

ГИБРИДНЫЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА¹

В.В. Лукин

vvlukin@gmail.com

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлен численный метод решения задач динамики сжимаемого совершенного невязкого газа в одно- и двумерной пространственных постановках. Метод использует подход разрывного метода Галеркина для аппроксимации решения по пространству и снос решения вдоль характеристик для интегрирования уравнений по времени. Такой подход позволяет избавиться от стандартной многостадийной процедуры метода Рунге — Кутты и существенно уменьшить вычислительную сложность метода. Вместо интегрирования по времени применено интегрирование потоков по пространственной области зависимости на предыдущем временном слое. Представлено обобщение метода на двумерный случай для произвольной формы ячейки сетки. Проведены тестовые расчеты на ряде одно- и двумерных задач, имеющих как гладкое, так и разрывное решение. Тесты показали, что метод обладает вторым порядком точности при использовании кусочно-линейной реконструкции решения на ячейке и третьим порядком при использовании квадратных полиномов. Метод обладает высокой разрешающей способностью и малой диссипацией, позволяет разрешать газовые неустойчивости, такие как неустойчивость Рихтмайера — Мешкова. Несмотря на высокий порядок точности, метод не требует применения специальных процедур монотонизации решения

Ключевые слова

Разрывный метод Галеркина, газовая динамика, гиперболические системы, снос по характеристике, двумерные задачи

Поступила 29.07.2024

Принята 09.01.2025

© Автор(ы), 2025

¹ Памяти заведующего кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2008–2024) д-ра техн. наук, профессора Георгия Николаевича Кувыркина (1946–2024).

Введение. Математическая модель, включающая в себя систему уравнений динамики сжимаемого совершенного невязкого газа [1], описывает многие задачи астрофизики [2], высокоскоростных течений в технических устройствах, обтекания быстро летящих в атмосфере тел. Важнейшим инструментом исследования таких моделей являются численные методы, которые должны учитывать сложный волновой характер решения уравнений газовой динамики, а также свойство переноса компонентов решения вдоль характеристик этой гиперболической системы.

Для решения первой задачи широкое применение получили приближенные решения задачи Римана о распаде разрыва и кусочно-полиномиальные реконструкции решения на ячейках расчетной сетки. Среди таких методов важное место занимает разрывный метод Галеркина [3], позволяющий повышать порядок аппроксимации без увеличения шаблона.

Разрывный метод Галеркина в комбинации с методами Рунге — Кутты для интегрирования по времени является вычислительно затратным. Это обусловлено необходимостью расчета нескольких промежуточных стадий на каждом шаге по времени, чтобы обеспечить порядок точности интегрирования по времени, аналогичный порядку по пространственным переменным. Каждая промежуточная стадия должна включать в себя процедуры индикации немонотонности [4] численного решения и его лимитирования (монотонизации) [5–8]. Даже увеличение шага по времени путем использования методов Рунге — Кутты с расширенной областью устойчивости [9, 10] принципиально не решает эту проблему.

Учет сноса решения системы уравнений газовой динамики вдоль характеристик, позволяющий получать эффективные численные методы для одномерных задач, осложняется в многомерном случае, однако он позволяет получать высокое разрешение разрывов и строить явные по времени методы высокого порядка. Рассмотрен гибридный метод решения задач газовой динамики в одно- и двумерной постановках на основе разрывного метода Галеркина, позволяющий избежать применения методов Рунге — Кутты за счет использования характеристических свойств системы уравнений газовой динамики [11].

Система уравнений газовой динамики. Система уравнений газовой динамики включает в себя следующие уравнения [12, 13]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \hat{I}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}(e+p)) = 0, \quad (3)$$

где ρ — плотность; $\vec{v} = (u, v, w)^T$ — скорость; p — давление; e — полная энергия единицы объема,

$$e = \frac{\rho \|\vec{v}\|^2}{2} + \rho \varepsilon,$$

ε — удельная внутренняя энергия; \hat{I} — единичный тензор; знак \otimes — внешнее произведение векторов. Связь p , ρ , ε определяется уравнением состояния совершенного газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты.

Систему уравнений газовой динамики (1)–(3) легко переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot F(U) = 0. \quad (4)$$

Здесь U — вектор консервативных переменных, $U = (\rho, \rho\vec{v}, e)^T$; $F(U)$ — совокупность тензоров потоков консервативных переменных, $F(U) = (\rho\vec{v}, \rho\vec{v} \otimes \vec{v} + p\hat{I}, \vec{v}(e+p))^T$.

В случае чисто одномерных течений идеального сжимаемого нетеплопроводного газа система уравнений (1)–(3) принимает вид [14]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где $U = (\rho, \rho u, e)^T$; $F = (\rho u, \rho u^2 + p, (e+p)u)^T$, U , F — векторы консервативных переменных и потоков.

Система (5) в неконсервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

где $V = (\rho, u, p)^T$ — вектор физических переменных; A — матрица,

$$A = M^{-1} \frac{\partial F}{\partial U} M = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix},$$

M — матрица перехода,

$$M = \frac{\partial U}{\partial V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/(\gamma-1) \end{pmatrix}.$$

Матрицу A можно представить в виде $A = R\Lambda L$, где R — матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы A ; Λ — диагональная матрица собственных значений [14, 15]; L — матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы A . Матрицы R, L, Λ определяются как

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c/\rho & 0 & -c/\rho \\ c^2 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \rho/(2c) & 1/(2c^2) \\ 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & -\rho/(2c) & 1/(2c^2) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука.

