

АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ¹

Д.Р. Рахимов

rahimov.d@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Для описания нелинейного деформирования ортотропных материалов при силовом нагружении предложено использовать эндохронную теорию пластичности ортотропных материалов. Определяющие соотношения получены введением тензорного внутреннего параметра состояния и тензора времени релаксации. Эти соотношения представлены в интегральной и дифференциальной формах. Рассмотрены различные виды тензора времен релаксации и функции упрочнения и предложены три модели теории. Для каждой модели получены зависимости при простом нагружении, модели без функции упрочнения представлены аналитически выраженными. Анализ этих зависимостей позволил установить связь между материальными параметрами моделей и их влиянием на нелинейное поведение материала, а также предложить методику их экспериментального определения. Проведен аналогичный анализ для многослойных композитных материалов. Сопоставление расчетно-теоретических результатов с экспериментальными данными (например, для трансверсально-изотропного материала бороалюминия) показало, что модель с одним временем релаксации не подходит для описания трехосного нагружения, а модель с несколькими временами релаксации и функцией упрочнения наиболее точно соответствует экспериментальным данным. Для многослойных материалов без явно выраженного линейного упрочнения (например, AS4/PEEK) возможно использование

Ключевые слова

Эндохронная теория пластичности, ортотропный материал, композитный материал, нелинейность, время релаксации, диаграммы деформирования

¹ Памяти заведующего кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (2008–2024) д-ра техн. наук, профессора Георгия Николаевича Кувыркина (1946–2024).

более простых вариантов теории без функции упрочнения. Результаты проведенного анализ вариантов эндохронной теории пластичности ортотропных материалов позволяют лучше понять влияние параметров моделей на поведение композитных материалов и могут стать основой для дальнейших исследований

Поступила 14.06.2024

Принята 01.11.2024

© Автор(ы), 2025

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России
(код проекта FSFN-2024-004)*

Введение. Пластичность композитных материалов (КМ) является одной из ключевых областей исследования в механике материалов. Композитные материалы обладают уникальными свойствами (высокая прочность, жесткость и устойчивость к коррозии), что делает их незаменимыми в различных отраслях (аэрокосмической, автомобильной и др.) [1, 2]. Однако сложная структура этих материалов требует специальных теоретических подходов для точного описания их механического поведения за пределами упругой зоны.

Существует множество теорий, разработанных для учета нелинейного деформирования КМ [2–12]. Среди них особое внимание заслуживает эндохронная теория пластичности, особенностью которой являются использование внутреннего времени z для учета процессов необратимого деформирования и отсутствие деления деформации на упругую и пластическую [8–12]. Эта теория имеет несколько преимуществ, включая относительную простоту определяющих соотношений и возможность описывать такие особенности пластического поведения, как линейное и нелинейное упрочнение, неупругая разгрузка, гистерезис и др.

Цель работы — разработка и анализ различных вариантов эндохронной теории пластичности применительно к ортотропным материалам. Особое внимание уделено выводу определяющих соотношений в интегральной и дифференциальной формах, а также аналитическим зависимостям для случая простого нагружения. Предложена методика определения материальных параметров модели на основе экспериментальных данных.

Эндохронная теория пластичности ортотропного материала. Для учета нелинейного поведения ортотропных материалов при силовом нагружении в [8, 12] использован упрощенный вариант эндохронной теории пластичности с одним временем релаксации. Определяющие соотношения получены путем введения тензорного внутреннего параметра состояния χ_{ij} , $i, j = 1, 3$, который отвечает за отклонение диаграмм де-

формирования от соответствующих линейных зависимостей. Этот параметр определен из кинетического соотношения с одним временем релаксации [13]. Тогда связь между компонентами тензоров напряжения σ_{ij} , деформации ε_{ij} и внутреннего параметра состояния χ_{ij} можно представить в виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \chi_{kl}), \quad k, l = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

где C_{ijkl} — компоненты тензора упругих жесткостей 4-го ранга.

Обобщим эту теорию, рассмотрев несколько значений времени релаксации, для чего постулируем существование следующего кинетического соотношения:

$$\tau_{ijkl} \frac{d\chi_{kl}}{dz} + \chi_{ij} = \bar{\chi}_{ij}, \quad (2)$$

где τ_{ijkl} — компоненты тензора времен релаксации; $\bar{\chi}_{ij} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ — компоненты тензора установившегося состояния внутреннего параметра χ_{ij} ; X_{ijkl} — компоненты тензора 4-го ранга; $dz = d\xi / f(\xi)$ — приращение внутреннего времени, $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, определяемое как $d\xi = \sqrt{p_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}}$, p_{ijkl} — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров модели; $f(\xi)$ — функция упрочнения [9, 14].

