УДК 519.234 EDN: BEIMRT

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ В ОБОБЩЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

В.Б. Горяинов vb-goryainov@bmstu.ru
М.М. Масягин masyagin@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

На протяжении последних трех десятилетий значительное внимание уделяется созданию математических моделей высоких порядков и исследованию их теоретических свойств. Одним из наиболее распространенных примеров является обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель Озаки, которая активно используется в моделировании медицинских, экономических и механических процессов. Кроме того, указанная модель является стандартом для генерации тестовых данных для искусственных нейронных сетей, способных по ряду прошлых значений случайной величины предсказать ее новые значения. Выполнен расчет асимптотической ковариационной матрицы оценки наименьших модулей в модели Озаки путем разложения функции ее ошибок по формуле Тейлора. Проведен сравнительный анализ скорости приближения отдельных реализаций модели к ее асимптотическому поведению при различных распределениях обновляющего процесса: нормального распределения и загрязненного нормального распределения, распределения Стьюдента и распределения Лапласа, логистического распределения. Научная новизна работы заключается в определении асимптотической ковариационной матрицы оценки наименьших модулей модели Озаки, а практическая значимость — в использовании результатов сравнения для выбора этой модели в инженерных расчетах

Ключевые слова

Обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель, метод наименьших модулей, асимптотическая ковариационная матрица, разложение в ряд Тейлора

Поступила 03.04.2024
Принята 15.05.2024

Введение. Современные аппаратные вычислительные системы вследствие бурного развития и снижения цены способствуют усложнению методов математического моделирования и увеличению числа их параметров.

Это ведет к повышению точности получаемых с их использованием прогнозов. В настоящее время модели высоких порядков применяют наравне с нейронными сетями и другими алгоритмами машинного обучения в перспективных направлениях науки и инженерии, например, в экономике [1, 2], биоинформатике [3–5] и др. Одна из таких моделей — обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель (модель Озаки) [6] и ее различные модификации [7–9]. Следует отметить, что модель Озаки — стандарт для генерации тестовых данных для искусственных нейронных сетей типа RNN и Transformer [10, 11].

Несмотря на возрождение интереса к классическим математическим моделям высоких порядков, они еще недостаточно изучены. Часто их применяют для решения конкретных практических задач, при этом их важные теоретические аспекты упускаются из виду или игнорируются. Такие свойства, как условия стационарности и эргодичности моделей и асимптотическое поведение их оценок, имеют большую практическую значимость, поскольку облегчают выбор модели и снижают нагрузку на вычислительные системы.

Цель работы — нахождение асимптотической ковариационной матрицы оценок наименьших модулей в модели Озаки и анализ скорости сходимости ее отдельных реализаций для различных распределений обновляющего процесса к асимптотическому поведению.

Постановка задачи. Обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель Озаки задается следующим уравнением:

$$X_t = \sum_{i=0}^{p-1} \left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2} \right) X_{t-(i+1)} + \xi_t, \tag{1}$$

где $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{p-2}, b_{p-2}, a_{p-1}, b_{p-1}, c$ — действительные параметры модели; $\xi_t,\ t = 0, 1, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющая условиям $E\xi_t = 0$, т. е. имеет нулевое математическое ожидание; $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$ — конечная дисперсия; $f_{\xi_t}(x)$ — четная функция плотности вероятности случайной величины ξ_t. Последовательность ξ_t принято называть *обновляющим* процессом.

Для краткости введем обозначения $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ и $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{p-1})$. Предположим, что процесс X_t удовлетворяет уравнению (1) и имеются n его наблюдений $X_0, \ldots, X_{n-1}$. Рассмотрим задачу оценивания параметров модели (a, b, c) по данным наблюдения. Одной из оценок является оценка наименьших модулей, определяемая как точка минимума функции

$$g(a,b,c)=\sum_{t=p}^{n}\left|X_t-\sum_{i=0}^{p-1}\left(a_i+b_ie^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}\right|.$$

Получим асимптотическую ковариационную матрицу этой оценки в модели Озаки (ковариационную матрицу оценки в модели Озаки при $n\to+\infty$).

Вычисление асимптотической ковариационной матрицы. Введем обозначение

$$x_t(a,b,c)=X_t-\sum_{i=0}^{p-1}\left(a_i+b_ie^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}. \qquad (2)$$

Вычисление асимптотической ковариационной матрицы проведем в соответствии с приведенным алгоритмом.

1. Свернем функцию $|x|$ с последовательностью $f_m(x)$ бесконечно дифференцируемых функций, сходящихся при $m\to\infty$ к δ-функции Дирака $\delta_0(x)$ в нуле, и покажем, что $h_m(x)=\left(|x|*f_m(x)\right)(x)$ сходится равномерно к $|x|$ при $m\to\infty$, тем самым сгладив функцию $|x|$. Таким образом, докажем, что $g_m(a,b,c)=\sum_{t=p}^{n}h_m(x_t(a,b,c))$ сходится равномерно к $g(a,b,c)$ при $m\to\infty$. Следствием этого является совпадение асимптотических распределений минимумов этих функций. В дальнейшем можно рассматривать функцию $g_m(a,b,c)$ вместо исходной функции $g(a,b,c)$. Необходимость выполнения этого действия вызвана тем, что функция $g(a,b,c)$ не является дифференцируемой ввиду наличия модуля, что делает невозможным ее разложение по формуле Тейлора.

2. Аппроксимируем функцию $g_m(a,b,c)$ ее разложением по формуле Тейлора в окрестности фиксированной точки $\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$ до второго порядка включительно и явно вычислим вектор и матрицу коэффициентов разложения.

3. Наложим на модель (1) ограничения стационарности и эргодичности. С учетом этих допущений вычислим предельные значения вектора и матрицы коэффициентов разложения по формуле Тейлора из п. 2 при $n\to\infty$.

4. Найдем асимптотическое распределение точки минимума квадратичной формы, входящей в разложение по формуле Тейлора из п. 2,

и покажем, что оно совпадает с асимптотическим распределением точки $\left(\hat{a},\hat{b},\hat{c}\right)$ минимума функции $g_m(a,b,c)$. Получим выражение асимптотической ковариационной матрицы оценок наименьших модулей в модели Озаки.