Алгоритм численного метода. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений (5). Предположим, что задача решается на отрезке $[0, L]$ на временном интервале $[0, T]$ и поставлены начальное ($U(x, 0) = U_0(x)$) и граничные условия.

На отрезке $[0, L]$ введем сетку с шагом $h = L/n$, состоящую из n ячеек I_j с центрами $x_i = (i-1/2)h$. Обозначим полуцелыми индексами точки границ ячеек: $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm h/2$. Для каждого момента времени $t \in (0, T]$ будем искать приближенное решение для каждой компоненты вектора U в виде элемента конечномерного пространства:

$$V_h^m = \left\{ v_h \in L_2(0, L) : v_h|_{I_j} \in P^m(I_j), \quad j = \overline{1, n} \right\},$$

где $P^m(I_j)$ — пространство полиномов на I_j степени не выше m .

Представим приближенное решение в виде кусочно-полиномиальной функции

$$U_h(x, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^m U_j^{(s)}(t) \varphi_j^{(s)}(x),$$

где $\varphi_j^{(s)}(x)$ — базисные функции пространства V_h^m , отличные от нуля только на отрезке I_j . Поскольку далее речь будет идти о поиске приближенного решения, индекс h опустим. Коэффициенты $U_j^{(s)}$ назовем моментами приближенного решения s -го порядка.

Используем метод взвешенных невязок [8], в качестве весовых функций выберем те же базисные функции пространства V_h^m и от (5) интегрированием по частям придем к уравнению:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \sum_{s=0}^m \frac{dU_j^{(s)}(t)}{dt} \varphi_j^{(s)}(x) \varphi_j^{(r)}(x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} F_j(x, t) \frac{d\varphi_j^{(r)}}{dx} dx + \\ + F(U(x, t)) \varphi_j^{(r)}(x) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, m}.$$

Будем полагать, что выбранный базис ортонормированный и проинтегрируем полученное равенство по t на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. Меняя порядок интегрирования, получаем уравнение

$$U_j^{(r)}(t_{k+1}) - U_j^{(r)}(t_k) - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(x, t) dt \right) \frac{d\varphi_j^{(r)}}{dx} dx + \\ + \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(U(x_{j+1/2}, t)) dt \right) \varphi_j^{(r)}(x_{j+1/2}) - \\ - \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(U(x_{j-1/2}, t)) dt \right) \varphi_j^{(r)}(x_{j-1/2}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, m}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла по пространственной переменной используем квадратурную формулу с узлами x_k^q и весами ω_k^q , $k = \overline{1, N_q}$, где N_q — число квадратурных узлов. Поделим полученное равенство на $\tau = t_{k+1} - t_k$ и окончательно запишем

$$\frac{U_j^{(r)}(t_{k+1}) - U_j^{(r)}(t_k)}{\tau} - \sum_{k=1}^{N_q} \omega_k^q \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(x_k^q, t) dt \right) \frac{d\varphi_j^{(r)}}{dx} (x_k^q) + \\ + \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(x_{j+1/2}, t) dt \right) \varphi_j^{(r)}(x_{j+1/2}) - \\ - \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(x_{j-1/2}, t) dt \right) \varphi_j^{(r)}(x_{j-1/2}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, m}.$$

Величина

$$F(x) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(x, t) dt \quad (7)$$

— среднеинтегральное значение потока F в точке x на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$. В общем случае имеем разностную схему вида

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{(r)}(t_{k+1}) - U_j^{(r)}(t_k)}{\tau} - \sum_{k=1}^{N_q} \omega_k^q F(x_k^q) \frac{d\varphi_j^{(r)}}{dx}(x_k^q) + \\ & + F(x_{j+1/2})\varphi_j^{(r)}(x_{j+1/2}) - F(x_{j-1/2})\varphi_j^{(r)}(x_{j-1/2}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, m}, \quad (8) \\ & U_j^{(r)}(0) = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U_0(x)\varphi_j^{(r)}(x)dx, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, m}, \end{aligned}$$

порядок которой определяется точностью выбранной квадратурной формулы и способа взятия интеграла в (7). В целях сокращения вычислительных затрат для численного взятия интеграла по отрезку $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ следует выбирать квадратурную формулу Гаусса — Лобатто, включающую в себя значения подынтегральной функции на границах ячеек.

Расчет усредненных по времени потоков. Зависимость $F(x, t)$ от независимых переменных опосредованная, поскольку $F(x, t) = F(U(x, t))$. Поэтому для вычисления значений потока $F(x, t)$ и, следовательно, численного взятия интеграла (7) необходимо вычислить значения неизвестных задачи в узлах квадратурной формулы по времени. Для этого используем идеи, лежащие в основе метода PPM (piecewise parabolic method [16]) и PPML (piecewise parabolic method on local stencil [15]). Они основаны на использовании характеристических свойств системы (5). Эта система гиперболическая, поэтому через каждую точку пространства независимых переменных (x, t) проходят характеристики нескольких семейств, отвечающие разным собственным значениям системы. Будем полагать, что характеристические скорости за временной шаг меняются мало, следовательно, характеристики можно считать прямолинейными.