В общем случае соотношение (2) представляет собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [15]. Здесь ограничимся рассмотрением следующего вида тензора времен релаксации:

$$\tau_{ijkl} = \begin{cases} \tau_{ijkl}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j = l. \end{cases} \quad (3)$$

В этом случае получим несвязанную систему дифференциальных уравнений, решение которой можно представить так:

$$\chi_{ij} = \bar{\chi}_{ij} - \int_0^z e^{-a_{ijkl}(z-z')} \frac{d\bar{\chi}_{kl}}{dz'} dz'. \quad (4)$$

Здесь a_{ijkl} — компоненты тензора 4-го ранга материальных параметров $\hat{\mathbf{a}}$; $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{\tau}}^{-1}$ (в рассматриваемом случае $a_{ijkl} = 1 / \tau_{ijkl}$).

Подставив (4) в (1), получим

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \left(\bar{\chi}_{kl} - \int_0^z e^{-a_{klmn}(z-z')} \frac{d\bar{\chi}_{mn}}{dz'} dz' \right), \quad m, n = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

В частном случае, когда $\bar{\chi}_{ij} = \varepsilon_{ij}$, соотношение (5) принимает вид:

$$\sigma_{ij} = \int_0^z C_{ijkl} e^{-aklmn(z-z')} \frac{d\varepsilon_{mn}}{dz'} dz'. \quad (6)$$

При переходе от тензорной формы записи к матричной, соотношения (5) и (6) схожи с соотношениями, предложенными в [9, 10].

Для дальнейшего анализа определяющих соотношений перейдем от интегральной формы записи (6) к дифференциальной:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - a_{klmn} S_{mnpq} \sigma_{pq} dz), \quad p, q = \overline{1, 3}.$$

Обратное соотношение: $d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} + a_{ijkl} S_{klmn} \sigma_{mn} dz$, где S_{ijkl} — компоненты тензора коэффициентов податливости 4-го ранга.

Анализ определяющих соотношений. Для установления связи между материальными параметрами модели и их влиянием на нелинейное поведение материала при силовом нагружении рассмотрим различные варианты соотношения (6), упорядочив их по степени сложности.

Модель № 1. Примем следующий вид компонент тензора времени релаксации $\tau_{ijkl} = \tau_0 \delta_{ik} \delta_{jl}$ и функцию упрочнения $f(\xi) = 1$. Тогда запишем систему уравнений, идентичную предложенной в [8, 12]:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \left(d\sigma_{kl} + \frac{1}{\tau_0} \sigma_{kl} dz \right), \quad dz = \sqrt{p_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай простого нагружения, который представляет наибольший практический интерес. Поскольку в большинстве экспериментов нагружение происходит в пространстве напряжений, примем компоненты тензора напряжений пропорциональными параметру нагружения p : $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 p$, $d\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 dp$, где $\sigma_{kl}^0 = \text{const}$. Решив систему уравнений (7) относительно приращения параметра нагружения dp , получим соотношения:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dp} = S_{ijkl} \sigma_{kl}^0 \left(1 + \frac{1}{\tau_0} \frac{p}{dp/dz} \right), \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{p}{\tau_0} + \frac{1}{a},$$

где $a = \sqrt{\sigma_{mn}^0 S_{mnij} p_{ijkl} S_{klpq} \sigma_{pq}^0}$.

Решение этой системы при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = -S_{ijkl} \sigma_{kl}^0 \frac{\tau_0}{a} \left(\ln \left(1 - \frac{a}{\tau_0} p \right) \right), \quad z = -\tau_0 \ln \left(1 - \frac{a}{\tau_0} p \right). \quad (8)$$

Для частных случаев нагружения (8) можно упростить и представить в виде зависимости напряжения от деформации в определенном направлении. Такая форма записи удобна для определения материальных параметров модели. В общем виде ее можно представить как

$$\sigma_{ij} = \frac{\tau_0}{\sqrt{A_{ij}}} Q_{ij} \left(1 - \exp \left(- \frac{\sqrt{A_{ij}}}{\tau_0} \varepsilon_{ij} \right) \right), \quad \! \Sigma_{i,j} \quad (9)$$

Здесь A_{ij}, Q_{ij} — переменные, учитывающие характеристики материала и коэффициенты пропорциональности между компонентами тензора напряжения; $\! \Sigma_{i,j}$ — символ, обозначающий отсутствие суммирования по индексам i, j .

Проанализировав приведенные соотношения для различных случаев нагружения, можно сделать следующие выводы.

1. Согласно (8), модель № 1 не учитывает изменение коэффициентов поперечной деформации при пластическом деформировании. В действительности коэффициенты поперечной деформации могут как увеличиваться, так и уменьшаться, что описано в [2]. Постоянные коэффициенты поперечной деформации также означают, что моделирование жесткого и мягкого нагружений будет происходить одинаково.

2. Во всех случаях нагружения диаграммы деформирования имеют горизонтальную асимптоту при напряжении $\sigma_{kl} = \tau_0 \sigma_{kl}^0 / a$.

3. Компоненты тензора материальных параметров p_{ijkl} определяют непосредственно из экспериментов на одноосное растяжение, чистый сдвиг и двухосное растяжение вдоль соответствующих направлений. Моделирование поведения материала при трехосном нагружении полностью зависит от результатов этих экспериментов.