Свертка. В качестве последовательности функций, с которыми будет происходить свертка, возьмем последовательность $f_m(x)=\dfrac{me^{-m^2x^2}}{\sqrt{\pi}}$. Тогда $h_m(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_m(x-y)dy,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ +\infty.$ Покажем, что $h_m(x)\to|x|$ при $m\to\infty$. Для этого вычислим

$$h_m(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_m(x-y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_m(x-y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{me^{-m^2(x-y)^2}}{\sqrt{\pi}}dy=\left\{z=x-y\Rightarrow y=x-z\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-z|\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}(-dz)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-z|\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz=$$

$$=\left\{z<x\text{ или }z\ge x\right\}=\int\limits_{-\infty}^{x}(x-z)\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz+$$

$$+\int\limits_{x}^{+\infty}(-1)(x-z)\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz=\int\limits_{-\infty}^{x}x\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz-\int\limits_{-\infty}^{x}z\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz+$$

$$+\int\limits_{x}^{+\infty}z\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz-\int\limits_{x}^{+\infty}x\frac{me^{-m^2z^2}}{\sqrt{\pi}}dz=$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\operatorname{erf}(mx)+\frac{1}{2m\sqrt{\pi}e^{(mx)^2}}+\frac{1}{2m\sqrt{\pi}e^{(mx)^2}}-$$

$$-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\operatorname{erf}(mx)=\frac{m\sqrt{\pi}x\ \operatorname{erf}(mx)e^{(mx)^2}+1}{m\sqrt{\pi}e^{(mx)^2}}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m\sqrt{\pi}x\ \operatorname{erf}(mx)e^{(mx)^2}+1}{m\sqrt{\pi}e^{(mx)^2}}=\left\{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{e^{(mx)^2}}\to 0\right\}=\lim_{m\to\infty}\frac{m\sqrt{\pi}x\ \operatorname{erf}(mx)}{m\sqrt{\pi}}=$$

$$=\left\{x>0\Rightarrow\operatorname{erf}(mx)\to 1,\ x=0\Rightarrow\operatorname{erf}(mx)\to 0,\ x<0\Rightarrow\operatorname{erf}(mx)\to -1\right\}=|x|.$$

Действительно, $h_m(x) \to |x|$ при $m \to \infty$, значит и $g_m(a,b,c) = \sum_{t=p}^{n} h_m\left(x_t(a,b,c)\right) \to g(a,b,c)$ при $m \to \infty$. Следовательно, далее можно работать с дифференцируемой функцией $g_m(a,b,c)$ вместо недифференцируемой функции $g(a,b,c)$.

Аппроксимация разложением по формуле Тейлора. Разложим функцию $g_m(a,b,c)$ по формуле Тейлора в окрестности фиксированной точки $\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$ до второго порядка включительно:

$$g_m(a,b,c) = g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right) + A^{\mathrm{т}}\Theta + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{т}}B\Theta + \varphi(a,b,c),$$

где $g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$ — значение функции $g_m(a,b,c)$ в точке $\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$; A — вектор-столбец первых производных функции $g_m(a,b,c)$ в точке $\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$; B — матрица вторых производных функции $g_m(a,b,c)$, т. е. матрица Гессе, в точке $\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$; $\Theta = \sqrt{n}\left(a-\tilde{a},\ b-\tilde{b},\ c-\tilde{c}\right)$ — вектор-столбец; $\varphi(a,b,c)$ — бесконечно малая функция при $(a,b,c) \to \left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$ более высокого порядка, чем $(a-\tilde{a})^{\mathrm{т}}(a-\tilde{a}) + \left(b-\tilde{b}\right)^{\mathrm{т}}\left(b-\tilde{b}\right) + (c-\tilde{c})^2$.

Отметим, что существуют различные варианты записи вектор-столбца A и матрицы B. Наиболее компактным будет их блочное представление, которое и будем использовать:

$$A = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a^2} & \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a \partial b} & \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a \partial c} \\ \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b \partial a} & \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b^2} & \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b \partial c} \\ \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c \partial a} & \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c \partial b} & \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c^2} \end{pmatrix}.$$

Вектор A состоит из трех блоков:

двух подвекторов размером $p \times 1$ $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a}$, $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b}$ и числа $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c}$.

Матрица B состоит из девяти блоков:

четырех подматриц размером $p \times p$ $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a^2}$, $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a \partial b} = \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b \partial a}$, $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b^2}$ и четырех подвекторов размером $p \times 1$ $(1 \times p)$ $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a \partial c} = \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c \partial a}$, $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b \partial c} = \dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c \partial b}$ и числа $\dfrac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c^2}$.

Вычислим элементы вектор-столбца A и матрицы B. Для этого покажем, что $h'_m(x_t(a,b,c)) \to \operatorname{sign}(x_t(a,b,c))$ $(h'_m(x) \to \operatorname{sign}(x))$ и $h''_m(x_t(a,b,c)) \to 2\delta\left(x_t(a,b,c)\right)$ $(h''_m(x) \to 2\delta(x))$ при $m \to \infty$ с учетом обозначения (2).

Докажем, что $h'_m(x) \xrightarrow[m \to \infty]{} \operatorname{sign}(x)$. Для удобства рассмотрим случай $x \geq 0$:

$$h'_m(x) = \frac{\partial \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y| f_m(x-y)dy}{\partial x} = \frac{\partial \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y| \dfrac{me^{-m^2(x-y)^2}}{\sqrt{\pi}} dy}{\partial x} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|m}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial e^{-m^2(x-y)^2}}{\partial x} dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2(x-y)^2} \frac{\partial\left(-m^2(x-y)^2\right)}{\partial x} dy - \frac{2m^3}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|(x-y)e^{-m^2(x-y)^2} dy =$$

$$= \left\{ t = m(y-x) \Rightarrow dt = dmy,\ y = \frac{t+mx}{m} \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t+mx| te^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{-mx}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + mx \int\limits_{-mx}^{+\infty} te^{-t^2} dt - \int\limits_{-\infty}^{-mx} (t+mx) te^{-t^2} dt \right) = \{ m \to \infty,\ x \geq 0 \} \to$$

$$\to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + (+\infty)x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt - \int\limits_{-\infty}^{-\infty} (t + (+\infty)x) te^{-t^2} dt \right) =$$

$$= \left\{ te^{-t^2}(t) = -te^{-t^2}(-t),\ \left(l\left(-\infty, -\infty\right) \right) = 0 \right\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \left\{ t^2 e^{-t^2} = t^2 e^{-\alpha t^2} = -\frac{\partial e^{-\alpha t^2}}{\partial t},\ \alpha = 1 \right\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt}{\partial \alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}}{\partial \alpha} = 1.$$

Рассмотрим случай $x < 0$:

$$h'_m(x) = \ldots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-mx}(-1)(t+mx)te^{-t^2}dt + \int_{-mx}^{+\infty}(t+mx)te^{-t^2}dt\right) =$$

$$= \{m \to \infty,\ x < 0\} \to$$

$$\to \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{+\infty}^{+\infty}(t+(+\infty)x)te^{-t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt - (+\infty)x\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt\right) =$$

$$= \ldots = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt = \ldots = -1.$$

Показано, что $h'_m(x_t(a,b,c)) \to \operatorname{sign}(x_t(a,b,c))$ при $m \to \infty$.