Покажем последовательность вычислений приближенного значения $F(x)$ на примере расчета потока в точке $x_{i+1/2}$ на границе ячеек с номерами i и $i+1$. Действуя по аналогии с [15, 17, 18], для вычисления потока (7) используем приближенные решения задачи Римана [14] в окрестности точки $x_{i+1/2}$, причем левое (V^L) и правое (V^R) состояния газа определим усреднением по областям зависимости характеристик слева и справа от x , наклоненных направо и налево (рис. 1). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{V}_{i+1/2}^{L,p} &= \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} V(x) dx, \quad \lambda^p > 0, \\ \overline{V}_{i+1/2}^{R,p} &= \frac{1}{|\lambda^p| \tau} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2} + |\lambda^p| \tau} V(x) dx, \quad \lambda^p < 0. \end{aligned}$$

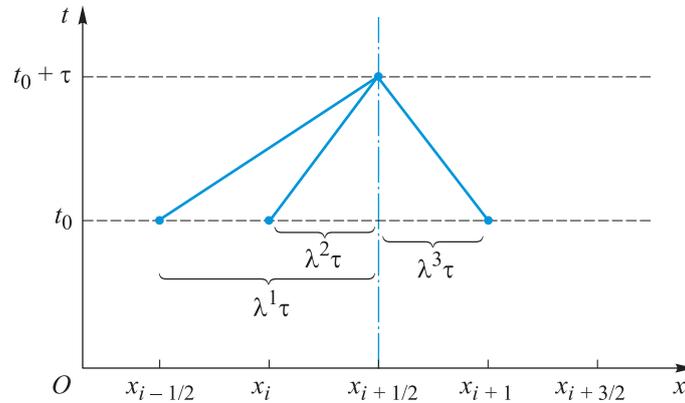


Рис. 1. Область влияния на состояние в точке $x_{i+1/2}$ в момент времени $t_0 + \tau$, $\lambda^{1,3} > 0$, $\lambda^2 < 0$

Отметим, что такой прием позволит перейти от интегрирования по времени, предусмотренного (7), к интегрированию по пространственной переменной на предыдущем временном слое, что делает схему явной.

Для выделения соответствующих компонентов решения используем разложение этих состояний по собственным векторам системы (5). Усредненное значение переменных задачи, вычисленное по области влияния, которая соответствует максимальному положительному собственному значению, обозначим как $\bar{V}_{i+1/2}^{-L,1}$. Используем этот набор усредненных значений для вычисления собственных векторов.

Используем характеристическое разложение (6) и определим состояния слева $V_{i+1/2}^L$ и справа $V_{i+1/2}^R$ от узла $x_{i+1/2}$ по формулам:

$$V_{i+1/2}^L = \bar{V}_{i+1/2}^{-L,p} + \sum_{p, \lambda_p > 0} r^p \left(l^p \left(\bar{V}_{i+1/2}^{-L,p} - \bar{V}_{i+1/2}^{-L,1} \right) \right),$$

$$V_{i+1/2}^R = \bar{V}_{i+1/2}^{-R,p} + \sum_{p, \lambda_p < 0} r^p \left(l^p \left(\bar{V}_{i+1/2}^{-R,p} - \bar{V}_{i+1/2}^{-R,1} \right) \right),$$

где r^p , l^p — правые и левые собственные векторы; $\bar{V}_{i+1/2}^{-R,1}$ — усредненный по области влияния, соответствующей максимальному по модулю отрицательному собственному числу, набор значений переменных задачи.

Следовательно, определены состояния $V_{i+1/2}^L$, $V_{i+1/2}^R$, которые потребуются для вычисления потоков. Для приближенного вычисления потоков можно использовать приближенные решения задачи Римана, например методом HLLC [13].

Аналогично можно вычислить и усредненные по времени значения потока (7) внутри ячейки в узлах квадратурной формулы из (8). Выбор шага по времени τ должен быть ограничен так, чтобы характеристики, проходящие точки (x_k^q, t_{n+1}) , не покидали соответствующую ячейку.

Обобщение метода на двумерный случай. Предположим, что начально-краевая задача для системы уравнений (4) решается в некоторой прямоугольной области $[a, b] \times [c, d]$ на временном интервале $[0, T]$ и поставлено начальное условие $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$. Введем в рассматриваемой области прямоугольную разностную сетку с шагами $h_x = L_x / n_x$, $h_y = L_y / n_y$, состоящую из $n_x n_y$ ячеек $I_{i,j}$ с центрами $x_i = h_x(i - 1/2)$, $y_j = h_y(j - 1/2)$, $i = \overline{1, n_x}$, $j = \overline{1, n_y}$.