4. Компоненты тензора материальных параметров p_{ijkl} пропорциональны τ_0^2 , поэтому время релаксации взаимно уничтожится при подстановке значений p_{ijkl} в (8). Это означает, что время релаксации не влияет на моделирование нелинейного поведения материала и может быть использовано в качестве масштабного коэффициента для уменьшения вычислительных погрешностей. Время релаксации в [8, 12] определяют аппроксимацией обобщенной диаграммы деформирования [7, 12]. Однако такой подход излишен, поскольку можно обойтись без использования обобщенной кривой.

Рассмотрим получение аналитических зависимостей для диаграмм деформирования многослойного КМ, который является одним из наиболее широко используемых типов таких материалов. Поскольку в большинстве случаев экспериментальные диаграммы деформирования монослоя представлены в глобальной системе координат (СК) при различных углах армирования φ [1], получим зависимости для напряжения и деформации в этой же СК.

При нагружении монослоя напряжением в глобальной СК $\sigma_{XX} = p$ компоненты тензора напряжения в СК монослоя примут вид $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 p$, где $\sigma_{11}^0 = \cos^2 \varphi$; $\sigma_{22}^0 = \sin^2 \varphi$; $\sigma_{12}^0 = -\sin \varphi \cos \varphi$. Здесь и далее нижний индекс XX обозначает напряжение или деформацию в направлении оси Ox_1 глобальной СК.

Используя первое уравнение соотношения (8), определим деформацию в глобальной СК:

$$\varepsilon_{XX} = -\left(S_{11kl} \cos^2 \varphi + S_{22kl} \sin^2 \varphi - 2S_{12kl} \sin \varphi \cos \varphi \right) \sigma_{kl}^0 \frac{\tau_0}{a} \left(\ln \left(1 - \frac{a}{\tau_0} p \right) \right). \quad (10)$$

Для определения компонент тензора материальных параметров p_{ijkl} монослоя теоретически достаточно результатов четырех экспериментов: растяжение вдоль и поперек волокон, чистый сдвиг и растяжение под любым углом армирования.

Модель № 2. Примем вид компонент тензора времени релаксации τ_{ijkl} в соответствии с (3) и функцию упрочнения $f(\xi) = 1$, запишем следующую систему уравнений:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} + a_{ijkl} S_{klmn} \sigma_{mn} dz, \quad dz = \sqrt{p_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}}. \quad (11)$$

По аналогии с моделью № 1 определим аналитические зависимости для построения диаграмм деформирования для случая простого нагружения: $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 p$, $d\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 dp$, где $\sigma_{kl}^0 = \text{const}$. Решив систему уравнений (11) относительно приращения параметра нагружения dp , получим соотношения:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dp} = S_{ijkl} \sigma_{kl}^0 + a_{ijkl} S_{klmn} \sigma_{mn}^0 \frac{p}{dp/dz}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{s}{r} p + \sqrt{\left(\left(\frac{s}{r} \right)^2 - \frac{t^2}{r} \right) p^2 + \frac{1}{r}}.$$

Здесь

$$s = \frac{1}{2} \sigma_{mn}^0 S_{mnij} \left(p_{ijkl} a_{klpq} + a_{ijkl} p_{klpq} \right) S_{pqxy} \sigma_{xy}^0 \geq 0;$$

$$t^2 = \sigma_{pq}^0 S_{pqmn} a_{mnij} p_{ijkl} a_{klvx} S_{vxyz} \sigma_{yz}^0 \geq 0;$$

$$r = \sigma_{mn}^0 S_{mnij} p_{ijkl} S_{klpq} \sigma_{pq}^0 \geq 0, \quad v, x, y, z = \overline{1, 3}.$$

Результаты интегрирования для компонент тензора деформации при нулевых начальных условиях:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}^0 p + a_{ijkl} S_{klmn} \sigma_{mn}^0 F_1,$$

$$F_1 = F_1(p) = -\frac{1}{t^2} \left(k - \sqrt{r} - \frac{1}{2} \frac{s}{t} \ln \left(\frac{s+tk}{s-tk} \frac{1+tp}{1-tp} \frac{s-t\sqrt{r}}{s+t\sqrt{r}} \right) + sp \right), \quad (12)$$

где $k^2 = k^2(p) = r - n^2 p^2$; $n^2 = t^2 r - s^2$.

Проанализировав (11) и (12) для различных случаев нагружения, можно сделать следующие выводы относительно модели № 2.

1. При одноосном растяжении изменение коэффициентов поперечной деформации v_{ij} происходит в соответствии с уравнением

$$v_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} = v_{ij}^0 \left(\frac{1}{E_{ii}} \left(1 - \frac{a_{jjjj}}{a_{iiii}} \right) \frac{\sigma_{ii}}{\varepsilon_{ii}} + \frac{a_{jjjj}}{a_{iiii}} \right), \quad \forall \Sigma_{i,j}, \quad (13)$$

где v_{ij}^0 — коэффициенты поперечной деформации в начальный момент деформирования; E_{ii} — нормальный модуль упругости в направлении оси Ox_i .