Докажем, что $h''_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x)$, т. е. $\operatorname{sign}'(x) = 2\delta(x)$. Рассмотрим функцию $\operatorname{sign}(x)$ с позиции теории обобщенных функций — ее обобщенная производная над векторным пространством основных функций $\gamma(x)$ может быть выражена как

$$(\operatorname{sign}'(x),\ \gamma(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sign}(x)\gamma'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty}\gamma'(x)dx - \int_{0}^{+\infty}\gamma'(x)dx =$$

$$= -2\int_{0}^{+\infty}\gamma'(x)dx = 2\gamma(0).$$

Отметим следующее свойство δ-функции Дирака $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-y)\gamma(x)dx = \gamma(y)$, следовательно, $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)(2\gamma(x))\,dx = 2\gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}(2\delta(x))\gamma(x)\,dx$. Это доказывает, что $\operatorname{sign}(x) = 2\delta(x)$. Таким образом, $h''_m(x_t(a,b,c)) \to \to 2\delta(x_t(a,b,c))$ при $m \to \infty$.

Временно обозначим a_i, b_i, c за p, тогда

$$\frac{\partial h_m(x_t(a,b,c))}{\partial p_i} =$$

$$= \frac{\partial h_m(x_t(a,b,c))}{\partial x_t(a,b,c)}\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i} \xrightarrow[m\to\infty]{} \operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) \times \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial p_i \partial p_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{\partial\left(\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))\dfrac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i}\right)}{\partial p_j} =$$

$$= \frac{\partial \operatorname{sign}(x_t(a,b,c))}{\partial p_j}\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i} + \operatorname{sign}(x_t(a,b,c))\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial p_i \partial p_j} =$$

$$= 2\delta(x_t(a,b,c))\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i}\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_j} + \operatorname{sign}(x_t(a,b,c))\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Можно перейти к вычислению первых и вторых производных функции $g_m(a,b,c)$, для чего определим производные функции $x_t(a,b,c)$:

$$\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial a_i} = \frac{\partial\left(X_t - \sum\limits_{i=0}^{p-1}\left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}\right)}{\partial a_i} = -X_{t-(i+1)},$$

$$\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial b_i} = \frac{\partial\left(X_t - \sum\limits_{i=0}^{p-1}(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2})X_{t-(i+1)}\right)}{\partial b_i} = -X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial c} = \frac{\partial\left(X_t - \sum\limits_{i=0}^{p-1}(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2})X_{t-(i+1)}\right)}{\partial c} =$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial - X_{t-(i+1)}}{\partial a_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial b_j} = \frac{\partial - X_{t-(i+1)}}{\partial b_j} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial c} = \frac{\partial - X_{t-(i+1)}}{\partial c} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial b_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{\partial - X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}}{\partial b_j} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial c} = \frac{\partial - X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}}{\partial c} = X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial c \partial a_j} = \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial c} = 0, \ \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial c \partial b_j} = \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial c} =$$

$$= X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial^2 c} = \frac{\partial \sum\limits_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}}{\partial c} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^4 e^{-cX_{t-1}^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial h_m(x_t(a,b,c))}{\partial a_i} \xrightarrow[m\to\infty]{} -\operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)},$$

$$\frac{\partial h_m(x_t(a,b,c))}{\partial b_i} \xrightarrow[m\to\infty]{} -\operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial h_m(x_t(a,b,c))}{\partial c} \xrightarrow[m\to\infty]{} \operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial a_i \partial a_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial a_i \partial b_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial a_i \partial c} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial b_i \partial a_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial b_i \partial b_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} X_{t-(j+1)} e^{-cX_{t-1}^2} =$$

$$= 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-2cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial b_i \partial c} \xrightarrow[m\to\infty]{} -2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} +$$

$$+\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial c\partial a_j}=\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial a_i\partial c}\xrightarrow[m\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[m\to\infty]{}2\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}\sum_{j=0}^{p-1}b_j X_{t-(j+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial c\partial b_j}=\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial b_i\partial c}\xrightarrow[m\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[m\to\infty]{}2\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}\sum_{j=0}^{p-1}b_j X_{t-(j+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}+$$

$$+\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 h_m(x_t(a,b,c))}{\partial^2 c}\xrightarrow[m\to\infty]{}2\delta(x_t(a,b,c))\left(\sum_{i=0}^{p-1}b_i X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}\right)^2-$$

$$-\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))\sum_{i=0}^{p-1}b_i X_{t-(i+1)}X_{t-1}^4 e^{-cX_{t-1}^2}.$$

С учетом вычисленных производных и $g_m(a,b,c)=\sum\limits_{t=p}^{n}h_m(x_t(a,b,c))$ получим:

$$\frac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial a_i}\xrightarrow[m\to\infty]{}-\sum_{t=p}^{n}\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)},$$

$$\frac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial b_i}\xrightarrow[m\to\infty]{}-\sum_{t=p}^{n}\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial g_m(a,b,c)}{\partial c}\xrightarrow[m\to\infty]{}\sum_{t=p}^{n}\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))\sum_{i=0}^{p-1}b_i X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial a_i\partial a_j}\xrightarrow[m\to\infty]{}2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-(j+1)},$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial a_i\partial b_j}\xrightarrow[m\to\infty]{}2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-(j+1)}e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial a_i\partial c}\xrightarrow[m\to\infty]{}-2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}\sum_{j=0}^{p-1}b_j X_{t-(j+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial b_i \partial a_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\sum_{t=p}^{n} \delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial b_i \partial b_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-2cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial b_i \partial c} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\sum_{t=p}^{n} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} - \right.$$

$$\left. - \delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial c \partial a_j} \xrightarrow[m\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[m\to\infty]{} -2\sum_{t=p}^{n} \delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial c \partial b_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\sum_{t=p}^{n} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} - \right.$$

$$\left. - \delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 g_m(a,b,c)}{\partial^2 c} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\left(\delta(x_t(a,b,c)) \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^4 e^{-cX_{t-1}^2} \right).$$

Таким образом, получили формальное выражение всех элементов блочных вектор-столбца A и матрицы B.