Для пространственной аппроксимации решения снова используем разрывной метод Галеркина. Представим приближенное решение системы (4) в виде

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{s=0}^m U_{i,j}^{(s)}(t) \phi_{i,j}^{(s)}(x, y), \quad (9)$$

где $U_{i,j}^{(s)}(t)$ — коэффициенты разложения при s -й базисной функции на ячейке $I_{i,j}$; $\phi_{i,j}^{(s)}(x, y)$ — базисные функции. В качестве базисных функций, заданных внутри ячейки, используем смещенную ортогональную систему полиномов Лежандра

$$\phi_{i,j}^{(0)}(x, y) = 1, \quad \phi_{i,j}^{(1)}(x, y) = \frac{2}{h_x}(x - x_i), \quad \phi_{i,j}^{(2)}(x, y) = \frac{2}{h_y}(y - y_j).$$

Подставим в систему уравнений (4) представление решения U (9), умножим на $\phi_{i,j}^{(s)}$, проинтегрируем полученные равенства по времени на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ и пространственной ячейке $I_{i,j}$, применим формулу интегрирования по частям и получим

$$A^B \left(\hat{U}_{i,j}^{(s)} - U_{i,j}^{(s)} \right) + \int_{\Gamma_{I_{i,j}}} \phi_{i,j}^{(s)} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{F} \cdot \vec{n} dt \right) d\Gamma - \iint_{I_{i,j}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{F} dt \right) \cdot \nabla \phi_{i,j}^{(s)} dx dy = 0, \quad (10)$$

где $A^\beta = \iint_{I_{i,j}} (\phi_{i,j}^{(s)})^2 dx dy$ — нормировочный коэффициент; $\Gamma_{i,j}$ — граница ячейки $I_{i,j}$; \vec{n} — единичная внешняя нормаль к ней.

При покоординатной записи интегралов в равенстве (10) можно использовать усредненные по времени потоки вида (7). Действительно, последний интеграл в левой части (10) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \iint_{I_{i,j}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{F} dt \right) \cdot \nabla \phi_{i,j}^{(s)} dx dy = \\ & = \iint_{I_{i,j}} \tau F(x, y) \frac{\partial \phi_{i,j}^{(s)}}{\partial x} dx dy + \iint_{I_{i,j}} \tau J(x, y) \frac{\partial \phi_{i,j}^{(s)}}{\partial y} dx dy, \end{aligned}$$

где

$$F(x, y) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(x, y, t) dt; \quad J(x, y) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} G(x, y, t) dt$$

— усредненные по времени компоненты потоков F и G вдоль осей Ox и Oy . Аналогичные средние возникают и при взятии интеграла по границе. Этот интеграл разобьем на сумму интегралов по ребрам ячейки (рис. 2):

$$\int_{\Gamma_{I_{i,j}}} \hat{F} \cdot \vec{n} d\Gamma = \sum_{m=1}^N \int_{A_s}^{A_{s+1}} \hat{F} \cdot \vec{n}_s dA,$$

а на каждом ребре $A_s A_{s+1}$ используем комбинацию поворотов переменных задачи и потока, описанную в [13].

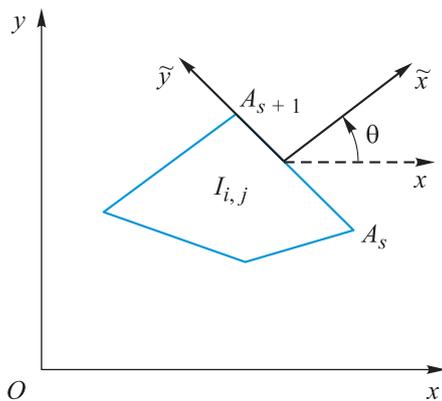


Рис. 2. Исходная и повернутая системы координат для вычисления потока на грани $A_s A_{s+1}$

Повернем ось Ox исходной системы координат на угол θ_s так, чтобы она совпала с направлением внешней нормали к грани \vec{n} . В этом случае матрица поворота для перехода в новую систему координат имеет вид

$$T_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_s & \sin \theta_s & 0 \\ 0 & -\sin \theta_s & \cos \theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя ее, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\Gamma_{I_i, j}} \hat{F} \cdot \vec{n} d\Gamma dt = \\ & = \tau \sum_{m=1}^N \int_{A_s}^{A_{s+1}} \left(\cos \theta_s \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(U) dt + \sin \theta_s \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} G(U) dt \right) dA = \\ & = \tau \sum_{m=1}^N \int_{A_s}^{A_{s+1}} (\cos \theta_s \cdot F + \sin \theta_s \cdot J) dA \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\Gamma_{I_i, j}} \hat{F} \cdot \vec{n} d\Gamma dt & = \tau \sum_{m=1}^N \int_{A_s}^{A_{s+1}} T_s^{-1} \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(T_s U) dt dA = \\ & = \tau \sum_{m=1}^N \int_{A_s}^{A_{s+1}} T_s^{-1} F dA. \end{aligned}$$

Каждый интеграл по ребру $A_s A_{s+1}$ можно вычислить с использованием квадратурной формулы. Отметим, что переход к прямоугольной ячейке сетки (в том числе, к треугольной) потребует в приведенных формулах лишь замены базисных функций ϕ .

Тестирование алгоритма. Тестирование метода выполнено на некоторых одно- и двумерных задачах, имеющих как точное гладкое решение, так и разрывное [19].

Для оценки порядка точности метода использована задача с гладким решением из [20] с начальными условиями $\rho = 1 + 0,5e^{-80(x-0,5)^2}$, $u = 0$, и $p = 1 + 0,5e^{-80(x-0,5)^2}$ и периодическими граничными условиями.

Точное решение и численные решения при числе ячеек $n = 8$ и $n = 16$ для линейной ($m = 1$) и квадратичной ($m = 2$) аппроксимаций решения на ячейке сетки в момент времени $T = 0,25$ показаны на рис. 3.

