уравненію:

$$(7)\ldots\ \frac{4b^2}{3} \cdot \frac{\text{возможно большее } f(\eta)}{\text{возможно малое } m_1} = \frac{\text{возможное малое } a}{2}.$$

Посмотримъ теперь какъ велики эти возможныя: большое $f(\eta)$ и малыя m_1 и a. Начинаемъ съ послѣднихъ.

Возможно малая величина a соотвѣтствуетъ чугуннымъ зубцамъ, сцѣпляющимся съ деревянными; и въ этомъ случаѣ

$$(8)\ldots\ a = \frac{100}{267}.$$

Далѣе, такъ какъ вѣрность сцѣпленія требуетъ, чтобы дуга сцѣпленія, т.-е. $z_1 + z_2$, была не менѣе одного шага, то

$$z_1 + z_2 = (m_1 + m_2)t < t,$$

или

$$m_1 + m_2 > 1.$$

А такъ какъ по § 5 нерав. (3) $z_1 > z_2$, то

$$m_1 > 0.5;$$

слѣдовательно возможная малая величина m_1 есть

$$(9)\ldots\ m_1 = 0.5.$$

Переходимъ теперь къ

$$f(\eta) = \frac{3\eta^2 + 3\eta + 1}{(1 + 2\eta)^2}.$$

Такъ какъ η есть величина положительная, то $f(\eta) = 0$ и $f(\eta) = \infty$ невозможны.

Производная

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} = -\frac{4(3\eta^2 + 2\eta + 1)}{(2\eta + 1)^4}$$

по той же причинѣ не можетъ быть ни 0 ни ∞; она всегда отрицательна. А потому заключаемъ, что $f(\eta)$ съ возрастаніемъ η уменьшается, а слѣдовательно возможно наибольшей величинѣ $f(\eta)$ соотвѣтствуетъ возможно малое η.

Такъ какъ

$$\eta = \mu . \frac{R_1}{z_1},$$

то возможное наименьшее η получается по вставкѣ наибольшаго $\frac{z_1}{R_1}$, которая по § 6 есть $ctg\alpha$, т.-е. μ, а потому:

$$\text{возможно наименьшее } \eta = 1.$$

Принявъ въ выраженіи $f(\eta)$ $\eta = 1$ получимъ

$$(10) \ldots \text{ возможно большая } f(\eta) = \frac{7}{9}.$$

Вслѣдствіе (8), (9) и (10) ур. (7) принимаетъ видъ:

$$\frac{56b^2}{27} = \frac{50}{267}.$$

Откуда $b = 0.3004$ или круглымъ числомъ $b = 0.3$.

И такъ *высота зубцевыхъ головокъ равна* $0.3t$.

§ 9. Другое доказательство того, что $h = 0.3t$ удовлетворяетъ условію $2x < at$.

Мы можемъ доказать, не прибѣгая къ приближеннымъ выраженіямъ h и x, что принявъ $h = 0.3t$, мы не получимъ ни у одного колеса остроконечныхъ зубьевъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что x возрастаетъ вмѣстѣ съ R, слѣдовательно получаетъ возможную большую величину при $R=\infty$. А потому имѣя въ виду неравенство:

$$x < \frac{at}{2},$$

мы должны обратиться къ зубчатой полосѣ.

Изъ фигуры же 2-й видимъ, что

$$x = eq = bq.ctg\alpha = hctg\alpha.$$

И такъ наше неравенство, приложенное къ зубцамъ гребенки будетъ

$$(1)\dots\ hctga < \frac{at}{2}.$$

Это неравенство будетъ удовлетворено, если возьмемъ h изъ уравненія:

$$h = \frac{\text{возможно малое } a}{\text{возможно большое } ctg\alpha} \cdot \frac{t}{2}.$$

Но возможно малое $a = \frac{100}{267}$, а возможно большое $ctg\alpha$ соотвѣтствуетъ возможно малому α. Самая малая величина α, для которой x увеличивается вмѣстѣ съ R, извѣстна намъ изъ § 6, именно α это таково, что

$$cs\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

что соотвѣтствуетъ

$$ctg\alpha = \frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ и получаемъ

$$h = \frac{100}{267}t = 0.39t.$$

Слѣдовательно неравенство (1) и подавно удовлетворяется, если $h = 0.3t$.