Из (13) следует, что коэффициенты поперечной деформации v_{ij} могут как увеличиваться, так и уменьшаться, стремясь к a_{jjjj}/a_{iiii} . Если коэффициент v_{ij} увеличивается, то коэффициент v_{ji} уменьшается и, наоборот.

2. Во всех случаях нагружения диаграммы деформирования имеют горизонтальную асимптоту при напряжении $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 \sqrt{1/t}$.

3. Рассуждения об определении компонент тензора материальных параметров p_{ijkl} аналогичны тем, что использованы для модели № 1. Компоненты тензора a_{ijkl} могут быть определены путем анализа поперечных деформаций при продольных одноосных растяжениях или на основе данных, полученных в экспериментах на трехосное нагружение или комбинированное растяжение и сдвиг. В отличие от модели № 1 компоненты тензора a_{ijkl} влияют на поведение материала при трехосном нагружении (рис. 1).

Для многослойного материала соотношение (10) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XX} = & (S_{11kl}c^2 + S_{22kl}s^2 - 2S_{12kl}sc) \sigma_{kl}^0 p + \\ & + (a_{11kl}c^2 + a_{22kl}s^2 - 2a_{12kl}sc) S_{klmn} \sigma_{mn}^0 F_1, \end{aligned} \quad (14)$$

где $c = \cos \varphi$; $s = \sin \varphi$.

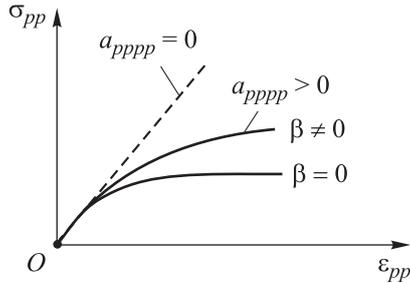


Рис. 1. Кривая деформирования при трехосном нагружении в зависимости от параметров материала

В отличие от модели № 1, для определения компонент тензоров материальных параметров p_{ijkl} и a_{ijkl} монослоя теоретически необходимы результаты минимум пяти экспериментов: растяжение вдоль и поперек волокон, чистый сдвиг и растяжение под двумя углами армирования.

Модель № 3. Примем вид компонент тензора времен релаксации τ_{ijkl} в соответствии с выражением (3) и функцию упрочнения $f(\xi) = 1 + \beta\xi$ [9, 10], где β — материальный параметр модели, и запишем систему уравнений

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl} + a_{ijkl}S_{klmn}\sigma_{mn} \frac{d\xi}{1 + \beta\xi}, \quad d\xi = \sqrt{p_{ijkl}d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl}}. \quad (15)$$

Определим аналитические зависимости для построения диаграмм деформирования для случая простого нагружения: $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 p$, $d\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^0 dp$, где $\sigma_{kl}^0 = \text{const}$. Решив систему уравнений (15) относительно приращения параметра нагружения dp , получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dp} = & S_{ijkl}\sigma_{kl}^0 + a_{ijkl}S_{klmn}\sigma_{mn}^0 \frac{d\xi}{dp} \frac{p}{1 + \beta\xi}, \\ \frac{dp}{d\xi} = & -\frac{s}{r} \frac{p}{1 + \beta\xi} + \sqrt{\left(\left(\frac{s}{r}\right)^2 - \frac{t^2}{r}\right)\left(\frac{p}{1 + \beta\xi}\right)^2 + \frac{1}{r}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} s = & \frac{1}{2} \sigma_{mn}^0 S_{mnij} (p_{ijkl} a_{klpq} + a_{ijkl} p_{klpq}) S_{pqxy} \sigma_{xy}^0 \geq 0; \\ t^2 = & \sigma_{pq}^0 S_{pqmn} a_{mnij} p_{ijkl} a_{klvx} S_{vxyz} \sigma_{yz}^0 \geq 0; \\ r = & \sigma_{mn}^0 S_{mnij} p_{ijkl} S_{klpq} \sigma_{pq}^0 \geq 0, \quad v, x, y, z = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Для общего случая нагружения полученная система уравнений может быть решена только численно.

Для случаев чистого сдвига соотношение (16) можно решить аналитически и представить в виде зависимости касательного напряжения σ_{ij} от сдвига γ_{ij} в заданной плоскости $Ox_i x_j$:

$$\sigma_{ij} = \frac{G_{ij}}{(a_{ijij} + \beta) \sqrt{p_{ijij}}} \left((1 + \beta \sqrt{p_{ijij}} \gamma_{ij}) - (1 + \beta \sqrt{p_{ijij}} \gamma_{ij})^{-a_{ijij}/\beta} \right), \quad ! \Sigma_{i,j}. \quad (17)$$

Здесь G_{ij} — модуль сдвига в плоскости $Ox_i x_j$; $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ — компоненты тензора сдвиговой деформации.