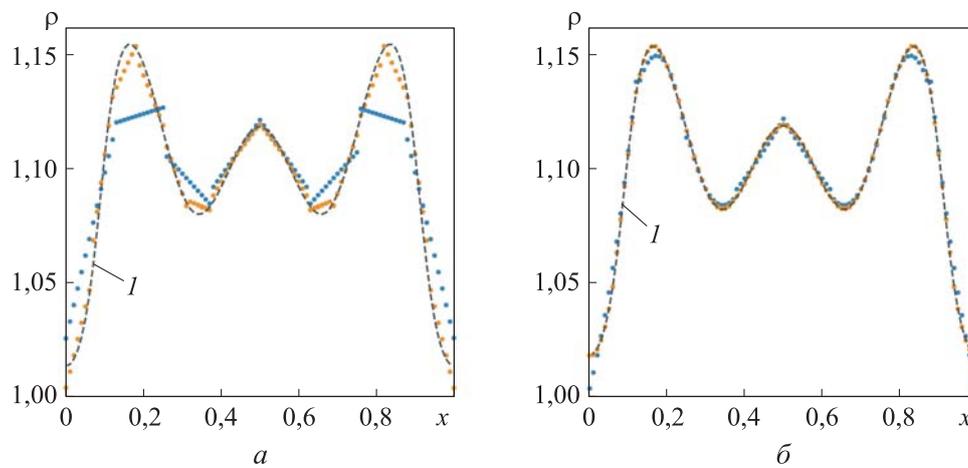


Рис. 3. График плотности ρ (I) в момент времени $T = 0,25$ при степени полинома на ячейке $m = 1$ (а), $m = 2$ (б) и при числе ячеек $n = 8$ (\bullet) и $n = 16$ (\circ)

Оценки погрешности ε метода с использованием нормы

$$\|\varepsilon\|_{L_2} = \left(h \sum_{i=1}^n (\rho_i - \rho_i^0)^2 \right)^{1/2},$$

где ρ_i , ρ_i^0 — значения приближенного и точного решений (таблица). Для оценки порядка точности используется формула $\mu = \log_2 \varepsilon_1 / \varepsilon_2$, ε_1 , ε_2 — оценки погрешности на таких сетках, что шаг сетки 1 в 2 раза больше шага сетки 2. При линейной реконструкции решения на ячейке получен второй порядок метода, при квадратичной — третий. Отметим, что при $m = 2$ оценка порядка сильно зависит от размера ячейки, что связано с влиянием погрешностей округления и, следовательно, с неравномерной сходимостью метода по сетке.

Оценки погрешностей и порядка метода

n	$m = 1$		$m = 2$	
	$\ \varepsilon\ _{L_2} \cdot 10$	Порядок	$\ \varepsilon\ _{L_2} \cdot 10$	Порядок
8	0,16	–	0,039	–
16	0,042	1,92	0,006	2,6
32	0,011	1,93	0,0008	2,9
64	0,0027	2,02	0,0002	1,7

Рассмотрим задачу Сода [13] на отрезке $[0, 1]$, постановка которой соответствует задаче Римана о распаде разрыва с начальными условиями

$\rho^L = 1, u^L = 0, p^L = 1, x < 0,5, \rho^R = 0,125, u^R = 0, p^R = 0,1, x > 0,5$. Финальный момент времени $T = 0,2$.

Распределения плотности, полученные с шагом по пространству $h = 0,02$ при аппроксимации решения на ячейке линейным ($m = 1$) и квадратичным ($m = 2$) полиномами с шагом по пространству $h = 0,02$, а также решение с $m = 1$ и $h = 0,0025$ приведены на рис. 4.