§ 10. Низшій предѣлъ угла α для $\text{ь} = 0.3$.

Въ § 4 мы имѣли для зубчатой гребенки

$$h = z_1 sn\alpha . cs\alpha = \frac{z_1 sn2\alpha}{2}.$$

Принимая здѣсь

$$h = 0{,}3t \text{ и } z_1 = m_1 t,$$

получимъ

$$sn2\alpha = \frac{0.6}{m_1}.$$

Изъ этого равенства мы видимъ, что $sn2\alpha$ съ увеличеніемъ m_1 уменьшается, а такъ какъ уголъ $2\alpha > \frac{h}{2}$, и мы полагали $\alpha > 63^o$, то α при этомъ увеличивается. Если примемъ, что сцѣпленіе шестерни съ гребенкою имѣетъ мѣсто на протяженіи дуги nt, то зная, что $z_1 > z_2$, имѣемъ

$$m_1 > \frac{n}{2},$$

а потому всегда $sn2\alpha < \frac{1.2}{n}$, или

$$\alpha > \frac{arc}{2}\left[sn = \frac{1.2}{n}\right].$$

Полагая, что наибольшая длина дуги сцѣпленія шестерни съ гребенкою равна двойному шагу зацѣпленія, т.-е. что $n=2$, имѣемъ:

$$\text{низшій предѣлъ } \alpha = 0.5 arc[sn = 0.6] = 71^o 34'.$$

§ 11. Случай равныхъ колесъ съ наименьшими радіусами.

Мы уже видѣли, какъ великъ наименьшій радіусъ шестерни, при данномъ радіусѣ колеса. Оставляя радіусъ шестерни постояннымъ, будемъ уменьшать радіусъ колеса.

Очевидно, что при этомъ z_1 будетъ уменьшаться, ибо $\frac{dz}{dR} > 0$ (см. § 5), 2). Такъ какъ мы приняли $c > 1$, то наименьшее колесо, для данной шестерни, имѣетъ радіусъ, равный ея радіусу. Въ этомъ случаѣ:

$$(1)\ldots\ z_1 = z_2 = \frac{nt}{2},$$

и *для обоихъ колесъ*

$$(2)\quad R = ztg\alpha = \frac{nt}{2} tg\alpha.$$

Если Z_e *означаетъ число зубцовъ каждаго изъ равныхъ колесъ*, то

$$\frac{2\pi R}{t} = Z_e \text{ или } R = \frac{Z_e t}{2\pi}$$

и по ур. (2):

$$(2).\ Z = \pi n tg\alpha\ , \quad \text{или } n = \frac{\pi tg\alpha}{Z}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ равенства, служившія намъ въ § 5 для опредѣленія z_1 и z_2, сливаются въ одно:

$$(h + R)^2 = z^2 sn^2\alpha + 2z sn\alpha R cs\alpha + R^2,$$

которое даетъ:

$$h^2 + 2hR = z^2 sn^2\alpha + 2Rz sn\alpha . cs\alpha.$$

Внеся сюда изъ (2)

$$z = \frac{R}{tg\alpha},$$

получимъ:

$$h^2 + 2hR = 3R^2 cs^2\alpha,$$

что вслѣдствіе равенствъ:

$$h = bt \text{ и } R = \frac{Z_e t}{2\pi},$$

дастъ:

$$b^2 + \frac{2bZ_e}{\pi} = \frac{3cs^2\alpha}{4\pi^2} Z_e^{\,2},$$

откуда

$$Z_e = \frac{2b\pi}{3cs^2\alpha}\left[1 + \sqrt{1 + 3cs^2\alpha}\right].$$

Принявъ здѣсь, по §§ 8 и 9, $b = 0.3$ находимъ:

$$(3)\ldots\ Z_e = \frac{0.2\pi}{cs^2\alpha}\left[1 + \sqrt{1 + 3cs^2\alpha}\right].$$

При $\alpha = 75^\circ$, какъ это обыкновенно принято, это уравненіе даетъ:

$Z_e = 19.65$ круглымъ числомъ 19.

Вставивъ это число зубцовъ въ равенство:

$$z = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{Z_e t}{2\pi . tg\alpha},$$

получимъ:

$$z = 0.83t$$

т.-е. *при вполнѣ утилизированныхъ равныхъ колесахъ дуга сцѣпленія составляетъ* $1.66t = 2t$.