Проанализировав (16) и (17) для различных случаев нагружения, можно сделать следующие выводы относительно модели № 3.

1. Рассуждения касательно коэффициента поперечной деформации и определения компонент тензоров материальных параметров p_{ijkl} и a_{ijkl} аналогичны тем, что применялись для модели № 2. Параметр β определяют из наилучшего совпадения кривых деформирования. Влияние этого параметра на характеристики кривой деформирования при трехосном нагружении показано на рис. 1.

2. Во всех случаях нагружения диаграммы деформирования имеют наклонную асимптоту $\sigma_{ij} = k_{ij} \varepsilon_{ij} + b_{ij}$ $! \Sigma_{i,j}$. Для чистого сдвига коэффициенты k_{ij} и b_{ij} определяют из следующих соотношений:

$$k_{ij} = \frac{\beta G_{ij}}{a_{ijij} + \beta}, \quad b_{ij} = \frac{G_{ij}}{(a_{ijij} + \beta) \sqrt{p_{ijij}}}, \quad ! \Sigma_{i,j}$$

Далее рассмотрим применение указанных моделей для описания поведения трансверсально-изотропного материала и многослойного КМ при различных случаях нагружения.

Методика определения материальных параметров эндохронной теории. Согласно изложенному, компоненты тензора материальных параметров p_{ijkl} определяют из экспериментов по чистому сдвигу, одно- и двухосному растяжениям. Для этого используют соотношения (9), (15) и соотношения (10), (14) для многослойного материала. В случае применения моделей № 2 и № 3 компоненты тензора a_{ijkl} определяют путем анализа поперечных деформаций при продольных одноосных растяжениях или на основе данных, полученных в экспериментах на трехосное нагружение или комбинированное растяжение и сдвиг. Материальный параметр β

в модели № 3 находят на основе наилучшего соответствия расчетных кри-
вых и экспериментальных данных при определении p_{ijkl} и a_{ijkl} .

Для определения перечисленных параметров минимизируем следу-
ющий функционал F :

$$F = \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} \varphi_i \sum_{j=1}^{N_{\text{point}}} \frac{1}{N_{\text{point}}} \left(\sigma_j^{(i)\text{exp}} - \sigma_j^{(i)\text{calc}} \right)^2,$$

где $N_{\text{exp}}, N_{\text{point}}$ — число экспериментов и экспериментальных точек;
 φ — функция влияния эксперимента; $\sigma_j^{(i)\text{exp}}, \sigma_j^{(i)\text{calc}}$ — эксперименталь-
ное и расчетное напряжения.

На подлежащую минимизации функцию накладываем ряд ограниче-
ний, связанных с положительной определенностью тензоров материаль-
ных параметров $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{a}}$ [16]. В этом случае целевая функция минимиза-
ции имеет вид [7]:

$$\Phi = F + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{f_i},$$

$$f_i = \begin{cases} f_i, & f_i \geq \zeta_i; \\ \left[1/\zeta_i + (\zeta_i - f_i)/\zeta_i^2 \right]^{-1}, & f_i < \zeta_i. \end{cases}$$

Здесь $f_i = (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{a}})$, n — условия и число условий для проверки положи-
тельной определенности тензоров $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{a}}$; R_i, ζ_i — весовая функция
и малый параметр.

Для поиска локального минимума используем модифицированный
метод Ньютона [17], для поиска глобального минимума — метод гло-
бального поиска [18].

Сравнение результатов расчета. Сравним результаты вычислений,
полученных с использованием различных моделей. В качестве первого
материала возьмем трансверсально-изотропный материал (бороалюми-
ний), для которого имеем экспериментальные данные по сжатию вдоль
двух направлений, сдвигу и гидростатическому сжатию [19]. Этот мате-
риал интересен тем, что диаграмма деформирования вдоль волокон ли-
нейна, в то время как в остальных направлениях возникают нелинейные
деформации. В качестве второго материала рассмотрим многослойный
КМ AS4/ПЕЕК [20] без явно выраженного линейного упрочнения. Харак-
теристики материалов приведены ниже. Диаграммы деформирования
бороалюминия представлены на рис. 2.

Характеристики материалов

	Бороалюминий	AS4/PEEK
E_1 , ГПа	229	127,6
E_2 , ГПа	142	10,3
E_3 , ГПа	142	—
G_{12} , ГПа	52	6
ν_{12}	0,228	0,32
ν_{13}	0,228	—

