УДК 534.26 EDN: NARUPY

О КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ РАССЕЯНИИ УПРУГИХ ВОЛН НА ПЛОСКИХ ТРЕЩИНАХ

А.А. Кириллов[1] kirillov@bmstu.ru
Л.Ю. Могильнер[1, 2] mogilner@bmstu.ru
Е.П. Савелова[1] savelova@bmstu.ru

[1] **МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**
[2] **ФГАУ «НУЦСК при МГТУ им. Н.Э. Баумана», Москва, Российская Федерация**

Аннотация

В связи с расширением использования в ультразвуковой дефектоскопии тонких эффектов, связанных с дифракцией упругих волн на трещинах различной ориентации, отмечена актуальность детального изучения задач о рассеянии поверхностных волн при распространении вдоль трещин. Эти задачи также актуальны для изучения условий роста трещин. Рассмотрен вопрос о рассеянии упругих поверхностных волн при распространении вдоль семейства угловых полуплоскостей, соединенных цилиндрическим сектором. Проанализированы условия сшивки соответствующих решений в различных областях. Показано, что на таком ребре отражение рэлеевской волны не возникает, волна претерпевает только фазовый сдвиг. При этом на цилиндрическом секторе волна генерирует источники, которые излучают в объем. Рассмотрены краевые условия и дисперсионное соотношение для рэлеевских волн. Проанализирована возможность появления скачка производной на границе двух поверхностей с разной внешней кривизной. Рассмотрен общий вопрос о постановке краевых условий для плоских трещин. Установлено, что для отражения поверхностных волн на ребре трещины необходимо наличие внутренней кривизны ее поверхности или неоднородностей вблизи поверхности трещины

Ключевые слова

Упругая волна, дифракция, ребро трещины, рэлеевская волна, кривизна поверхности, отражение волны, прохождение волны

Поступила 13.09.2024
Принята 12.12.2024

Введение. В инженерных расчетах задач о рассеянии упругих волн на трещинах, выполняемых, в частности, для применения в задачах ультразвуковой дефектоскопии металлов (например, дифракционно-временного метода TOFD) или прочностных расчетах [1–3], необходимо фиксировать граничные условия на поверхности трещин. Если трещина имеет конечный размер, то эти условия дополняются так называемыми краевыми условиями. В литературе для моделей плоских трещин можно встретить разные подходы к наложению краевых условий [4–6]. В большинстве случаев они основаны на поведении плотности или потока энергии. Поскольку характер поведения трещины, в частности ее рост, определяется различными физическими процессами и условиями, удобно подразделять краевые условия по физическим факторам, возникающим на острие трещины, и таким образом выделить их в специфические условия: описывать как дополнительными напряжениями на краю трещины, так и поправками к основным волновым уравнениям. Если уравнения колебаний среды фиксировать, то условия на краю трещины будут следовать из них автоматически. В настоящей работе показано, что условия на краю трещин непосредственно следуют из волнового уравнения. Фактически краевые условия требуют только того, чтобы декартовы компоненты вектора смещения оставались непрерывными. Отметим, что любую границу трещины с краем можно получить как предел некоторой гладкой выпуклой поверхности. Здесь не рассмотрен вопрос о различных дополнительных физических условиях и факторах, определяющих образование и рост трещины.

Приведем несколько примеров. Дискообразную трещину заданного радиуса или трещину в виде полосы заданной ширины можно рассматривать как предельную форму сплюснутого эллипсоида вращения (или эллипса) в сплюснутых сфероидальных (или эллиптических цилиндрических) координатах при стремлении малой полуоси эллипсоида (эллипса) к нулю [7]. Это предположение использовано в [8] при переходе от поля на поверхности дискообразной полости к расчету поля в точке наблюдения, удаленной от трещины. Согласно результатам экспериментов, даже модели трещин в виде пазов с раскрытием в десятые доли длины волны, которые должны имитировать острие реальной трещины, на самом деле рассеивают ультразвуковые волны как объемные отражатели малого диаметра, а не как модели плоских трещин с нулевым раскрытием [9–11]. Это никак не противоречит результатам настоящей работы. Отметим, что в рассматриваемом случае локально граница трещины остается плоской. Далее будет показано, что с позиции внутренней геометрии поверхности поверхностные волны (рэлеевские волны) при прохождении угла (ребра) меняют направление распространения (с точки зрения внешнего пространства) и фазу, при этом отражения не происходит. Однако при прохождении угла рэлеевская волна всегда генерирует источники на краю трещины, которые излучают в объем, что и подтверждает эксперимент. Следовательно, можно сделать следующий вывод: для отражения поверхностных волн от края необходимо наличие внутренней кривизны поверхности границы/трещины. Кроме того, наличие неоднородных вкраплений вблизи поверхности трещины также приводит к частичному отражению рэлеевских волн [12, 13].

Отметим, что задачи о рассеянии 3D упругих волн на цилиндрических или сферических полостях рассмотрены в [14–16]. Вопрос о рассеянии звуковых и поверхностных акустических волн на неоднородностях интенсивно исследуется для решения задач сейсморазведки, сейсмологии, микроэлектроники [17–20].

Волновые уравнения, законы сохранения и краевые условия. С учетом актуальности применения в ультразвуковой дефектоскопии задачи о рассеянии упругих волн на плоских трещинах в [21] приведено общее решение 3D-задачи рассеяния упругих волн на плоской трещине. Рассмотрим вопрос о возможности переизлучения возбуждаемых поверхностных волн в объем среды.

В упругой среде связь компонентов тензора напряжения σ_{ij} и вектора смещения u_i приводит к уравнению $\rho_0\omega^2 u_i + \lambda D_i D_k u^k + \mu\left(D_j D_i u^j + D_j D^j u_i\right) = g_i\left(x,\ \omega\right)$. В таком случае рассмотрим стационарные процессы, т. е. монохроматические волны с циклической частотой ω, используя следующие обозначения: λ, μ — коэффициенты Ламе, ρ_0 — плотность среды, D_j, D^j — ковариантная и контравариантная (при криволинейных координатах) производные.