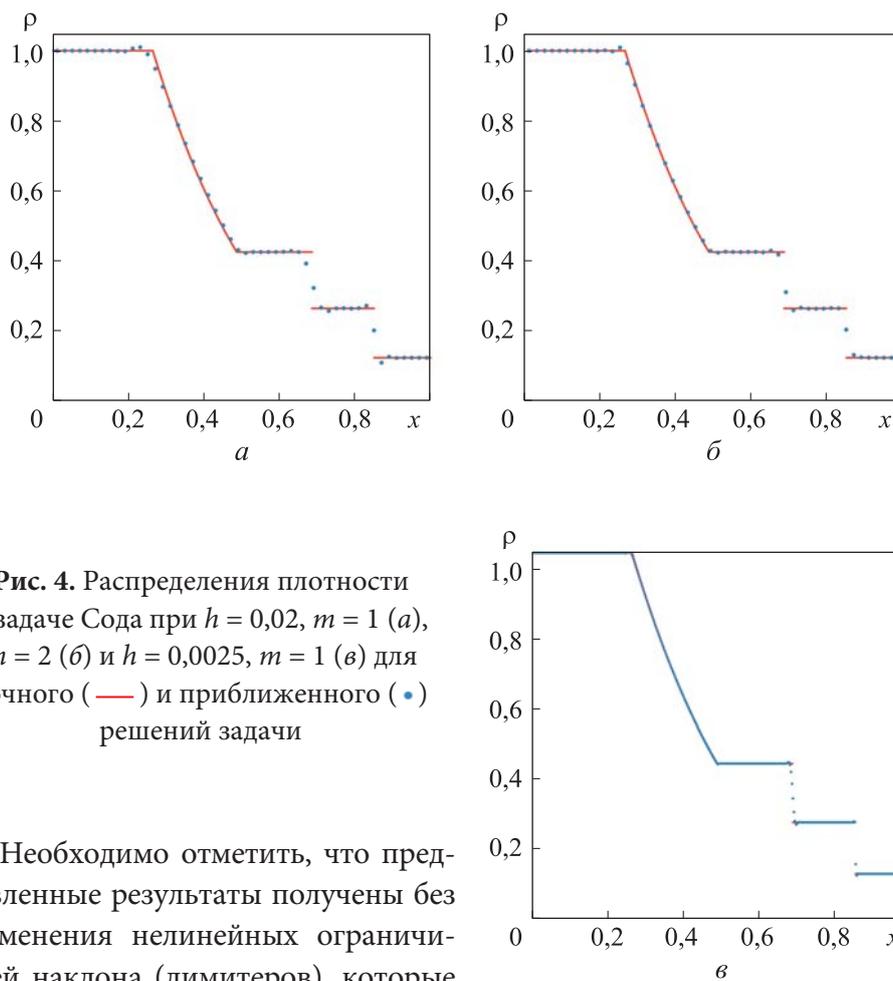


Рис. 4. Распределения плотности в задаче Сода при $h = 0,02, m = 1$ (а), $m = 2$ (б) и $h = 0,0025, m = 1$ (в) для точного (—) и приближенного (•) решений задачи

Необходимо отметить, что представленные результаты получены без применения нелинейных ограничителей наклона (лимитеров), которые обычно используют в схемах повышенного порядка в силу ограничений теоремы Годунова о монотонности [21]. Небольшие осцилляции решения наблюдаются в окрестностях разрывов, они более выражены при линейной реконструкции решения на ячейке. Однако при измельчении сетки они почти исчезают. Контактный разрыв занимает 3–4 ячейки, а ударная волна — две, что свидетельствует об очень высокой разрешающей способности метода.

Приведем также результаты решения задачи Сода в двумерной постановке. Зададим в области $[0,1] \times [0,1]$ начальные условия с разрывом на окружности радиуса $R = 0,2$ с центром в точке $(0,5, 0,5)$. Такая постановка соответствует распространению цилиндрических волн. Два начальных состояния газа внутри окружности (in) и вне нее (out) определяются параметрами $\rho^{in} = 1, u^{in} = 0, v^{in} = 0, p^{in} = 1$; $\rho^{out} = 0,125, u^{out} = 0, v^{out} = 0, p^{out} = 0,1$.

Решение этой задачи представляет собой последовательно удаляющиеся от центра расходящиеся цилиндрические ударную волну и контактный разрыв. В направлении центра движется сходящаяся волна разрежения. Распределения плотности в момент времени $T = 0,1$ показаны на рис. 5, а, б. Сетка состоит из квадратных ячеек: по 150 ячеек в каждом направлении.

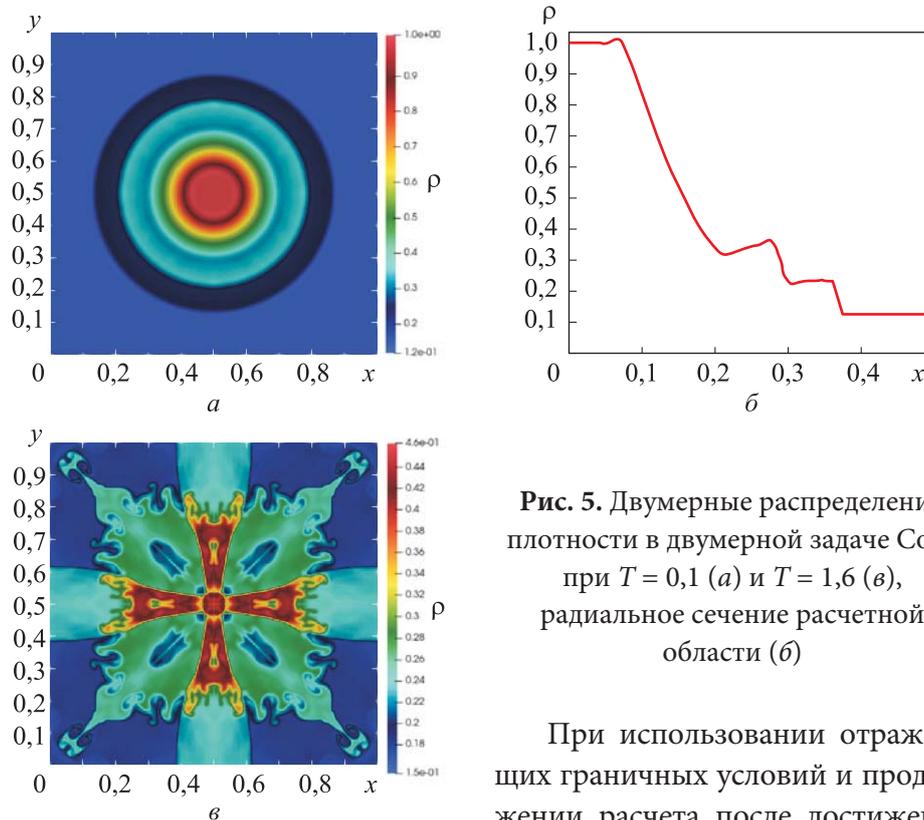


Рис. 5. Двумерные распределения плотности в двумерной задаче Сода при $T = 0,1$ (а) и $T = 1,6$ (в), радиальное сечение расчетной области (б)

При использовании отражающих граничных условий и продолжении расчета после достижения ударной волной контактного разрыва границ расчетной области можно наблюдать сложную волновую картину течения. Ударная волна, становящаяся с течением времени слабее, отражается от границ области и начинает распространяться внутрь, накладываясь на контактный разрыв. В решении развивается множество неустойчивостей типа Рихтмайера — Мешкова,

возникающих на неровностях фронтов разрывов. Характерная картина распределения плотности для момента времени $T = 1,6$ приведена на рис. 5, б. Метод обеспечивает хорошее разрешение сложной структуры течения, включая неустойчивости, что подтверждает как высокий порядок метода, так и его низкие диссипативные свойства.