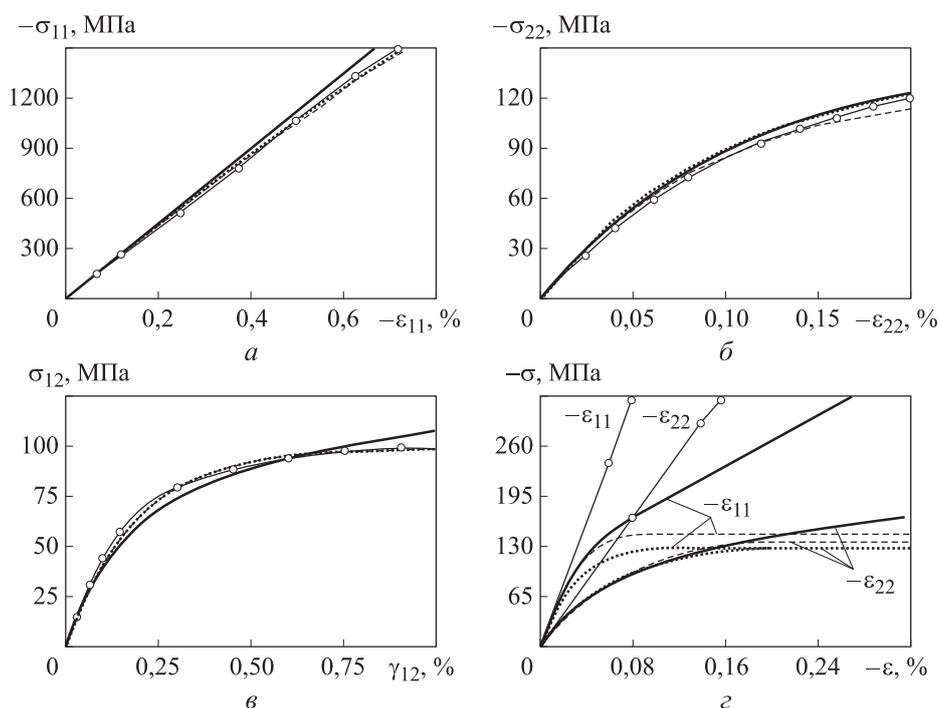


Рис. 2. Диаграммы деформирования бороалюминия при сжатии вдоль (а) и поперек (б) волокон, сдвиге (в) и гидростатическом сжатии (г):

—○— эксперимент; модель: № 1 (.....), № 2 (----), № 3 (—)

Согласно диаграммам, ни одна из моделей не удовлетворяет экспериментальным данным при трехосном нагружении. Модели № 2 и № 3 демонстрируют наилучшее соответствие результатам на начальном этапе нагружения. В остальных случаях диаграммы деформирования удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным.

Диаграммы деформирования многослойного КМ AS4/PEEK показаны на рис. 3. Для материала без выраженного линейного упрочнения все модели демонстрируют удовлетворительное соответствие экспериментальным данным. Однако модели № 2 и № 3 лучше всего соответствуют результатам для поперечных деформаций.

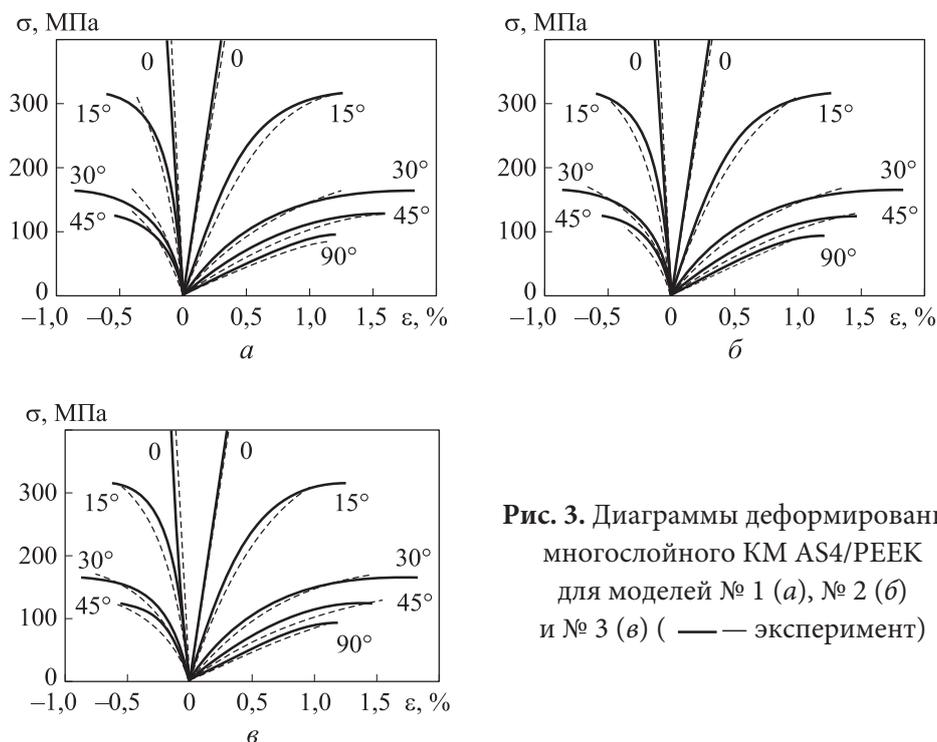


Рис. 3. Диаграммы деформирования многослойного КМ AS4/PEEK для моделей № 1 (а), № 2 (б) и № 3 (в) (— — эксперимент)

Заклучение. Изучены различные модели эндохронной теории пластичности ортотропных материалов. Для каждой из них получены зависимости при простом нагружении, модели без функции упрочнения представлены аналитическими выражениями. Результаты анализа этих зависимостей позволили определить минимально необходимые эксперименты для определения материальных параметров моделей и предложить соответствующую методику их экспериментального определения. Исследование показало, что в модели с одним временем релаксации это время является только масштабным коэффициентом и не влияет на нелинейное поведение материала.