Из уравнений движения в упругой среде легко получить стандартным способом законы сохранения энергии и импульса. Действительно, компоненты тензора энергии и импульса имеют вид

$$T_0^0 = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^{ij} D_j u_i; \tag{1}$$

$$T_j^0 = \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x^j};\ T_0^j = -\sigma^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial t}; \tag{2}$$

$$T_i^j = -\sigma^{ik} D_j u_k - \frac{1}{2}\delta_j^i\left[\rho_0\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 - \sigma^{km} D_k u_m\right] \tag{3}$$

и определяют законы сохранения в виде ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$\partial_0 T_\mu^0 + \partial_i T_\mu^i = 0. \tag{4}$$

Как уже было отмечено, законы сохранения (1)–(4) следуют непосредственно из уравнений движения, поэтому не накладывают каких-либо дополнительных ограничений (типа краевых условий). Уравнения сохранения энергии и импульса упругих волн в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}E = \int \frac{\partial}{\partial t} T_0^0 d^3x = -\oint T_0^j dS_j;$$

$$\frac{d}{dt}P_i = \int \frac{\partial}{\partial t} T_i^0 d^3x = -\oint T_i^j dS_j.$$

Поверхностные волны (рэлеевские) не проникают внутрь объема, поскольку такие волны могут распространяться только вдоль границы (поверхности трещин), соответственно, они не дают вклада в изменение энергии (что видно из приведенных интегралов). В частности, это означает, что поведение плотности энергии и потока энергии около края трещины также не содержит какой-либо дополнительной информации. Разумеется, кроме той, что можно извлечь из уравнений движения.

Для стационарных процессов, т. е. для чисто монохроматических волн $u \sim e^{-i\omega t}$, из (1)–(4) дифференциальный закон сохранения энергии и импульса принимает вид

$$\partial_j T_0^j = 0, \ \ \partial_j T_i^j = 0, \tag{5}$$

где $T_0^j = i\omega\sigma_{ij}^* u_i$; $T_j^i = -\sigma_{ik}^* D_j u_k + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left[\rho_0\omega^2 u_k u_k^* + \sigma_{km}^* D_k u_m\right]$.

Для комплексных решений укажем на наличие, кроме (5), еще одной сохраняющейся величины — плотности потока фононов:

$$J_k = u_i^* \sigma_{ij}\left(u\right) + u_i \sigma_{ij}\left(u^*\right), \ \ D_i J_k = 0. \tag{6}$$

Закон сохранения (6) также реализуется в силу выполнения волновых уравнений, следовательно, не вводит каких-либо дополнительных ограничений типа краевых условий.

Вектор смещения среды удобно разделить на продольную и поперечные части стандартным способом — введением потенциалов: $u_i = u_i^{\parallel} + u_i^{\perp} = D_i f + \varepsilon_{ijk} g^{jl} g^{km} D_l A_m$, $u^i = D^i f + \varepsilon^{ijk} D_l A_m$, $D_i u^i = D_i D^i f$. В обычных декартовых координатах $D_i = \partial_i$. Поперечная часть смещения удовлетворяет условию $D_i u_i^{\perp} = 0$, что позволяет разбить уравнения на две группы:

$$\left(D^2 + K_0^2\right) u_i^{\parallel} = \frac{g_i^{\parallel}\left(x, \omega\right)}{\left(\lambda + 2\mu\right)}; \tag{7}$$

$$\left(D^2+\Omega^2\right)u_i^{\perp}=\frac{g_i^{\perp}\left(x,\omega\right)}{\mu}. \tag{8}$$

Здесь использованы разложение источника волн в виде $g_i=g_i^{\|}+g_i^{\perp}$ с учетом стандартных проекционных операторов $P_j^{i\|}+P_j^{i\perp}=\delta_i^j$ и стандартные обозначения $K_0^2=\rho_0\omega^2/\left(\lambda+2\mu\right)$, $\Omega^2=\rho_0\omega^2/\mu$.

Тензор напряжений упругой среды имеет вид $\sigma_{ij}=\lambda g_{ij}D_k u_k^{\|}+$ $+\ \mu\left(D_i u_j^{\|}+D_j u_i^{\|}\right)+\mu\left(D_i u_j^{\perp}+D_j u_i^{\perp}\right)$, который определяет граничные условия на трещине в форме $n_{ij}\sigma_{ij}=0$. Для трещин конечного размера никаких дополнительных условий накладывать не требуется. Вектор смещения должен подчиняться только волновым уравнениям. Это означает, что компоненты вектора смещения должны иметь непрерывные частные производные до второго порядка включительно на краю трещины. Это формирует так называемые естественные краевые условия.

Трещина или граница в виде семейства угловых полуплоскостей. *Выбор системы координат.* Пусть трещина (или граница среды) описывается функцией $\zeta=\varphi\left(x,y,z\right)$. Поверхность уровня такая, что $\zeta=\zeta_0$ соответствует поверхности трещины. Полагаем, что при $\zeta_0\neq 0$ трещина имеет гладкую поверхность, представляющую собой две полуплоскости, которые соединены сектором бесконечного цилиндра; в пределе $\zeta_0\to 0$, когда цилиндр вырождается в линию, получаем две склеенные полуплоскости. В случае границы среды имеем две полуплоскости, склеенные под произвольным углом. Функцию $\varphi\left(x,y,z\right)$ удобно выбрать следующим образом:

$$\zeta=\varphi\left(x,\,y,\,z\right)=\begin{cases} z \ \text{при} \ \theta>\pi/2, \\ \sqrt{y^2+z^2} \ \text{при} \ \theta\in\left[\theta_0,\pi/2\right], \\ z\sin\theta_0+y\cos\theta_0 \ \text{при} \ \theta<\theta_0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь угловая переменная определяется стандартным образом $y=r\cos\theta,\ z=r\sin\theta$. Предполагается, что $\theta_0<\pi/2$. При $\theta_0=\pi/2$ получим плоскую границу $z=\zeta_0$. При $\theta_0=-\pi/2$ поверхность $\zeta=\zeta_0$ описывает трещину конечного раскрытия $2\zeta_0$, край которой представляет собой цилиндр радиусом $r=\zeta_0$. При $\theta_0=0$ имеем границу в виде двух полуплоскостей, склеенных под прямым углом.