Оценка вычислительной трудоемкости метода. Как уже было отмечено, представленный метод позволяет отказаться от трудоемкой многостадийной процедуры интегрирования по времени, которую предусматривают методы Рунге — Кутты. Такие методы, чтобы обеспечить второй и более высокий порядок по времени и при этом удовлетворить условиям устойчивости и монотонности, требуют не менее трех стадий [5, 9, 10]. Каждая стадия сопряжена, во-первых, с расчетом численных потоков на границах ячеек, во-вторых, с проведением вычислительно сложной процедуры монотонизации решения. В этом случае условие устойчивости накладывает достаточно серьезные ограничения на шаг по времени [9], таким образом увеличивая число временных шагов. Представленный метод требует вычисления численных потоков не только на границах, но и внутри ячейки, увеличивая число обращений к процедуре решения задачи Римана о распаде разрыва примерно в 2 раза относительно одной стадии разрывного метода Галеркина. Во многих случаях гибридный метод позволяет обойтись без монотонизирующих процедур, а доступный шаг по времени ограничен классическим числом Куранта и примерно в 2 раза превышает максимальный шаг для методов Рунге — Кутты.

Заключение. Получен гибридный метод решения задач газовой динамики в различных пространственных постановках, сочетающий преимущества пространственной аппроксимации решения разрывным методом Галеркина и возможности замены интегрирования по времени интегрированием по пространственной области зависимости, которую обеспечивает использование метода характеристик. Метод протестирован на некоторых одно- и двумерных задачах. Тесты показали, что линейная реконструкция решения на ячейке сетки обеспечивает методу второй, а квадратичная — третий порядок точности. Кроме того, метод обладает высокой разрешающей способностью, малой диссипацией и, несмотря на высокий порядок точности, не требует применения специальных процедур монотонизации решения.

Благодарности

Автор благодарит В.К. Гацук за неоценимый вклад в программную реализацию и тестирование метода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
- [2] Lukin V., Postnov K., Shakura N. Modeling of the L_1 point jet formation in binary star Her X1. *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 1, pp. 85–94.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224010360>
- [3] Galanin M.P., Lukin V.V., Chechetkin V.M. 3D hydrodynamical simulation of accretion disk in binary star system using RKDG CFD solver. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1103, art. 012019. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1103/1/012019>
- [4] Shu C.-W., Qiu J. A comparison of troubled-cell indicators for Runge — Kutta discontinuous Galerkin methods using weighted essentially nonoscillatory limiters. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005, vol. 27, iss. 3, pp. 995–1013.
DOI: <https://doi.org/10.1137/04061372X>
- [5] Qiu J., Shu C.-W. Runge — Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005, vol. 26, iss. 3, pp. 907–929.
DOI: <https://doi.org/10.1137/S1064827503425298>
- [6] Qiu J.-X., Shu C.-W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge — Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case. *J. Comput. Phys.*, 2003, vol. 193, iss. 1, pp. 115–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.026>
- [7] Jiang G., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, 1996, vol. 126, iss. 1, pp. 202–228. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
- [8] Галеева В.Д., Лукин В.В., Марчевский И.К. и др. Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2017, № 131.
DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2017-131>
- [9] Lukin V.V., Korchagova V.N., Sautkina S.M. On stable Runge — Kutta methods for solving hyperbolic equations by the discontinuous Galerkin method. *Diff. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 921–933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266121070089>
- [10] Лукин В.В. Устойчивые методы Рунге — Кутты второго и третьего порядка для решения задач газовой динамики разрывным методом Галеркина. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2022, № 52.
DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-52>
- [11] Gatsuk V.K., Lukin V.V. Mixed characteristic discontinuous Galerkin approach for perfect gas dynamics modeling. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2028, art. 012018.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2028/1/012018>
- [12] Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газодинамики в переменных Эйлера. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1970, т. 10, № 3, с. 773–779.
- [13] Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/b79761>

- [14] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [15] Попов М.В., Устюгов С.Д. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для задач газовой динамики. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, т. 47, № 12, с. 2055–2075. EDN: IBMNPP
- [16] Collela P., Woodward P. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations. *J. Comp. Phys.*, 1984, vol. 54, iss. 1, pp. 174–201. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8)
- [17] Устюгов С.Д., Попов М.В. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2006, № 65.
- [18] Устюгов С.Д., Попов М.В. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. II. Уравнения газодинамики. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2006, № 71.
- [19] Kurganov A., Tadmor E. Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 2002, vol. 18, iss. 5, pp. 584–608. DOI: <https://doi.org/10.1002/num.10025>
- [20] Helzel C., Kerkmann D., Scandurra L. A new ADER method inspired by the active flux method. *J. Sci. Comput.*, 2019, vol. 80, no. 3, pp. 1463–1497. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-019-00988-1>
- [21] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Матем. сб.*, 1959, т. 47, № 89, с. 271–306. EDN: SIYXCJ