§ 12. Число зубцовъ Z_0 вполнѣ утилизированной шестерни, сцѣпляющейся съ гребенкою.

Означая радіусъ этой шестерни, черезъ r имѣемъ по § 4 ур. 2):

$$\frac{z_1}{r} = ctg\alpha \quad \frac{z_2}{r} = ctg\alpha\left[\sqrt{3 + cs^2\alpha} - 1\right]$$

и

$$h = rcs^2\alpha.$$

Означивъ дугу сцѣпленія $z_1 + z_2 = nt$ и число зубцовъ шестерни черезъ $Z_0 = \frac{2\pi r}{t}$, имѣемъ изъ написанныхъ равенствъ:

$$\frac{z_1 + z_2}{r} = \frac{nt}{r} = ctg\alpha\sqrt{3 + cs^2\alpha}$$

и

$$h = \frac{tZ_0}{2\pi}cs^2\alpha,$$

откуда

$$Z_0 = \frac{2\pi h}{tcs^2\alpha}$$

и

$$n = \frac{Z_0\sqrt{3 + cs^2\alpha}}{2\pi}.ctg\alpha.$$

Сдѣлавъ въ этихъ равенствахъ $h = 0.3t$ и $\alpha = 75^\circ$, получимъ

$$Z_0 = 28.14 \text{ круглымъ числомъ } 28 \text{ и } n = 21.$$

§ 13. Опредѣленіе чиселъ зубцовъ двухъ колесъ, полагая, что малое колесо вполнѣ утилизировано и что $h_1 = h_2 = 0.3t$.

При послѣднемъ условіи, кромѣ равенствъ

$$(1)\ R_1 = cR_2,\quad (2)\ z_1 sn\alpha = \sqrt{(h + R_1)^2 - R_1^2 sn^2\alpha} - R_1 cs\alpha$$

и

$$(3)\ z_2 sn\alpha = \sqrt{(h + R_2)^2 - R_2^2 sn^2\alpha} - R_2 cs\alpha,$$

имѣемъ, по § 3, еще одно:

$$(4)\ z_1 sn\alpha = R_2 cs\alpha.$$

Такимъ образомъ, считая h, α и c извѣстными, можемъ опредѣлить R_1, R_2, z_1 и z_2 такъ, что *длина $z_1 + z_2 = k$, дугѣ сцѣпленія, получаетъ опредѣленную величину.*

Сложивъ уравненіе (3) и (4) и замѣнивъ въ суммѣ $z_1 + z_2$ черезъ k, получимъ:

$$\sqrt{(h + B_2)^2 - B_2^2 sn^2\alpha} = k sn\alpha,$$

откуда

$$R_2^2 + \frac{cs^2\alpha}{2h} R_2 = \frac{k^2 sn^2\alpha - h^2}{cs^2\alpha} = \frac{h^2}{cs^2\alpha}\left[\frac{k^2}{h^2} sn^2\alpha - 1\right]$$

и

$$(5) \ldots R_2 = \frac{h}{cs^2\alpha}\left[sn\alpha\sqrt{\frac{k^2}{h^2} cs^2\alpha + 1} - 1\right].$$

Вычитая (4) изъ (2) получаемъ:

$$\sqrt{(h + R_1)^2 - R_1^2 sn^2\alpha} = (R_1 + R_2) cs\alpha,$$

или:

$$h^2 + 2hR_1 = 2R_1R_2cs^2\alpha + R_2{}^2cs^2\alpha.$$

Внеся сюда $R_1 = R_2$ и расположивъ по степенямъ R_2 получаемъ:

$$R_2{}^2 - \frac{2c}{1+2c} \cdot \frac{h}{cs^2\alpha} R_2 = \frac{h^2}{cs^2\alpha} \cdot \frac{1}{1+2c},$$

откуда

$$(6)\ldots\ R_2 = \frac{h}{cs^2\alpha} \cdot \frac{c + \sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1+2c)}}{1+2c}.$$

Сравненіе этого выраженія R_2 съ даннымъ въ ур. (5) приводитъ насъ къ заключенію, что

$$sn\alpha\sqrt{1 + \frac{h^2}{k^2}cs^2\alpha} - 1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1+2c)}}{1+2c}.$$