Для семейства таких поверхностей удобно использовать переменную ζ в качестве одной из координат (нормальной к поверхности трещины или границе). В точках $\theta = \pi/2$ и $\theta = \theta_0$ вторые производные функции ζ приводят к появлению дельта-функции. Однако это не вызывает дополнительные трудности. Кроме того, появления дельта-функции можно избежать, если вместо ступеньки использовать любую гладкую переходную функцию $\mathrm{tg}(\lambda x)$ при $\lambda \gg 1$. Удобно ввести семейство векторных полей $l, m,$ касательных к поверхности $\zeta = \zeta_0$, и нормальное поле n:

$$n = \left(0, \cos\theta, \sin\theta\right),\ \ m = \left(0, \sin\theta, -\cos\theta\right) \text{ при } \theta \in \left[\theta_0, \pi/2\right]. \qquad (10)$$

В (10) в областях $\theta > \pi/2$ и $\theta < \theta_0$ достаточно принять $\theta = \pi/2$ или $\theta = \theta_0$. Вектор вдоль образующей цилиндра для всех областей в (9): $l = \left(1, 0, 0\right)$.

Ранее предположили, что поверхность трещины описывается функцией $\zeta = \zeta_0$. В качестве продольных координат выберем переменную x и координату $\tilde{y}$, образованную линией $\zeta = \zeta_0$. В (9) в области $\theta \in \left[\pi/2, \theta_0\right]$ новая координата $\tilde{y} = -\zeta_0\theta$. При $\theta > \pi/2$ получим $\tilde{y} = y - (\pi/2)\zeta_0$, а при $\theta < \theta_0$ — $\tilde{y} = -\zeta_0\theta_0 + y\sin\theta_0 - z\cos\theta_0$.

Запишем выражения, связывающие координатные оси полуплоскостей: $y' = y\sin\theta_0 - z\cos\theta_0$, $z' = y\cos\theta_0 + z\sin\theta_0$. Две полуплоскости соответствуют значениям $y < 0$ и $y' > 0$.

Волновые уравнения, решения. Рассмотрим решение волновых уравнений (7), (8) в выбранной системе координат. Удобно использовать разложение векторов и производных на продольные и поперечные к границе/трещине направления. С учетом (10) все производные имеют разложения в виде $D_i = l_i D_l + m_i D_m + n_i D_n$, где $D_m = m_i D_i$ — производная по направлению m. Аналогично раскладываются компоненты векторов смещения и векторного потенциала. Легко проверить, что $D_l = \partial_x$. В областях полуплоскостей $\theta \notin \left[\pi/2, \theta_0\right]$ имеем $D_m = \partial_{\tilde{y}}$, а в области сектора $\theta \in \left[\pi/2, \theta_0\right]$, где $\zeta = r$, получим $D_m = -\dfrac{1}{r}\partial_\theta = \dfrac{\zeta_0}{\zeta}\partial_{\tilde{y}}$ и $D_n = \partial_\zeta$. Тогда лапласиан принимает вид

$$D_i D_i = D_l^2 + D_m^2 + \left(m, D_m n\right) D_n + D_n^2 = D_l^2 + D_m^2 + \left(D_n + \frac{\Lambda}{\zeta}\right) D_n,$$

где $\left(m, D_m n\right) = -\left(n, D_m m\right) = \Lambda/\zeta$ и

$$\Lambda\left(\theta\right) = \left[\eta\left(\theta + \theta_0\right) - \eta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[\eta\left(\frac{\tilde{y}}{\zeta_0} + \frac{\pi}{2}\right) - \eta\left(\frac{\tilde{y}}{\zeta_0} - \theta_0\right)\right]. \qquad (11)$$

Напомним свойства ступенчатой функции $\eta(-x)=1-\eta(x)$. Эта функция равна 1 в секторе $\theta\in[\pi/2,\theta_0]$ и 0 вне указанного сектора.

Для продольной компоненты $u_i^{\|}$ волновое уравнение (7) сводится к

$$\left(\left(D_n+\frac{\Lambda}{\zeta}\right)D_n+K_0^2-k_l^2-\frac{\zeta_0^2}{\zeta^2}\tilde{k}_y^2\right)f=0, \qquad (12)$$

где $f=\sum_k f_k F_k=\int f_k \exp\left(ik_l x+i\tilde{k}_y\tilde{y}\right)\frac{d^2k}{2\pi}$. Таким образом, продольная компонента описывается скалярным уравнением.