Лукин Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Лукин В.В. Гибридный характеристический метод решения задач газовой динамики на основе разрывного метода Галеркина. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 1 (118), с. 46–64. EDN: EGAMAЕ

HYBRID CHARACTERISTIC METHOD BASED ON THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOLVING GAS DYNAMICS PROBLEMS

V.V. Lukin

vvlukin@gmail.com

**Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article presents a numerical method for solving the compressible perfect inviscid gas dynamics problems in one-dimensional and two-dimensional spatial formulations. The method uses the discontinuous Galerkin method approach to approximate the solution over space and the solution transfer along the characteristics technique to integrate the equations over time. This approach allows one to get rid of the standard multi-stage procedure of the Runge — Kutta method and significantly reduce the computational complexity of the method. Instead of integration over time integration of flux function over the spatial domain of dependence on the previous time layer was applied. A generalization of the method to the two-dimensional case for an arbitrary grid cell shape is presented. Test calculations were carried out on a number of one-dimensional and two-dimensional problems with both smooth and discontinuous solutions. Tests have shown that the method has second-order accuracy when using piecewise linear reconstruction of the solution on a cell and third-order accuracy when using quadratic polynomials. In addition, the method has high resolution and low dissipation. The method allows one to resolve gas instabilities such as the Richtmyer — Meshkov instability. Also, despite the high order of accuracy the method does not require the use of special procedures for monotonizing the solution

Keywords

Discontinuous Galerkin method, gas dynamics, hyperbolic systems, solution transfer along the characteristics, two-dimensional problems

Received 29.07.2024

Accepted 09.01.2025

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.

- [2] Lukin V., Postnov K., Shakura N. Modeling of the L_1 point jet formation in binary star Her X1. *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 1, pp. 85–94.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224010360>
- [3] Galanin M.P., Lukin V.V., Chechetkin V.M. 3D hydrodynamical simulation of accretion disk in binary star system using RKDG CFD solver. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1103, art. 012019. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1103/1/012019>
- [4] Shu C.-W., Qiu J. A comparison of troubled-cell indicators for Runge — Kutta discontinuous Galerkin methods using weighted essentially nonoscillatory limiters. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005, vol. 27, iss. 3, pp. 995–1013.
DOI: <https://doi.org/10.1137/04061372X>
- [5] Qiu J., Shu C.-W. Runge — Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2005, vol. 26, iss. 3, pp. 907–929.
DOI: <https://doi.org/10.1137/S1064827503425298>
- [6] Qiu J.-X., Shu C.-W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge — Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case. *J. Comput. Phys.*, 2003, vol. 193, iss. 1, pp. 115–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.026>
- [7] Jiang G., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, 1996, vol. 126, iss. 1, pp. 202–228.
DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
- [8] Galepova V.D., Lukin V.V., Marchevskiy I.K., et al. Comparative study of WENO and Hermite WENO limiters for gas flows numerical simulations using the RKDG method. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2017, no. 131 (in Russ.).
DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2017-131>
- [9] Lukin V.V., Korchagova V.N., Sautkina S.M. On stable Runge — Kutta methods for solving hyperbolic equations by the discontinuous Galerkin method. *Diff. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 921–933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266121070089>
- [10] Lukin V.V. Stable Runge — Kutta methods of 2nd and 3rd order for gas dynamics simulation using discontinuous Galerkin method. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2022, no. 52 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-52>
- [11] Gatsuk V.K., Lukin V.V. Mixed characteristic discontinuous Galerkin approach for perfect gas dynamics modeling. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2028, art. 012018.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2028/1/012018>
- [12] Popov Yu.P., Samarskii A.A. Completely conservative difference schemes for the equations of gas dynamics in Euler's variables. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1970, vol. 10, iss. 3, pp. 265–273. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(70\)90133-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(70)90133-3)
- [13] Toro E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/b79761>
- [14] Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical questions of hyperbolic equations systems numerical solution]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2001.

- [15] Popov M.V., Ustyugov S.D. Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 1970–1989. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542507120081>
- [16] Collela P., Woodward P. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations. *J. Comp. Phys.*, 1984, vol. 54, iss. 1, pp. 174–201. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90143-8)
- [17] Ustyugov C.D., Popov M.B. Piecewise parabolic method on local stencil. I. Advection equation and Burgers' equation. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2006, no. 65 (in Russ.).
- [18] Ustyugov C.D., Popov M.B. Piecewise parabolic method on local stencil. II. Gasdynamics equations. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2006, no. 71 (in Russ.).
- [19] Kurganov A., Tadmor E. Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 2002, vol. 18, iss. 5, pp. 584–608. DOI: <https://doi.org/10.1002/num.10025>
- [20] Helzel C., Kerkmann D., Scandurra L. A new ADER method inspired by the active flux method. *J. Sci. Comput.*, 2019, vol. 80, no. 3, pp. 1463–1497. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-019-00988-1>
- [21] Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 47, no. 8-9, pp. 357–393.

Lukin V.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Lukin V.V. Hybrid characteristic method based on the discontinuous Galerkin method for solving gas dynamics problems. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 1 (118), pp. 46–64 (in Russ.).

EDN: EGAMAE