Примемъ

$$(\mathrm{I})\ldots \begin{cases} \dfrac{c + \sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1+3c)}}{1+2c} = C, \\ \\ \dfrac{C+1}{sn\alpha} = B. \end{cases}$$

Это обозначеніе приводитъ предыдущее равенство въ такой видъ:

$$1 + \frac{k^2}{h^2}cs^2\alpha = B^2,$$

откуда:

$$(7)\ldots\ k = \frac{h\sqrt{B^2 - 1}}{sn\alpha}.$$

Это уравненіе даетъ намъ дугу сцѣпленія въ функціи c. Принявъ

$$k = nt \text{ и } h = 0.3t,$$

получимъ:

$$(8)\dots\ n = \frac{0.3\sqrt{B^2 - 1}}{cs\alpha}.$$

Изъ ур. (6) при $h = 0.3t$ получимъ:

$$(9)\ Z_2 = \frac{2\pi B_2}{t} = \frac{0.6\pi}{cs^2\alpha} \cdot \frac{c + \sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1 + 2c)}}{1 + 2c},$$

а по этому числу найдемъ и число зубцовъ колеса:

$$Z_1 = cZ_2.$$

Примѣчаніе.

Не лишнее считаемъ замѣтить, что k увеличивается вмѣстѣ съ c. Въ самомъ дѣлѣ изъ (7) видно, что k возрастаетъ съ B, а B по (I) возрастаетъ вмѣстѣ съ C. Но

$$\frac{dC}{dc} = \frac{\sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1 + 2c)} - c(1 - cs2\alpha)}{(1 + 2c)^2\sqrt{c^2 + cs^2\alpha(1 + 2c)}} > 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ взявъ разность квадратовъ

$$[\sqrt{c^2 cs^2(1 + 2c)}]^2 - c^2(1 - cs2\alpha)^2$$

увидимъ, что она равна $(2c - sn^2\alpha)sn^2\alpha$, а это, вслѣдствіе $c > 1$, есть величина положительная, слѣдовательно:

$$\sqrt{c^2 + cs^2(1 + 2c)} > c(1 - cs2\alpha)$$

и

$$\frac{dC}{dc} > 0,$$

т.-е. C, а съ нею вмѣстѣ B и k увеличиваются съ возрастаніемъ c.

Такъ какъ по ур. (9)

$$Z_2 = \frac{0.6\pi}{cs^2\alpha} \cdot C,$$

то заключаемъ, что и Z_2 возрастаетъ вмѣстѣ съ c. Мы видѣли выше, что при $c = 1$ $z_2 = 19$ (§ 11) и при $c = \infty$ (§ 12) $z_2 = 28$, по этому заключаемъ что Z_2 заключается въ предѣлахъ 19 и 28. Точно также предѣлы n суть 1.6 и 2.1.

Изслѣдованіе обстоятельствъ внутренняго зацѣпленія оставляемъ до другаго раза.

Профессоръ *Д. Н. Лебедевъ.*

НОВЫЙ СПОСОБЪ РАЗСЧЕТА ПОЛУРАЗРѢЗНЫХЪ ФЕРМЪ.

Полуразрѣзная ферма, какъ указываетъ ея названіе, занимаетъ среднее мѣсто между цѣльною (неразрѣзною) и разрѣзною фермою. Она отличается отъ цѣльной тѣмъ, что въ ней подвижной грузъ передается отъ одного пролета на другой, но собственный вѣсъ фермы каждаго пролета не вліяетъ на остальные пролеты, т.-е., говоря иными словами, полуразрѣзная ферма является неразрѣзною только по отношенію подвижнаго груза.

Подобное устройство достигается тѣмъ, что каждый пролетъ покрывается отдѣльными фермами и затѣмъ уже, по совершенномъ окончаніи сборки моста (включая половую настилку, рельсы и пр.) и по уборкѣ подмостей, т.-е. когда фермы примутъ соотвѣтствующій прогибъ подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса моста, тогда только производится соединеніе фермъ отдѣльныхъ пролетовъ между собою, путемъ вставленія дополнительныхъ панелей надъ каждой опорой; или же, если при сборкѣ собираютъ фермы отдѣльныхъ пролетовъ такъ, чтобы онѣ были сближены между собою на величину зазора, необходимаго только для расширенія отъ возможнаго измѣненія температуры во время сборки, то соединеніе фермъ можетъ быть произведено склепкою простыхъ накладокъ.