В рассматриваемом случае с позиции внутренней геометрии поверхность границы/трещины является обычной двумерной плоскостью. Это приводит к тому, что функции F_k соответствуют стандартному интегралу Фурье. Другими словами, эти функции являются собственными функциями оператора Лапласа на поверхности трещины:

$$-\Delta_2 F_k=-\left(D_l^2+D_m^2\right)_{\zeta_0}F_k=\left(k_l^2+\tilde{k}_y^2\right)F_k=k^2F_k.$$

В секторе $\theta\in[\pi/2,\theta_0]$ волновое уравнение (12) сводится к уравнению Бесселя (в секторе $r=\zeta$): $\left(r^2\partial_r^2+r\partial_r+\left(K_0^2-k_l^2\right)r^2-\zeta_0^2\tilde{k}_y^2\right)f=0$, решение которого выражается в виде цилиндрических функций $f=H_\nu^{1,2}\left(\sqrt{K_0^2-k_l^2}\,r\right)$, где $\nu=\zeta_0\tilde{k}_y$. В этом секторе вблизи границы $r=\zeta=\zeta_0$ в качестве нормальной координаты можно принять $r=\zeta_0\,e^{t/\zeta_0}$, $r^2\partial_r^2+r\partial_r=r\partial_r r\partial_r=\zeta_0^2\partial_t^2$, тогда получим $\left(\partial_t^2+\left(K_0^2-k_l^2\right)e^{2t/\zeta_0}-\tilde{k}_y^2\right)f=0$ и в области $t\ll\zeta_0$, т. е. при $e^{2t/\zeta_0}\cong 1$, имеем решение в виде стандартных волн

$$f=C_1e^{ip_lt}+C_2e^{-ip_lt},\; p_l^2=K_0^2-k_l^2-\tilde{k}_y^2. \qquad (13)$$

В задачах рассеяния рассеянная волна имеет только уходящую внутрь объема волну вида $\sim(1/\zeta_0)\,e^{ik\zeta}$. Это означает, что в (13) решения в различных областях имеют вид $f(k)=B(k)\,e^{ip_l\zeta}$, $p_l=\sqrt{K_0^2-k_l^2-\tilde{k}_y^2}$, где $B(k)$ — коэффициенты, определяемые граничными условиями $n_{ij}\sigma_{ij}=0$.

Аналогично из (8) находятся уравнения для проекций векторного потенциала A_i поперечной части вектора смещения $u_i^{\perp}$ на базисные векторы с заменой $K_0\to\Omega$, $p_l\to p_t$. Отметим, что эти уравнения одинаковы для A и $u^{\perp}$ (при этом $D^2=D_l^2+D_m^2+\left(D_n+\Lambda/r\right)D_n$):

$$D^2 u_i^{\perp} + \Omega^2 u_i^{\perp} = 0;$$

$$\left[\left(D^2 + \Omega^2 - \frac{\Lambda^2}{r^2}\right) \mp i\left(D_m \frac{\Lambda}{r} + \frac{\Lambda}{r} D_m\right)\right] u_{\pm}^{\perp} = 0,$$

где $u_{\pm}^{\perp} = u_m^{\perp} \pm i u_n^{\perp}$; Λ определено в (11).

Приведем проекции нормальных компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ln} = 2\mu D_n D_l f + \mu\left(D_l u_n^{\perp} + D_n u_l^{\perp}\right);$$

$$\sigma_{mn} = 2\mu D_n D_m f + \mu\left(D_m u_n^{\perp} + \left(D_n - \frac{\Lambda}{r}\right) u_m^{\perp}\right);$$

$$\sigma_{nn} = \lambda D^2 f + 2\mu D_n D_n f + 2\mu D_n u_n^{\perp}.$$

Волновые уравнения в секторе $\theta \in [\theta_0, \pi/2]$ из (9) для компонент $u^{\perp}$ или $A_{\pm}$ вблизи трещины имеют вид

$$\left[\left(r^2 D_n^2 + r D_n\right) + r^2\left(\Omega^2 - k_l^2\right) - \beta_{\pm}^2 \mp i\zeta_0 \partial_{\tilde{y}} \Lambda\right] u_{\pm}^{\perp} = 0; \qquad (14)$$

$\nu = \zeta_0 \tilde{k}_y$; $\beta_{\pm}^2 = (\nu \mp 1)^2$. Соответствующие решения записываются через функции Бесселя $A_{\pm}$, $u_{\pm} \sim H^1_{\nu\mp1}\sqrt{\Omega^2 - k_l^2}\, r$ и A_l, $u_l \sim H^1_{\nu}\sqrt{\Omega^2 - k_l^2}\, r$.

Вблизи трещины $r = \zeta_0 e^{t/\zeta_0}$ при $t \ll \zeta_0$ получим

$$\left(\zeta_0^2 \partial_t^2 + \zeta_0^2 p_t^2 - \Lambda^2 \mp i\zeta_0 \Lambda'_y \pm 2\zeta_0 \tilde{k}_y \Lambda\right) u_{\pm}^{\perp} = 0,$$

где $p_t^2 = \Omega^2 - k_l^2 - \tilde{k}_y^2$. Это дает $u_{\pm} \sim e^{ip_{\pm}t}$ и дисперсионные соотношения в виде

$$p_{\pm}^2 = \Omega^2 - k_l^2 - \frac{\left(\zeta_0 \tilde{k}_y \mp \Lambda\right)^2}{\zeta_0^2}.$$

Рэлеевские волны. В асимптотических областях (полуплоскости $\theta > \pi/2$ и $\theta < \theta_0$) решение вблизи границы трещины сводится к обычным плоским волнам, поэтому достаточно рассмотреть одну область. Пусть это будет $\theta > \pi/2$, из которой и будет набегать рэлеевская волна. Отметим, что в области сектора $\theta \in [\pi/2, \theta_0]$, как и на полной цилиндрической поверхности, рэлеевские волны нельзя свести к плоским волнам. Как показано далее, при переходе в этот сектор плоская рэлеевская волна расщепляется на три волны с разными волновыми векторами, причем каждая волна не является рэлеевской. Это означает, что при переходе на поверхность сектора эти волны начинают излучать (распространяться) вглубь объема. Для описания подобного излучения удобно использовать интегральное представление, предложенное в [21].