Ограничения эргодичности и стационарности. Будем полагать, что рассматриваемая модель (1) является стационарной и эргодической. Условиями этого являются [12]:

– $c > 0$ — в противном случае множитель $e^{-cX_{t-1}^2}$ устремится к бесконечности;

– все корни характеристического уравнения $\lambda^p - a_0\lambda^{p-1} - \ldots - a_{p-1} = 0$ расположены в единичной окружности, т. е. $|a_i| < 1$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Следствие стационарности и эргодичности модели — существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} B$. Найдем его.

Следует отметить, что далее множитель $1/n$ вносится в пределы для того, чтобы можно было применять центральную предельную теорему, также используется тот факт, что произведением стационарных и эргодических последовательностей является стационарная и эргодическая последовательность [13]. Кроме того, учитывается $E\,\mathrm{sign}(x_t(a,b,c))=0$, так как функция $\mathrm{sign}(x)$ нечетная, а рассматриваемые функции плотности распределения вероятности предполагаются четными:

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial a_i \partial a_j} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-(j+1)} =$$

$$= 2E\delta(x_t(a,b,c))EX_0X_{i-j},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial a_i \partial b_j} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-(j+1)}e^{-cX_{t-1}^2} =$$

$$= 2E\delta(x_t(a,b,c))EX_0X_{i-j}e^{-cX_i^2},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial a_i \partial c} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}\sum_{j=0}^{p-1}b_jX_{t-(j+1)}X_{t-1}^2e^{-cX_{t-1}^2} =$$

$$= -2E\delta(x_t(a,b,c))\sum_{j=0}^{p-1}b_jEX_0^2X_j^2e^{-cX_j^2};$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial b_i \partial a_j} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2\sum_{t=p}^{n}\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-(j+1)}e^{-cX_{t-1}^2} =$$

$$= 2E\delta(x_t(a,b,c))EX_0X_{i-j}e^{-cX_i^2},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial b_i\, \partial b_j} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2\delta(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}X_{t-(j+1)}e^{-2cX_{t-1}^2} =$$

$$= 2E\delta(x_t(a,b,c))EX_0X_{i-j}e^{-2cX_i^2},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial b_i \partial c} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 2 \sum_{t=p}^{n} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} - \right.$$

$$\left. - \delta(x_t(a,b,c)) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} \right) =$$

$$= -2E\delta(x_t(a,b,c)) \sum_{j=0}^{p-1} b_j E X_j^2 X_0^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)}{\partial c \partial a_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)}{\partial a_i \partial c} =$$

$$= -2E\delta(x_t(a,b,c)) \sum_{j=0}^{p-1} b_j E X_0^2 X_j^2 e^{-cX_j^2},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)}{\partial c \partial b_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)}{\partial b_i \partial c} =$$

$$= -2E\delta(x_t(a,b,c)) \sum_{j=0}^{p-1} b_j E X_j^2 X_0^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g_m\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right)}{\partial^2 c} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 2 \left(\delta(x_t(a,b,c)) \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x_t(a,b,c)) \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^4 e^{-cX_{t-1}^2} \right) =$$

$$= 2E\delta(x_t(a,b,c)) \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)}^2 X_{t-1}^4 e^{-2cX_{t-1}^2} \right)^2 =$$

$$= 2E\delta(x_t(a,b,c)) \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_0^2 X_i^4 e^{-2cX_i^2} \right)^2.$$

Получаем, что по вероятности $\lim\limits_{n\to\infty} B = 2E\delta(x_t(a,b,c))K$, где элементы матрицы K — соответствующие пределы производных, разделенных на n.

Следовательно,

$$g_m(a,b,c) = g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right) + A^{\text{т}}\Theta + \Theta^{\text{т}}\left(E\delta(x_t(a,b,c))\right)K\Theta + \varphi(a,b,c).$$

Поиск асимптотического распределения точки минимума целевой функции. Покажем, что асимптотическое распределение точки $\left(\hat{a},\hat{b},\hat{c}\right)$ минимума функции $g_m(a,b,c)$ совпадает с асимптотическим распределением точки минимума квадратичной формы

$$A^{\text{т}}\Theta + \Theta^{\text{т}}\left(E\delta(x_t(a,b,c))\right)K\Theta.$$

Введем погрешность вычисления истинных значений X_t:

$$E_t = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)} + \xi_t\right) - \left(\hat{a}_i + \hat{b}_i e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}.$$

Зададим функцию ошибки: $L_m\left(\hat{a},\hat{b},\hat{c}\right) = \sum_{t=p}^{n}\left(h_m(E_t) - h_m(\xi_t)\right)$.

Выполним замену $\widehat{\Theta} = \sqrt{n}\left(\hat{a}-a, \hat{b}-b, \hat{c}-c\right)$ и разложим $L\left(\hat{a},\hat{b},\hat{c}\right)$ в ряд Тейлора. Используем формулу разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого порядка:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-x_0)^2 =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}(f''(\tilde{x}) - f''(x_0))(x-x_0)^2.$$

Очевидно, что первые и вторые производные функции $L(\widehat{\Theta})$ с точностью до обозначений совпали с первыми и вторыми производными функции $g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)$.

Получим, что

$$L(\widehat{\Theta}) = A^{\text{т}}\widehat{\Theta} + \frac{1}{2}\widehat{\Theta}^{\text{т}}B\widehat{\Theta} + \beta(\widehat{\Theta}) = A^{\text{т}}\widehat{\Theta} + \widehat{\Theta}^{\text{т}}E\delta(\xi_t)K\widehat{\Theta} + \beta(\widehat{\Theta}),$$
$$\beta(\widehat{\Theta}) = \widehat{\Theta}^{\text{т}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(\widetilde{\Theta}) - \frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(0)\right)\widehat{\Theta},$$

где $\widetilde{\Theta} \in \left[0, \widehat{\Theta}\right]$. Покажем $\beta(\widehat{\Theta}) \to 0$ при $n \to \infty$, для чего достаточно вычислить покоординатные значения элементов матрицы

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \widehat{\Theta}^2}(\widetilde{\Theta}) - \frac{\partial^2 L}{\partial \widehat{\Theta}^2}(0)\right)$$

с учетом стационарности и эргодичности X_t и ξ_t и равенства их нулю, величина $\widehat{\Theta}$ $(\widehat{\Theta}^{\text{т}})$ конечна. Это доказывает, что $\beta(\widehat{\Theta}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Получили, что $E\,|\,\beta(\widehat{\Theta})\,| \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $\beta(\widehat{\Theta}) \to 0$ при $n \to \infty$ по вероятности.