Употребленіемъ полуразрѣзныхъ фермъ предполагаютъ достигнуть, сравнительно съ разрѣзными фермами — экономіи въ матеріалѣ, а по отношенію къ неразрѣзнымъ фермамъ—значительнаго уменьшенія обратныхъ напряженій надъ опорами, такъ какъ въ этой системѣ означенныя напряженія вызываются дѣйствіемъ только подвижнаго груза.

Разсчетъ усилій въ полуразрѣзной фермѣ обыкновенно производится слѣдующимъ способомъ: данную ферму разсматриваютъ какъ неразрѣзную и невѣсомую, т.-е., опуская вліяніе вѣса моста, вычисляютъ сгибающіе моменты и вертикальныя усилія, производимые однимъ подвижнымъ грузомъ; полученныя величины изображаютъ графически параболами моментовъ и прямыми. Затѣмъ, разсматривая ферму какъ разрѣзную и вѣсомую, но ненагруженную, опредѣляютъ моменты и вертикальныя усилія, производимые собственнымъ вѣсомъ и вычерчиваютъ на первомъ чертежѣ соотвѣтствующія послѣднимъ результатамъ вычисленія парабол, моментовъ и прямыхъ усилій. Складывая ординаты соотвѣтствующихъ параболъ перваго и втораго разсмотрѣнія, получимъ новую параболу, ординаты которой и будутъ изображать моменты, производимые подвижнымъ грузомъ и собственнымъ вѣсомъ моста. То же самое относится и къ полученію прямыхъ вертикальныхъ или иныхъ сѣкущихъ усилій.

Способъ этотъ довольно сложенъ по причинѣ многочисленныхъ вычисленій и большаго числа получаемыхъ линій для опредѣленія напряженій.

Стараясь разрѣшить означенную задачу въ формѣ частнаго случая теоріи неразрѣзныхъ фермъ, я достигъ конечнаго результата значительно скорѣе, проще и, какъ мнѣ кажется, путемъ болѣе правильнымъ. Употребленный мною способъ разсчета, который я поясню ниже, сколько мнѣ извѣстно, до сихъ поръ никѣмъ еще не предлагался. Я употребилъ его въ первый разъ при составленіи разсчета заданнаго мнѣ профессоромъ П. П. Панаевымъ проекта моста и вслѣдствіе требованія его представить такой разсчетъ полуразрѣзныхъ фермъ, въ которомъ окончательныя усилія опредѣлялись бы прямо, а не путемъ сложенія каждый разъ частныхъ усилій, изъ которыхъ одно ктому же составляетъ условіе чисто воображаемое, такъ какъ невѣсомой балки нѣтъ въ природѣ и существованіе ея невозможно.

Предлагаемый мною способъ даетъ возможность ограничиться для каждаго случая вычерчиваніемъ одной кривой, такъ какъ въ немъ дается аналитическое выраженіе той параболы и той прямой, которыя получались при общеупотребительномъ способѣ сложеніемъ ординатъ параболъ и прямыхъ для воображаемыхъ случаевъ.

Означимъ чрезъ:

l — длину пролета,

M — величину обратныхъ моментовъ надъ опорами,

M_x — сгибающій моментъ въ произвольномъ сѣченіи отъ опоры,

A — сѣкущее усиліе у опоръ,

x — разстояніе разсматриваемаго сѣченія отъ лѣвой опоры,

p' — нагрузку пролета на единицу длины, включая собственный вѣсъ моста и подвижной грузъ.

Основныя уравненія разсчета неразрѣзныхъ фермъ по Клапейрону будутъ слѣдующія:

$$l_{n-1} M_{n-2} + 2[l_{n-1} + l_n] M_{n-1} l_n + M_n =$$

$$= \frac{1}{4} p'_{n-1} l^3_{n-1} + \frac{1}{4} p'_n l^3_n \ldots\ldots \quad (a)$$

$$M_x = M_{n-1} - A_{n-1} x + p'_n \frac{x^2}{2} \ldots\ldots \quad (b)$$

$$x_{max} = \frac{A_{n-1}}{p'_n} = \frac{M_{n-1} - M_n}{p'_n l_n} + \frac{l_n}{2} \ldots\ldots \quad (c)$$

$$A_{n-1} = p'_n x_{max} \ldots\ldots \quad (d)$$

$$(M_x)_{max} = M_{n-1} - \frac{A^2_{n-1}}{2p'_n} = M_{n-1} - \frac{p_n'}{2} x^2_{max} \ldots\ldots \quad (e)$$

Число n означаетъ номеръ пролета, считая слѣва направо.