В терминах $A_{\pm}$ решения волновых уравнений (15) приведены выше, а граничные условия $\sigma_{nj} = 0$ дают

$$\frac{\sigma_{ln}}{\mu} = -2p_l ik_l f + \frac{1}{2}\Big[\left(-k_l^2 - p_t^2 - k_m p_t\right)A_+ + \left(-k_l^2 - p_t^2 + k_m p_t\right)A_-\Big];$$

$$\frac{\sigma_{mn}}{\mu} = -2ik_m p_l f + \frac{1}{2}\left[-\left(k_m - p_t\right)k_l A_+ - \left(k_m + p_t\right)k_l A_-\right];$$

$$\frac{\sigma_{nn}}{\mu} = \left(-\frac{\lambda}{\mu}K^2 + 2p_l\right)f - p_t ik_l\left(A_+ + A_-\right).$$

Здесь $p_t^2 = k^2 - \Omega^2$; $p_l^2 = k^2 - K_0^2$; $k^2 = k_l^2 - k_m^2$. После простых преобразований запишем

$$A_+ - A_- = -\frac{p_t k_m}{k^2}\left(A_+ + A_-\right); \tag{15}$$

$$f = -\frac{k_l}{4p_l ik^2}\left(k^2 + p_t^2\right)\left(A_+ + A_-\right); \tag{16}$$

$$-\frac{k_l}{p_l ik^2}\left[\left(k^2 - \frac{\Omega^2}{2}\right)^2 - p_l p_t k^2\right]\left(A_+ + A_-\right) = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) определяет дисперсионное соотношение для рэлеевских волн (в частности, их скорость распространения). Во всех трех областях компоненты волн выражаются через одну из компонент f, $A_+ + A_-$ или $A_+ - A_-$.

Рассеяние рэлеевских волн на краю, краевые условия. Рассмотрим задачу о рассеянии поверхностных волн на краю трещины. Характер рассеяния целиком определяется волновыми уравнениями вида

$$\left(D_l^2 + D_m^2 + \left(D_n + \frac{\Lambda}{r}\right)D_n + K^2\right)f = 0;$$

$$\left[D_l^2 + \left(D_m \mp i\frac{\Lambda}{r}\right)^2 + \left(D_n + \frac{\Lambda}{r}\right)D_n + \Omega^2\right]A_{\pm} = 0.$$

Будем искать решения вида $\sim e^{ik_l x}$ и соответственно $D_l = ik_l$. Зависимость от второй координаты на трещине (ортогональной к краю $\tilde{y}$) определяется производной $D_m = -\frac{1}{r}\partial_\theta = \frac{\zeta_0}{\zeta}\partial_{\tilde{y}}$:

$$\left(-k_l + D_m^2 + \left(D_n + \frac{\Lambda}{r}\right) D_n + K^2\right) f = 0;$$

$$\left[-k_l + \frac{\zeta_0^2}{r^2}\partial_{\tilde{y}}^2 + \left(D_n + \frac{\Lambda}{r}\right) D_n + \Omega^2 - \frac{\Lambda^2}{r^2} \mp i\frac{1}{r^2}\left(-\Lambda' + 2\zeta_0\Lambda\partial_{\tilde{y}}\right)\right] A_\pm = 0,$$

где Λ — функция, $\Lambda(\theta) = [\eta(\theta+\theta_0) - \eta(\theta - \pi/2)]$, ее производная (отметим, что $\tilde{y} = -\zeta_0\theta$ при $\theta \in [\pi/2, \theta_0]$):

$$\Lambda'(\theta) = -\delta(\theta+\theta_0) + \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\zeta_0\delta(\tilde{y} - \theta_0\zeta_0) + \zeta_0\delta\left(\tilde{y} + \frac{\pi}{2}\zeta_0\right);$$

$$\Lambda'(\theta) = -\zeta_0\partial_{\tilde{y}}\Lambda;\ \partial_{\tilde{y}}\Lambda = -\delta(\tilde{y} - \theta_0\zeta_0) + \delta\left(\tilde{y} + \frac{\pi}{2}\zeta_0\right).$$

Этот член отвечает за наличие скачка производной $\partial_{\tilde{y}}$ в точках $\tilde{y} = (\pi/2)\zeta_0$ и $\tilde{y} = -\zeta_0\theta_0$ в величинах $A_\pm$. Всюду вблизи трещины выполняется $\partial_{\tilde{y}} = i\tilde{k}_y$. В области полуплоскостей $\tilde{y} < (-\pi/2)\zeta_0$ и $\tilde{y} > -\zeta_0\theta_0$ волновые уравнения (7), (8) дают $(D_m = \partial_{\tilde{y}},\ D_n = \partial_t,\ \zeta = \zeta_0 + t)$:

$$\left(-k_l^2 + \partial_{\tilde{y}}^2 + \partial_t^2 + K^2\right) f = 0,\ \left(-k_l^2 + \partial_{\tilde{y}}^2 + \partial_t^2 + \Omega^2\right) A_\pm = 0,$$

а решения имеют вид плоских волн, затухающих вглубь среды.

Примечание 1. Отметим, что для продольной (f) и поперечной $(A_\pm)$ компонент в рэлеевской волне декременты затухания вглубь разные. Однако согласно (15)–(17) поверхностные волны определяются по одной компоненте — либо f, либо одной из компонент $A_\pm$:

$$f = e^{-pt}\left(F_1 e^{i\tilde{k}\tilde{y}} + F_2 e^{-i\tilde{k}\tilde{y}}\right),\ \tilde{k}^2 = K^2 + p^2 - k_l^2, \tag{18}$$

$$A_\pm = e^{-pt}\left(A_{\pm 1} e^{is\tilde{y}} + A_{\pm 2} e^{-is\tilde{y}}\right),\ \tilde{s}^2 = \Omega^2 + p^2 - k_l^2. \tag{19}$$