Пусть $\widetilde{\Theta}$ — минимум функции $\widetilde{L}(\Theta) = A^{\text{т}}\Theta + \Theta^{\text{т}}\frac{1}{2}W\Theta$, где $W = 2E\delta(\xi_t)K$. Покажем, что $E\delta(\xi_t) = f_{\xi_t}(0)$, для чего представим $E\delta(\xi_t)$ в виде интеграла: $E\delta(\xi_t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f_{\xi_t}(x)dx = f_{\xi_t}(0)$.

С учетом того, что $W = 2E\delta(\xi_t)K = 2f_{\xi_t}(0)K < +\infty$ и $\widetilde{L}(\Theta)$ — квадратичная форма, очевидно, $\widetilde{\Theta} = -W^{-1}A = -\dfrac{1}{2f_{\xi_t}(0)}K^{-1}A$.

Покажем, что $E(\operatorname{sign}(\xi_t)) = 0$, для чего представим $E(\operatorname{sign}(\xi_t))$ в виде интеграла:

$$E(\operatorname{sign}(\xi_t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x) f_{\xi_t}(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} (-1) f_{\xi_t}(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\xi_t}(x)dx = \left\{ f_{\xi_t}(x) = f_{\xi_t}(-x) \right\} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Поскольку $E(\operatorname{sign}(\xi_t)) = 0$ и $\operatorname{sign}(\xi_t)$ независимы от X_t, то $E\left[\operatorname{sign}(\xi_t)X_t \,|\, \mu_{t-1}\right] = 0$, где μ_t — последовательность σ-алгебр, порожденных множеством ξ_s, $s \le t$. Последовательность $\operatorname{sign}(\xi_t)X_t$, $t = 1, 2, \ldots$, образует мартингал-разность относительно последовательности σ-алгебр. В силу центральной предельной теоремы для мартингалов [14] вектор A асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $KE\left[\operatorname{sign}^2(\xi_t)\right]$. В результате этого случайная величина $\widetilde{\Theta} = -W^{-1}A$ является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием, причем ее ковариационная матрица

$$\frac{E\left[\operatorname{sign}^2(\xi_t)\right]}{4\left[E\delta(\xi_t)\right]^2}K^{-1} = \frac{1}{4f_{\xi_t}^2(0)}K^{-1}.$$

Следовательно, необходимо доказать, что $\widehat{\Theta}-\widetilde{\Theta}\to 0$ по вероятности.

Для доказательства введем произвольный параметр $\delta>0$ и покажем, что $P\left[\,|\widehat{\Theta}-\widetilde{\Theta}|\,\right]\le\delta\to 1$. Для этого зафиксируем некоторый параметр δ [15]. Поскольку $\widetilde{\Theta}$ асимптотически нормальна, она также и ограничена по распределению, следовательно, существует компакт $C\in\mathbb{R}^n$ с вероятностью, бесконечно близкой к единице, который содержит для всех n шары с центром в $\widetilde{\Theta}$ и радиусом δ.

В соответствии с законом больших чисел $B\to W$ при $n\to\infty$, следовательно, $L(\Theta)-\tilde{L}(\Theta)\to 0$ по вероятности при $n\to\infty$, поэтому функция $L(\Theta)+A^{\mathrm{T}}\to\dfrac{1}{2}\Theta^{\mathrm{T}}W\Theta$ выпуклая при $n\to\infty$. Таким образом, $\beta(\widetilde{\Theta})\to 0$ равномерно на любом компакте. Отсюда по [16] $\Delta=\sup_{\Theta\in C}\left|\beta(\widetilde{\Theta})\right|\to 0$ по вероятности при $n\to\infty$.

Пусть e — произвольный нормированный вектор, такой что выполняются равенства $\Theta^{*}=\widetilde{\Theta}+\delta e$, $\Theta=\widetilde{\Theta}+te$, $t>\delta$. Тогда из выпуклости $L(\Theta)$ получим, что $L(\Theta^{*})\ge(1-\delta/t)L(\widetilde{\Theta})+(\delta/t)L(\Theta)$, следовательно,

$$L(\Theta)\ge L(\widetilde{\Theta})+\frac{t}{\delta}(L(\Theta^{*})-L(\widetilde{\Theta}))\ge L(\widetilde{\Theta})+\frac{t}{\delta}(\tilde{L}(\Theta^{*})-\tilde{L}(\widetilde{\Theta}))+\beta(\Theta^{*})-\beta(\widetilde{\Theta}).$$

Очевидно, что матрица W является положительно определенной, поэтому $\tilde{L}(\Theta^{*})-\tilde{L}(\widetilde{\Theta})=\dfrac{1}{2}\delta^{2}e^{\mathrm{T}}We>0$ и

$$\inf_{\Theta\notin C}L(\Theta)=L(\widetilde{\Theta})+\inf_{t>\delta}\frac{t}{\delta}(L(\Theta^{*})-L(\widetilde{\Theta}))\ge L(\widetilde{\Theta})+\frac{1}{2}\delta^{2}e^{\mathrm{T}}We-2\Delta.$$

Поэтому с единичной вероятностью минимум $L(\Theta)$ лежит внутри компакта C, а минимум функции $g_m(a,b,c)$ действительно совпадает с минимумом квадратичной формы и является асимптотически нормально распределенным.

Для того чтобы найти асимптотическое распределение случайного вектора $-\dfrac{1}{2f_{\xi_t}(0)}K^{-1}A$ докажем, что его составляющая — вектор A — является асимптотически нормальной, т. е. сходится к нормальному случайному вектору при $n\to\infty$ по распределению.

Пусть A_t — σ-алгебра событий, порожденная множеством $\left\{X_s,\, s\le t\right\}$. Вследствие этого X_{t-1} измерима относительно A_{t-1}.