Для приложенія написанныхъ формулъ къ случаю полу-разрѣзныхъ фермъ необходимо ввести слѣдующія условія:

Въ формулѣ (a) подъ нагрузкой p' будемъ разумѣть только одинъ подвижной грузъ, который обозначимъ чрезъ p. Въ остальныхъ формулахъ величина p', замѣненная также буквою p, будетъ имѣть значеніе или вѣса одного постояннаго груза (вѣсъ фермъ, полотна и пр., т.-е. собственный вѣсъ моста) или суммы этого вѣса и подвижной нагрузки, смотря по тому, въ какихъ условіяхъ находится разсматриваемый пролетъ, т.-е. будетъ ли онъ или не будетъ нагруженъ подвижнымъ грузомъ.

Означая черезъ p_n собственно подвижную нагрузку на единицу длины пролета и черезъ q_n—вѣсъ единицы длины фермы, мы получимъ, вмѣсто прежнихъ, слѣдующія преобразованныя уравненія, приложимыя къ полу-разрѣзной системѣ, въ которыхъ, кромѣ p, p_n и q_n остальныя числа имѣютъ прежнія значенія:

$$l_{n-1}M_{n-2}+2[l_{n-1}+l_n]M_{n-1}+l_nM_n=$$

$$=\frac{1}{4}p_{n-1}l^3_{n-1}+\frac{1}{4}p_nl^3_n \ldots\ldots \quad (1)$$

$$M_x=M_{n-1}-A_{n-1}x+[p_n+q_n]\frac{x^2}{2} \ldots\ldots \quad (2)$$

$$x_{max.}=\frac{M_{n-1}-M_n}{(p_n+q_n)l_n}+\frac{l_n}{2} \ldots\ldots \quad (3)$$

$$A_{n-1}=[p_n+q_n]x_{max.} \ldots\ldots \quad (4)$$

$$(M_x)_{max}=M_{n-1}-\frac{(p_n+q_n)}{2}x^2_{max.} \ldots\ldots \quad (5).$$

Для упрощенія вычисленій послѣднимъ уравненіемъ (5) можно не пользоваться, а величину $(M_x)_{max.}$ опредѣлять по чертежу.

Уравненіе (2) даетъ величины моментовъ между опорами; оно представляетъ выраженіе параболы, у которой ось вертикальна, а параметръ $=\frac{2}{p_n+q_n}$. Положенiе этой параболы на чертежѣ опредѣляется по двумъ ординатамъ M_{n-1} и M_n и кромѣ сего извѣстно, что ось кривой вертикальна и пересѣкаетъ линiю, соединяющую опоры въ точкѣ $x_{max.}$; слѣдовательно, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ будемъ, при одинаковомъ вѣсѣ пролетовъ, имѣть, для вычерчиванiя параболы моментовъ—двѣ различныя параболы съ параметрами $\frac{2}{p_n+q_n}$ и $\frac{2}{q_n}$; но для каждаго случая положенiе оси параболы, соотвѣтствующей нагрузкѣ даннаго пролета, будетъ по отношенiю опоръ различно.

Сѣкущiя усилiя достаточно вычислять только для правой стороны лѣвой опоры и вершину полученной ординаты A_{n-1} соединять съ точкой оси $x^{овъ}$, для которой абсцисса есть $x_{max.}$; отрѣзокъ этой прямой на вертикальной линiи, проходящiй черезъ правую опору, будетъ изображать сѣкущее усилiе съ лѣвой стороны правой опоры.

Замѣтимъ, что достаточно вычислить по одному сѣкущему усилiю для каждой изъ параболъ съ различными параметрами; остальныя же—опредѣляются по чертежу, пользуясь тѣмъ свойствомъ прямыхъ сѣкущихъ усилiй, что они для равныхъ параболъ соотвѣтственно параллельны и пересѣкаютъ ось $x^{овъ}$ въ точкѣ $x_{max.}$.

Инженеръ-механикъ *Ив. Кокоревъ*.