В области $(-\pi/2)\zeta_0 < \tilde{y} < -\zeta_0\theta_0$, выбирая $r = \zeta_0 e^{t/\zeta_0}$ и затухающие вглубь среды решения $\sim e^{-pt}$, получаем

$$\left(\left(K^2 - k_l^2\right)\zeta_0^2 e^{2t/\zeta_0} + \zeta_0^2\partial_{\tilde{y}}^2 + \zeta_0^2\partial_t^2\right) f = 0;$$

$$\left[\left(\Omega^2 - k_l^2\right) e^{2t/\zeta_0} + \partial_{\tilde{y}}^2 + \partial_t^2 - \frac{\Lambda^2}{\zeta_0^2} \mp i\frac{1}{\zeta_0^2}\left(-\Lambda' + 2\zeta_0\Lambda\partial_{\tilde{y}}\right)\right] A_\pm = 0.$$

В главном приближении это в окрестности трещины при $t/\zeta_0 \ll 1$ дает

$$\left(\left(K^2 - k_l^2\right) + \partial_{\tilde{y}}^2 + p^2\right) f = 0; \tag{20}$$

$$\left[\partial_{\tilde{y}}^2 + \Omega^2 - k_l^2 + p^2 - \frac{\Lambda^2}{\zeta_0^2} \mp i\frac{1}{\zeta_0^2}\left(-\Lambda' + 2\zeta_0\Lambda\partial_{\tilde{y}}\right)\right] A_\pm = 0. \tag{21}$$

Уравнение (20) не изменяется и имеет те же решения (18). Уравнения (19) для компонент $A_\pm$ меняются существенно. Изменяется также и выражение для напряжений $\sigma_{ij} = 0$. Это означает, что на цилиндрическом секторе меняются не только решения, но и дисперсионные соотношения для рэлеевских волн. Очевидно, что разделение переменных и выделение поверхностной волны на цилиндрической поверхности не сводится к плоским волнам. Другими словами, если задать на одной из плоскостей плоскую рэлеевскую волну, падающую на цилиндрический сектор, то на самом секторе волна уже не будет рэлеевской. Это следует из того, что условия сшивки генерируют три волны с волновыми векторами $s_\pm$ и s. Все три волны являются решениями волновых уравнений вблизи трещины, с использованием интеграла Кирхгоффа [21] эти решения можно продолжить на всю область внутрь объема среды. В этом случае можно утверждать о переизлучении рэлеевской волны вглубь среды при рассеянии на угле. При этом излучающей поверхностью является только цилиндрический сектор. Эта картина полностью согласуется с законом сохранения полного импульса волн.

Как уже было отмечено, уравнение для продольной составляющей (скалярного потенциала) на цилиндрическом секторе остается таким же, как и на плоскостях. Это означает, что решение для скалярного потенциала не меняется при пересечении угла. Поскольку поверхностные волны можно определять по одной компоненте, очевидно, что при пересечении угла (края) рэлеевские волны не испытывают отражения. Тем не менее волны меняют направление и испытывают фазовый сдвиг. Скалярный потенциал f не содержит подобного сдвига, но его можно получить из связей (15)–(17). При этом удобно рассмотреть уравнение для $A_\pm$, которое дает $(\Lambda = 1)$:

$$\left(s_\pm - \left(\pm\frac{1}{\zeta_0}\right)\right)^2 = \Omega^2 - k_l^2 + p^2, \;\; s_\pm = \pm\frac{1}{\zeta_0} \pm is,$$

$$A_\pm = e^{-pt \pm i\tilde{y}/\zeta_0}\left(\tilde{A}_{\pm 1} e^{is\tilde{y}} + \tilde{A}_{\pm 2} e^{-is\tilde{y}}\right), \;\; e^{(\pm i)\tilde{y}/\zeta_0} = e^{\pm i\theta}. \tag{22}$$

О скачке производной на границе двух поверхностей с разной внешней кривизной. Запишем условия сшивки соответствующих решений в различных областях. Из уравнения (21), интегрируя вокруг точек разрыва $\tilde{y} = (-\pi/2)\zeta_0$, найдем условия

$$\partial_{\tilde{y}} A_{\pm} \big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \pm i \int \left(\delta\left(\tilde{y} + \frac{\pi}{2}\zeta_0 \right) - \delta\left(\tilde{y} + \theta_0\zeta_0 \right) \right) A_{\pm} d\tilde{y} = 0,$$

которые дают

$$\partial_{\tilde{y}} A_{\pm}\left(-\frac{\pi}{2}\zeta_0 + \varepsilon \right) - \partial_{\tilde{y}} A_{\pm}\left(-\frac{\pi}{2}\zeta_0 - \varepsilon \right) \mp i \frac{1}{\zeta_0} A_{\pm}\left(-\frac{\pi}{2}\zeta_0 \right) = 0;$$

$$\partial_{\tilde{y}} A_{\pm}\left(\theta_0\zeta_0 + \varepsilon \right) - \partial_{\tilde{y}} A_{\pm}\left(\theta_0\zeta_0 - \varepsilon \right) \pm i \frac{1}{\zeta_0} A_{\pm}\left(\frac{\pi}{2}\zeta_0 \right) = 0.$$

Очевидно, что функции $A_{\pm}$ остаются непрерывными в указанных точках.

Найдем соответствующие коэффициенты отражения и прохождения для волн $A_{\pm}$ в (22) и рассмотрим предел при $\zeta_0 \to 0$.