С учетом того, что ξ_t не зависит от A_t имеем $E\left[\xi_t X_{t-1} \mid A_{t-1}\right]=$ $= X_{t-1}E\left[\xi_t \mid A_{t-1}\right] = X_{t-1}E\xi_t = 0$ по аналогии с [17]. Кроме того, за счет $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$ получаем $EX_{t-1}^2 < +\infty$, следовательно, согласно центральной предельной теореме для мартингалов [18], последовательности

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial a_i},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial b_i},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g_m\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial c}$$

являются нормальными.

Случайные величины X_{t-1} и ξ_t независимы и $E(\operatorname{sign}(\xi_t)) = 0$, поэтому

$$E\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial a_i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n} E\left[\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))X_{t-(i+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n} E\operatorname{sign}(x_t(a,b,c))EX_{t-(i+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n} 0\ EX_{t-(i+1)} = 0.$$

По аналогии

$$E\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial c} = 0.$$

С учетом $E(\operatorname{sign}^2(\xi_t)) = 1$ найдем соответствующие дисперсии:

$$D\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial a_i} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n} E\left[\xi_t X_{t-(i+1)}\right]\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=p}^{n} E\left[\xi_t X_{t-(i+1)}\right]^2 = EX_0^2.$$

Аналогично

$$D\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial b_i} = EX_0^2 e^{-2cX_0^2},\ D\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)}{\partial c} = \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i\right)^2 EX_0^6 e^{-2cX_0^2}.$$

Таким образом, во всех случаях получаем нулевое математическое ожидание и конечные дисперсии, которые могут быть определены по приведенным выше формулам.

По аналогии находим пределы математических ожиданий попарных произведений элементов вектор-столбца A.

После вычисления дисперсий и математических ожиданий может быть сделан вывод, что случайный вектор A является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей K. Следовательно, асимптотическая ковариационная матрица вектора $-\frac{1}{2f_{\xi_t}(0)}K^{-1}A$ равна $\frac{1}{4f_{\xi_t}^2(0)}K^{-1}$ [19]. С учетом совпадения асимптотического распределения $-\frac{1}{2f_{\xi_t}(0)}K^{-1}A$ с асимптотическим распределением точки минимума функции $g_m(a,b,c)$ получаем, что асимптотическая ковариационная матрица обобщенной экспоненциальной авторегрессионной модели Озаки для метода наименьших модулей (МНМ) имеет вид

$$\frac{1}{4f_{\xi_t}^2(0)}K^{-1}. \tag{3}$$

Компьютерный эксперимент. Полученное формальное выражение асимптотической ковариационной матрицы авторегрессионной модели Озаки позволяет провести сравнение теоретических и практических значений дисперсии ее коэффициентов. Первые равны диагональным элементам матрицы (3), вторые — непосредственным дисперсиям коэффициентов модели Озаки, которые найдены заданным оптимизационным методом, минимизирующим функцию абсолютных потерь.

Предположим, что имеется процесс X_t, удовлетворяющий уравнению (1) первого порядка, и известны свойства его обновляющего процесса ξ_t, также имеются n наблюдений X_n. На основе этих данных с использованием оптимизационного метода получим оценки коэффициентов a_0, b_0, c и вычислим их дисперсии относительно истинных значений коэффициентов. Определим теоретические значения дисперсий с использованием асимптотической ковариационной матрицы процесса X_t. Сравнением по модулю практических и теоретических значений дисперсий для различного числа наблюдений вычислим, какого числа наблюдений будет достаточно, чтобы МНМ дал результат, практическая точность которого будет достигать теоретической.

Следует отметить, что поиск коэффициентов модели Озаки с использованием алгоритмов безусловной оптимизации — вычислительно сложная задача. В связи с этим в качестве примера рассмотрены только модели первого порядка, причем их коэффициент c рассчитан с применением одномерного сеточного метода (перебор значений c в заданном диапазоне с фиксированным шагом). Таким образом, в результате будет выполнено сравнение теоретических и реальных дисперсий только для коэффициентов a_0 и b_0.

Вектор X_n для вычисления коэффициентов методом оптимизации сгенерируем 1000 раз со следующими начальным условием и параметрами: $x_0 = 2{,}0$, $a_0 = 0{,}1$, $b_0 = -0{,}9$, $c = 5{,}0$, $n = 5, 10, 25, 50, 75, 100, 150, 200, 250$. Выбор подобных значений параметров a_0 и b_0 обусловлен желанием сделать их максимально независимыми.

В качестве обновляющего процесса ξ_t используем следующие распределения:

– классическое гауссово

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

– загрязненное гауссово

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(1-\gamma) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/(2\tau^2)}\gamma,$$

– Стьюдента

$$f(x) = \frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{m\pi}\Gamma(2m)\left(1+\dfrac{x^2}{m}\right)^{(m+1)/2}},$$

– Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|},$$

– логистическое

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Их значения получим с использованием датчика случайных чисел библиотеки *NumPy* языка программирования *Python*.

Оценку параметров будем проводить с использованием алгоритма безусловной оптимизации Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шенно (BFGS) [20].

Теоретические значения дисперсии коэффициента b_0 при различных значениях ξ_t приведены в табл. 1, модули разностей значений теоретической и выборочной дисперсии — в табл. 2. Для краткости значения для дисперсии коэффициента a_0 здесь не приведены.

Погрешность метода статистических испытаний и погрешность МНМ приводят к широкому разбросу значений в таблицах. Тем не менее они наглядно демонстрируют, что МНМ быстрее сходится в случае распределений, близких к нормальному.

Таблица 1

Теоретические значения дисперсии коэффициента b_0

ξ_t	n								
	5	10	25	50	75	100	150	200	250
Нормальное	239,05	194,44	174,51	169,65	167,90	166,67	165,82	165,47	165,23
Загрязненное нормальное:									
$\gamma = 0{,}01$, $\tau = 3$	234,00	196,37	176,66	170,68	168,73	168,00	166,76	66,29	166,12
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 10$	234,36	197,52	177,86	171,55	169,63	168,82	167,85	167,44	167,02
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 3$	260,65	216,30	195,07	187,52	185,54	184,82	183,82	183,27	182,84
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 10$	350,60	292,16	262,87	253,55	249,77	248,53	247,61	246,85	246,21
Стьюдента:									
$m = 15$	255,12	207,82	185,45	176,26	174,81	173,54	173,00	172,83	172,62
$m = 10$	259,50	212,87	187,63	180,28	178,11	177,24	176,61	176,33	176,05
$m = 5$	275,32	222,44	201,84	193,14	190,5	189,52	189,12	188,62	188,11
$m = 4$	289,03	231,63	207,88	199,47	196,74	195,60	194,92	194,35	193,86
Лапласа	148,93	126,07	112,30	108,50	106,43	106,08	105,50	104,96	104,72
Логистическое	918,82	748,45	662,23	640,41	625,23	622,50	617,32	616,16	614,76