Сопоставление расчетно-теоретических результатов с экспериментальными данными показало, что модель с одним временем релаксации не подходит для описания трехосного нагружения, в то время как модель с функцией упрочнения наиболее точно соответствует экспериментальным данным. Для многослойного материала без явно выраженного линейного упрочнения могут быть использованы более простые варианты теории без функции упрочнения.

Проведенный анализ позволяет лучше понять влияние материальных параметров на поведение КМ и может стать основой для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М., Машиностроение, 1984.
- [2] Jones R.M. Deformation theory of plasticity. Bull Ridge, 2009.
- [3] Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. Plast.*, 2008, vol. 24, iss. 10, pp. 1642–1693.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.03.009>
- [4] Liu H., Yang Z., Yuan H. A novel elastoplastic constitutive model for woven oxide/oxide ceramic matrix composites with anisotropic hardening. *Compos. Struct.*, 2019, vol. 229, no. 3, art. 111420.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111420>
- [5] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю. и др. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квазиизотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44. EDN: XTAZGG
- [6] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1 (24), с. 26–46. EDN: HZIWYN
- [7] Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов. *Известия РАН. МТТ*, 2016, т. 51, № 5, с. 111–123. EDN: WRJKKV
- [8] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Описание нелинейного деформирования композитов на основе углерода. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 1990, № 1 (1), с. 11–17.
- [9] Зиновьев П.А., Сарбаев Б.С. Эндохронная теория нелинейного деформирования слоистых композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1985, № 3, с. 423–430. EDN: VYIOIT
- [10] Сарбаев Б.С., Барышев А.Н. Расчет диаграмм деформирования композиционных материалов с тканым наполнителем посредством эндохронной теории пластичности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2017, № 4 (115), с. 65–75. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2017-4-65-75>
- [11] Valanis K.C. Thermomechanical behavior of anisotropic inelastic composites: a micromechanical theory. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1991, vol. 113, iss. 1, pp. 141–147. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2903370>
- [12] Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993.
- [13] Кувыркин Г.Н. Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч. 1. Определяющие уравнения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2013, № 1 (48), с. 26–33. EDN: PYEUSX

- [14] Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н., Рахимов Д.Р. Расчет металлокомпозитного баллона давления с использованием эндохронной теории пластичности для изотропного материала. *Композиты и наноструктуры*, 2022, т. 14, № 3, с. 179–190. EDN: JYIUGD. DOI: <https://doi.org/10.36236/1999-7590-2022-14-3-179-190>
- [15] Кувыркин Г.Н., Рахимов Д.Р. Вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов. *Прикладная механика и техническая физика*, 2024, № 3, с. 116–122. EDN: HYUCWQ. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202315386>
- [16] Никабадзе М.У. Задача на собственные значения для тензора любого четного ранга и некоторые ее применения в механике. *Совр. матем. и ее приложения*, 2015, т. 98, с. 22–52.
- [17] Dennis J.E., Jr., Schnabel R.B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Prentice Hall, 1983.
- [18] Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М., Наука, 1991.
- [19] Цветков С.В., Зиновьев П.А., Ерёмичев А.Н. и др. Деформирование и разрушение бороалюминия при сложном напряженном состоянии. *Проблемы прочности*, 1991, № 12, с. 29–35.
- [20] Sun C.T., Yoon K.J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation. *J. Compos. Mater.*, 1991, vol. 25, iss. 10, pp. 1297–1313. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199839102501003>

Рахимов Даниэль Рустамович — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Рахимов Д.Р. Анализ определяющих соотношений эндохронной теории пластичности ортотропных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 1 (118), с. 65–81. EDN: EMQJGS

ANALYSIS OF THE GOVERNING RELATIONS OF THE ENDOCHRONIC THEORY OF PLASTICITY OF ORTHOTROPIC MATERIALS

D.R. Rakhimov

rahimov.d@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article presents the use of the endochronic theory of plasticity of orthotropic materials to describe the nonlinear deformation of orthotropic materials under force loading. The governing relations are obtained by introducing a tensor internal state parameter and a relaxation time tensor. These relations are presented in integral and differential form. By considering various types of relaxation time tensor and hardening function, three models of this theory have been proposed. For each model, dependences were obtained for the case of simple loading, models without strain hardening function are represented by analytical expressions. Analysis of these dependencies allowed establishing the connection between model material parameters and their influence on the nonlinear behavior of the material, as well as to propose a methodology for their experimental determination. A similar analysis was performed for multilayer composite materials. A comparison of the computational-theoretical results with known experimental data for a transversally isotropic material (boron-aluminum) and a multilayer composite AS4/PEEK showed that the model with a single relaxation time is not suitable for describing triaxial loading, while the model with several relaxation times and a hardening function most accurately corresponds to experimental data. For multilayer materials without pronounced linear hardening, it is possible to use simpler versions of the theory without the hardening function. The analysis of different variants of the endochronic theory of plasticity of orthotropic materials allows for a deeper understanding of the influence of model parameters on the behavior of composite materials and can serve as a basis for further research