В области $\tilde{y} < (-\pi/2)\zeta_0$ запишем решение $A_{\pm}^1$. В области $\tilde{y} \in \left[(-\pi/2)\zeta_0, -\theta_0\zeta_0 \right]$ решение примем в виде $A_{\pm}^2$, а при $\tilde{y} > -\theta_0\zeta_0$ — в виде $A_{\pm}^3$, где

$$A_{\pm}^1 = e^{-pt}\left(e^{is\tilde{y}} + R_{\pm} e^{-is\tilde{y}} \right); \;\; A_{\pm}^3 = e^{-pt} T_{\pm} e^{is\tilde{y}};$$

$$A_{\pm}^2 = e^{-pt \pm i\frac{\tilde{y}}{\zeta_0}}\left(B_{\pm} e^{is\tilde{y}} + C_{\pm} e^{-is\tilde{y}} \right),$$

$$s^2 = \Omega^2 + p^2 - k_l^2,$$

а условия сшивки при $\tilde{y} = (-\pi/2)\zeta_0$ имеют вид

$$e^{-is\frac{\pi}{2}\zeta_0} + R_{\pm} e^{+is\frac{\pi}{2}\zeta_0} = e^{\mp i\frac{\pi}{2}}\left(B_{\pm} e^{-is\frac{\pi}{2}\zeta_0} + C_{\pm} e^{is\frac{\pi}{2}\zeta_0} \right);$$

$$\partial_{\tilde{y}} A_{\pm}^2\left(-\frac{\pi}{2}\zeta_0 + \varepsilon \right) - \partial_{\tilde{y}} A_{\pm}^1\left(-\frac{\pi}{2}\zeta_0 - \varepsilon \right) \mp i \frac{1}{\zeta_0} A_{\pm}^1\left(-\frac{\pi}{2}\zeta_0 \right) = 0.$$

Скачек производной автоматически устраняется разной зависимостью величин $A_{\pm}^1$ и $A_{\pm}^2$ от переменной $\tilde{y}$. Это означает искусственность происхождения скачка, связанного со скачком производной продольного вектора m, при использовании предельного перехода при $\zeta_0 \to 0$. В терминах начальных декартовых координат декартовы компоненты векторов смещения и потенциалов в этом случае оказываются просто непрерывными.

Решая приведенные выше уравнения, получаем соотношения

$$B_{\pm} = e^{\pm i(\pi/2)} = \pm i;\ C_{\pm} = e^{\pm i(\pi/2)} R_{\pm} = \pm i R_{\pm}.$$

Аналогично условия сшивки при $\tilde{y} = -\theta_0 \zeta_0$ имеют вид

$$T_{\pm}\, e^{is\theta_0\zeta_0} = e^{\pm i\theta_0} \left(B_{\pm}\, e^{is\theta_0\zeta_0} + C_{\pm}\, e^{-is\theta_0\zeta_0} \right);$$

$$\partial_{\tilde{y}} A_{\pm}^{3} \left(-\theta_0\zeta_0 + \varepsilon \right) - \partial_{\tilde{y}} A_{\pm}^{2} \left(-\theta_0\zeta_0 - \varepsilon \right) \pm i \frac{1}{\zeta_0} A_{\pm}^{2} \left(-\theta_0\zeta_0 \right) = 0$$

(скачек производной также автоматически учитывает разную зависимость от $\tilde{y}$) и дают решения для коэффициентов прохождения и отражения в виде $T_{\pm} = e^{\pm i\theta_0} B_{\pm} = \pm i e^{\pm i\theta_0} = e^{\pm i\left(\pi/2 + \theta_0\right)}$; $0 = e^{\pm i\theta_0} C_{\pm} e^{-is\theta_0\zeta_0} = R_{\pm}$.

В пределе $\zeta_0 \to 0$ область сектора $\tilde{y} \in \left[(-\pi/2)\zeta_0,\ -\theta_0\zeta_0 \right]$ вырождается в точку, соответствующую краю трещины при $\theta_0 = -\pi/2$ (или линии угла). При этом видим, что характер рассеяния не меняется, а рэлеевская волна испытывает только фазовый скачек, связанный с изменением направления распространения в трехмерном пространстве. Отражения с позиции внутренней поверхности трещины не происходит. Отсутствие отраженной волны тесно связано с внутренней геометрией поверхности трещины. В рассмотренном примере она остается плоской, в том числе и на краю (т. е. в угле). Другими словами, внутренняя геометрия границы соответствует обычной плоскости. В случае трещины конечного размера всегда будет присутствовать область внутренней (не внешней) ненулевой кривизны поверхности границы и рэлеевские волны будут испытывать отражение. В волновом уравнении появятся члены, явно зависящие от $\tilde{y}$. В частности, на трещинах конечного размера рэлеевские волны являются стоячими.

Отметим, что экспериментальное исследование рассеяния рэлеевских волн описывалось в [11, 12, 22]. Результаты настоящей работы не противоречат этим исследованиям и вполне согласуются с более ранними теоретическими работами [13, 23].

Заключение. Рассеяние рэлеевской волны при распространении вдоль семейства угловых поверхностей в главном порядке не приводит к появлению отраженной поверхностной волны. Изменение направления волны сопровождается генерацией объемных источников излучения акустических волн на цилиндрическом секторе, что вызывает рассеяние внутрь объема.

Предельный переход при стремлении к нулю радиуса кривизны цилиндрической поверхности, сопрягающей две расположенные под углом полуплоскости, не приводит к затруднениям и сохраняет все полученные выводы (в частности, об отсутствии в главном порядке отражения от края рэлеевской волны). Даже при предельном переходе, в терминах обычных декартовых компонент условия сшивки решений на ребре требуют непрерывности вектора смещения и не требуют дополнительных краевых условий. Разрывы в решениях появляются только при проекции на касательные и ортогональные к трещине направления. При рассмотрении падающей на угол плоской рэлеевской волны условия сшивки генерируют на цилиндрической части поверхности три волны, которые в свою очередь не являются поверхностными рэлеевскими волнами и соответственно излучаются в объем. Это не противоречит результатам, наблюдаемым в экспериментах по рассеянию рэлеевских волн на ребрах плоских дефектов, и вполне согласуется с законом сохранения импульса волн. Отметим, что переизлученные в объем акустические волны могут при падении на полуплоскости опять генерировать уже вторичные рэлеевские волны. Это означает, что отражение волн при пересечении края может возникать только как вторичный эффект (во втором порядке, т. е. при двукратном рассеянии).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гинзел Э. TOFD. Дифракционно-временной метод ультразвуковой дефектоскопии. М., ДПК Пресс, 2021.