Таблица 2

Модули разности значений теоретической и выборочной дисперсии b_0

ξ_t	n								
	5	10	25	50	75	100	150	200	250
Нормальное	3314,24	6,55	17,37	11,78	1,10	4,44	0,49	4,22	2,80
Загрязненное нормальное:									
$\gamma = 0{,}01$, $\tau = 3$	$9{,}15 \cdot 10^5$	77,89	0,56	6,20	2,94	9,34	3,05	3,30	6,55
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 10$	254,28	0,98	6,76	8,91	2,73	5,24	3,49	0,89	8,97
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 3$	935,86	35,66	25,78	34,75	41,65	40,80	42,12	38,37	33,26
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 10$	$3{,}57 \cdot 10^6$	2181,44	176,32	143,51	134,93	118,82	106,94	118,75	93,18
Стьюдента:									
$m = 15$	1978,90	5,56	21,03	10,87	23,56	18,35	0,95	7,48	2,22
$m = 10$	287,87	39,27	11,15	17,86	17,77	13,50	7,21	6,64	1,50
$m = 5$	$2{,}14 \cdot 10^5$	49,10	27,35	27,89	32,90	33,73	26,65	24,85	16,55
$m = 4$	20 979,83	182,49	37,94	16,57	22,09	20,91	25,06	10,45	11,72
Лапласа	$9{,}33 \cdot 10^5$	166,16	87,10	35,80	31,54	31,10	13,40	20,73	9,75
Логистическое	$2{,}3 \cdot 10^7$	2423,6	49,94	19,9	15,1	10,21	1,01	5,11	3,88

При дальнейшем увеличении n (и N) абсолютные значения разностей дисперсий продолжат уменьшаться, однако никогда не станут полностью нулевыми в силу указанных погрешностей метода статистических испытаний и МНМ.

Выводы. Получено выражение (3) асимптотической ковариационной матрицы экспоненциальной авторегрессионной модели Озаки для МНМ. Результаты компьютерного эксперимента показали, что теоретические оценки дисперсии параметров быстрее достигаются в случае распределений, близких к нормальному.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Katsiampa P. A new approach to modelling nonlinear time series: introducing the ExpAR-ARCH and ExpAR-GARCH models and applications. *4th Student Conf. on Operational Research*, 2014, vol. 37, pp. 34–51.
DOI: https://doi.org/10.4230/OASIcs.SCOR.2014.34

[2] Merzougui M. The periodic restricted ExpAR(1) model. In: *Recent Advances on Numerical Simulations*. IntechOpen, 2020, pp. 244–251.
DOI: https://doi.org/10.5772/intechopen.94078

[3] Xie X., Zhu Ch., Wu Di, et al. Autoregressive modeling and prediction of the activity of antihypertensive peptides. *Front. Genet.*, 2021, vol. 12, art. 801728.
DOI: https://doi.org/10.3389/fgene.2021.801728

[4] Haderlein J.F., Peterson A.D.H., Burkitt A.N., et al. Autoregressive models for biomedical signal processing. *45th Annual Int. Conf. of the IEEE EMBC*, 2023, vol. 1, pp. 1283–1294. DOI: https://doi.org/10.1109/EMBC40787.2023.10340714

[5] Najeeb A.R., Salami M., Gunawan T.S., et al. Review of parameter estimation techniques for time-varying autoregressive models of biomedical signals. *IJSPS*, 2016, vol. 4, no. 3, pp. 220–225. DOI: https://doi.org/10.18178/ijsps.4.3.220-225

[6] Ozaki T. Non-linear phenomena and time series models. *Invited paper 43 Session of the International Statistical Institute*. Buenos Aires, 1981.

[7] Ozaki T. Non-linear time series models and dynamical systems. In: Hannan E.J., Krishnaiah P.R., Rao M.M. (eds). *Handbook of Statistics*, vol. 5. Elsevier, 1985, pp. 25–83. DOI: https://doi.org/10.1016/s0169-7161(85)05004-0

[8] Oyinloye A.A., Ayodele O.J., Abifade V.O. Modeling power exponential error innovations with autoregressive process. *IJMSS*, 2023, vol. 11, no. 3, pp. 13–21.
DOI: https://doi.org/10.37745/ijmss.13/vol11n21321

[9] Chen G., Gan M., Chen G. Generalized exponential autoregressive models for nonlinear time series: stationarity, estimation and applications. *Inf. Sci.*, 2018, vol. 438, pp. 46–57. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.01.029

[10] Goracci G., Giannerini S., Chan K.-S., et al. Testing for threshold effects in the TARMA framework. *Statistica Sinica*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 1879–1901.

[11] Parker P.A., Holan S.H., Ravishanker N. Nonlinear time series classification using bispectrum-based deep convolutional neural networks. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.*, 2020, vol. 36, iss. 5, pp. 877–890. DOI: https://doi.org/10.1002/asmb.2536

[12] Chan K.S., Tong H. On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Adv. Appl. Probab.*, 1985, vol. 17, iss. 3, pp. 666–668. DOI: https://doi.org/10.2307/1427125

[13] White H. Asymptotic theory for econometricians. Emerald Group, 2001.