Keywords

Endochronic theory of plasticity, orthotropic materials, composite materials, nonlinearity, relaxation time, deformation curve

Received 14.06.2024

Accepted 01.11.2024

© Author(s), 2025

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FSN-2024-004)

REFERENCES

- [1] Alfutov N.A., Zinovyev P.A., Popov B.G. Raschet mnogosloynnykh plastin i obo-lochek iz kompozitsionnykh materialov [Calculation of multilayer plates and shells from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984.
- [2] Jones R.M. Deformation theory of plasticity. Bull Ridge, 2009.
- [3] Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. Plast.*, 2008, vol. 24, iss. 10, pp. 1642–1693.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.03.009>
- [4] Liu H., Yang Z., Yuan H. A novel elastoplastic constitutive model for woven oxide/oxide ceramic matrix composites with anisotropic hardening. *Compos. Struct.*, 2019, vol. 229, no. 3, art. 111420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111420>
- [5] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Dimitrienko A.Yu., et al. Modeling micro-structural model of the plasticity deformation theory for quasi-isotropic composite materials. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2021, no. 4, pp. 17–44 (in Russ.). EDN: XTAZGG
- [6] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite element design of effective elastic and plastic characteristics of composites on the basis of method of asymptotic averaging. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2007, no. 1 (24), pp. 26–46 (in Russ.). EDN: HZIWYN
- [7] Golovin N.N., Kuvyrkin G.N. Mathematical models of carbon-carbon composite deformation. *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 596–605.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416050137>
- [8] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Nonlinear deformation of carbon contained composites. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 1990, no. 1 (1), pp. 11–17 (in Russ.).
- [9] Zinov'ev P.A., Sarbaev B.S. Endochronic theory of nonlinear deformation of laminated composite materials. *Mech. Compos. Mater.*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 278–284.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00611611>
- [10] Sarbaev B.S., Baryshev A.N. Calculation of stress-strain curves of fabric reinforced composite materials using the endochronic theory of plasticity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2017, no. 4 (115), pp. 65–75 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2017-4-65-75>
- [11] Valanis K.C. Thermomechanical behavior of anisotropic inelastic composites: a micromechanical theory. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1991, vol. 113, iss. 1, pp. 141–147.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2903370>
- [12] Kuvyrkin G.N. Termomekhanika deformiruemogo tverdogo tela pri vysokointensivnom nagruzhenii [Thermal mechanics of a deformable solid under high-intensity loading]. Moscow, BMSTU Publ., 1993.
- [13] Kuvyrkin G.N. Mathematical model of non-local thermal viscoelastic medium. Part 1. Determining equations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2013, no. 1 (48), pp. 26–33 (in Russ.). EDN: PYEUSX

- [14] Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Rakhimov D.R. Calculation of a metal composite pressure vessel using the endochronic theory of plasticity for an isotropic material. *Kompozity i nanostruktury* [Composites and Nanostructures], 2022, vol. 14, no. 3, pp. 179–190 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.36236/1999-7590-2022-14-3-179-190>
- [15] Kuvyrkin G.N., Rakhimov D.R. Computational algorithm for studying the constitutive relations of the endochronic theory of thermoplasticity for isotropic materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2024, vol. 65, no. 3, pp. 496–501. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894424030118>
- [16] Nikabadze M.U. Eigenvalue problem for tensors of even rank and its applications in mechanics. *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 221, no. 2, pp. 174–204. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3226-6>
- [17] Dennis J.E., Jr., Schnabel R.B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Prentice Hall, 1983.
- [18] Zhiglyavskiy A.A., Zhilinskas A.G. Metody poiska globalnogo ekstremuma [Methods of searching a global extremum]. Moscow, Nauka Publ., 1991.
- [19] Tsvetkov S.V., Zinovyev P.A., Eremichev A.N., et al. Deformation and failure of boron-aluminum with a complex stress state. *Problemy prochnosti*, 1991, no. 12, pp. 29–35 (in Russ.).
- [20] Sun C.T., Yoon K.J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation. *J. Compos. Mater.*, 1991, vol. 25, iss. 10, pp. 1297–1313. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199839102501003>

Rakhimov D.R. — Post-Graduate Student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Rakhimov D.R. Analysis of the governing relations of the endochronic theory of plasticity of orthotropic materials. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 1 (118), pp. 65–81 (in Russ.). EDN: EMQJGS