[14] Häusler E., Luschgy H. Stable convergence and stable limit theorems. *Probability Theory and Stochastic Modelling*, vol. 74. Cham, Springer, 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18329-9

[15] Goryainov V.B. Least-modules estimates for spatial autoregression coefficients. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 565–572. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711040101

[16] Andersen P.K., Gill R.D. Cox's regression model for counting processes: a large sample study. *Ann. Statist.*, 1982, vol. 10, iss. 4, pp. 1100–1120. DOI: https://doi.org/10.1214/aos/1176345976

[17] Крысяев Р.Ю., Рабкин Д.Л. Исследование задач о встрече случайно блуждающих частиц. *Политехнический молодежный журнал*, 2017, № 11. DOI: https://doi.org/10.18698/2541-8009-2017-11-196

[18] Billingsley P. Convergence of probability measures. *Wiley Series in Probability and Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., 1999. DOI: https://doi.org/10.1002/9780470316962

[19] Magnus J.R., Neudecker H. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. *Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons Ltd, 2019. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119541219

[20] Nocedal J., Wright S. Numerical optimization. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*. New York, NY, Springer, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5

Горяинов Владимир Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Масягин Михаил Михайлович — аспирант кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Горяинов В.Б., Масягин М.М. Вычисление асимптотической ковариационной матрицы оценки наименьших модулей в обобщенной экспоненциальной авторегрессионной модели. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 1 (118), с. 4–29. EDN: BEIMRT

CALCULATION OF THE ASYMPTOTIC COVARIANCE MATRIX OF THE GENERALIZED EXPONENTIAL AUTOREGRESSIVE MODEL FOR THE LEAST ABSOLUTE DEVIATIONS METHOD

V.B. Goryainov vb-goryainov@bmstu.ru
M.M. Masyagin masyagin@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Over the past three decades, there has been significant attention paid to the development of high-level mathematical models and the investigation of their theoretical characteristics. One notable example is the generalized exponential autoregressive (Ozaki) model, which has been actively utilized in modeling medical, economic, and mechanical phenomena. This model serves as a standard for generating training data for artificial neural networks that can predict future values based on historical data of a given variable. In this paper, we present the calculation of the asymptotic covariance matrix used to estimate the smallest eigenvalues in the Ozaki model. We achieve this by decomposing the error function of the model using Taylor formula. A comparative analysis of the convergence rate of individual implementations of a model to its asymptotic behavior has been conducted for various distributions of the updating process: normal, skewed normal, Student *t*-distribution, Laplace, and logistic. The scientific contribution of this work lies in the determination of the asymptotic covariance matrix to estimate the smallest models within the Ozaki framework, and the practical relevance lies in applying the comparison results to selecting this model for engineering calculations

Keywords

Generalized exponential autoregressive model, least absolute deviations method, asymptotic covariance matrix, Taylor series expansion

Received 03.04.2024
Accepted 15.05.2024

REFERENCES

[1] Katsiampa P. A new approach to modelling nonlinear time series: introducing the ExpAR-ARCH and ExpAR-GARCH models and applications. *4th Student Conf. on Operational Research*, 2014, vol. 37, pp. 34–51.
DOI: https://doi.org/10.4230/OASIcs.SCOR.2014.34

[2] Merzougui M. The periodic restricted ExpAR(1) model. In: *Recent Advances on Numerical Simulations*. IntechOpen, 2020, pp. 244–251.
DOI: https://doi.org/10.5772/intechopen.94078

[3] Xie X., Zhu Ch., Wu Di, et al. Autoregressive modeling and prediction of the activity of antihypertensive peptides. *Front. Genet.*, 2021, vol. 12, art. 801728.
DOI: https://doi.org/10.3389/fgene.2021.801728

[4] Haderlein J.F., Peterson A.D.H., Burkitt A.N., et al. Autoregressive models for biomedical signal processing. *45th Annual Int. Conf. of the IEEE EMBC*, 2023, vol. 1, pp. 1283–1294. DOI: https://doi.org/10.1109/EMBC40787.2023.10340714

[5] Najeeb A.R., Salami M., Gunawan T.S., et al. Review of parameter estimation techniques for time-varying autoregressive models of biomedical signals. *IJSPS*, 2016, vol. 4, no. 3, pp. 220–225. DOI: https://doi.org/10.18178/ijsps.4.3.220-225

[6] Ozaki T. Non-linear phenomena and time series models. *Invited paper 43 Session of the International Statistical Institute*. Buenos Aires, 1981.

[7] Ozaki T. Non-linear time series models and dynamical systems. In: Hannan E.J., Krishnaiah P.R., Rao M.M. (eds). *Handbook of Statistics*, vol. 5. Elsevier, 1985, pp. 25–83. DOI: https://doi.org/10.1016/s0169-7161(85)05004-0

[8] Oyinloye A.A., Ayodele O.J., Abifade V.O. Modeling power exponential error innovations with autoregressive process. *IJMSS*, 2023, vol. 11, no. 3, pp. 13–21.
DOI: https://doi.org/10.37745/ijmss.13/vol11n21321

[9] Chen G., Gan M., Chen G. Generalized exponential autoregressive models for nonlinear time series: stationarity, estimation and applications. *Inf. Sci.*, 2018, vol. 438, pp. 46–57. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.01.029

[10] Goracci G., Giannerini S., Chan K.-S., et al. Testing for threshold effects in the TARMA framework. *Statistica Sinica*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 1879–1901.

[11] Parker P.A., Holan S.H., Ravishanker N. Nonlinear time series classification using bispectrum-based deep convolutional neural networks. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.*, 2020, vol. 36, iss. 5, pp. 877–890. DOI: https://doi.org/10.1002/asmb.2536

[12] Chan K.S., Tong H. On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Adv. Appl. Probab.*, 1985, vol. 17, iss. 3, pp. 666–668. DOI: https://doi.org/10.2307/1427125

[13] White H. Asymptotic theory for econometricians. Emerald Group, 2001.

[14] Häusler E., Luschgy H. Stable convergence and stable limit theorems. *Probability Theory and Stochastic Modelling*, vol. 74. Cham, Springer, 2015.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18329-9

[15] Goryainov V.B. Least-modules estimates for spatial autoregression coefficients. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 565–572.
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711040101

[16] Andersen P.K., Gill R.D. Cox's regression model for counting processes: a large sample study. *Ann. Statist.*, 1982, vol. 10, iss. 4, pp. 1100–1120.
DOI: https://doi.org/10.1214/aos/1176345976

[17] Krysyaev R.Yu., Rabkin D.L. Investigating problems of encounters between particles performing a random walk. *Politekhnicheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical Student Journal], 2017, no. 11 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/2541-8009-2017-11-196

[18] Billingsley P. Convergence of probability measures. *Wiley Series in Probability and Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., 1999. DOI: https://doi.org/10.1002/9780470316962

[19] Magnus J.R., Neudecker H. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. *Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons Ltd, 2019. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119541219

[20] Nocedal J., Wright S. Numerical optimization. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*. New York, NY, Springer, 2006.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5

Goryainov V.B. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Masyagin M.M. — Post-Graduate Student, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Goryainov V.B., Masyagin M.M. Calculation of the asymptotic covariance matrix of the generalized exponential autoregressive model for the least absolute deviations method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 1 (118), pp. 4–29 (in Russ.). EDN: BEIMRT