[2] Кретов Е.Ф. Ультразвуковая дефектоскопия в энергомашиностроении. СПб., Свен, 2014.

[3] Неганов Д.А. Основы детерминированных нормативных методов обоснования прочности трубопроводов. *Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов*, 2018, т. 8, № 6, с. 608–617. EDN: YRNHBJ

[4] Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., Мир, 1964.

[5] Костров Б.В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. *Прикладная математика и механика,* 1966, т. 30, № 1, с. 198–202.

[6] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М., Наука, 1986.

[7] Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев, Наукова думка, 1978.

[8] Алешин Н.П., Каменский В.С., Каменский Д.В. и др. Дифракция упругой волны на свободном от напряжений диске. *ДАН СССР*, 1988, т. 302, № 4, с. 777–780. EDN: YAGSJN

[9] Алешин Н.П., Могильнер Л.Ю. Рассеяние упругих волн на плоских трещинах: применение для дефектоскопии. *Доклады РАН. Физика, технические науки,* 2023, т. 509, с. 67–75. DOI: https://doi.org/10.31857/S2686740023020013

[10] Могильнер Л.Ю., Крысько Н.В. 3D-рассеяние упругих волн на острие трещины в сварном шве. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 3, с. 42–55. EDN: EUNZDH

[11] Алешин Н.П., Могильнер Л.Ю., Щипаков Н.А. и др. Об использовании пазов для моделирования трещин при ультразвуковой дефектоскопии. *Дефектоскопия*, 2022, № 2, с. 3–12. EDN: WRDCNW.
DOI: https://doi.org/10.31857/S0130308222020014

[12] Дымкин Г.Я., Максимов А.В. Исследование отражения рэлеевских волн от подповерхностных дефектов. *Дефектоскопия*, 1988, № 3, с. 93–95.

[13] Разин А.В. Рассеяние поверхностной акустической волны Рэлея на неоднородности малых размеров в твердом полупространстве. *Известия вузов. Радиофизика*, 2010, т. 53, № 7, с. 464–480. EDN: MWFHUD

[14] Яворская И.М. Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах. *Прикладная математика и механика,* 1965, т. 29, № 3, с. 493–508.

[15] Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland, 1978.

[16] Могильнер Л.Ю. Применение цилиндрического отражателя для настройки чувствительности при ультразвуковом контроле. *Дефектоскопия,* 2018, № 7, с. 27–36. EDN: YLFBZZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0130308218070047

[17] Шерифф Р.Е., Гелдарт Л.П. Сейсморазведка. Т. 1, 2. М., Мир, 1987.

[18] Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1, 2. М., Мир, 1983.

[19] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твёрдых телах. М., Наука, 1981.

[20] Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В. и др. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М., Наука, 1991.

[21] Алешин Н.П., Кириллов А.А., Могильнер Л.Ю. и др. Общее решение задачи рассеяния упругих волн на плоской трещине. *Доклады РАН. Физика. Технические науки*, 2021, т. 499, № 1, с. 58–65. EDN: ZNHHYP.
DOI: https://doi.org/10.31857/S2686740021040027

[22] Лохов В.П. Исследование дифракции волн Рэлея на ребре трещины. *Дефектоскопия*, 1989, № 3, с. 39–47.

[23] Будаев Б.В. Дифракция упругих волн на клиновидных структурах. *Записки научного семинара ЛОМИ*, 1990, т. 186, с. 50–70.

Кириллов Александр Альбертович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Могильнер Леонид Юрьевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Сварка, диагностика и специальная робототехника» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); главный научный сотрудник ФГАУ «НУЦСК при МГТУ им. Н.Э. Баумана» (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Савелова Елена Павловна — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Кириллов А.А., Могильнер Л.Ю., Савелова Е.П. О краевых условиях при рассеянии упругих волн на плоских трещинах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, №3 (120), с. 62–79. EDN: NARUPY

ON THE BOUNDARY CONDITIONS FOR SCATTERING OF ELASTIC WAVES ON PLANE CRACKS

A.A. Kirillov[1] kirillov@bmstu.ru
L.Yu. Mogilner[1, 2] mogilner@bmstu.ru
E.P. Savelova[1] savelova@bmstu.ru

[1] **BMSTU, Moscow, Russian Federation**
[2] **“Welding and Testing” of MSTU n.a. Bauman, Moscow, Russian Federation**

Abstract

In ultrasonic flaw detection of materials and welds, the use of fine effects associated with the diffraction of elastic waves by cracks of various orientations is expanding. Therefore, the article notes the relevance of a detailed study of the problems of surface wave scattering during propagation along cracks. These problems are also relevant for studying the conditions of crack growth. In this regard, the article considers the issue of elastic surface wave scattering during propagation along a family of angular half-planes connected by a cylindrical sector. The conditions for stitching the corresponding solutions in various areas are analyzed. It is shown that no reflection of the Rayleigh wave occurs on such an edge; the wave undergoes only a phase shift. At the same time, on the cylindrical sector the wave generates

Keywords

Elastic waves, diffraction, crack edge, Rayleigh wave, surface curvature, reflection waves, transmission of waves

sources that radiate into the volume. The boundary conditions and the dispersion relation for Rayleigh waves are considered. The possibility of a derivative jump at the boundary of two surfaces with different external curvatures is analyzed. The general question of setting boundary conditions for plane cracks is also considered. It is argued that for the reflection of surface waves on the edge of a crack, the presence of internal curvature of its surface or the presence of inhomogeneities near the surface of the crack is necessary

Received 13.09.2024
Accepted 12.12.2024

REFERENCES

[1] Ginzel E. Ultrasonic time of flight diffraction. Eclipse Scientific, 2013.

[2] Kretov E.F. Ultrazvukovaya defektoskopiya v energomashinostroenii [Ultrasonic flaw detection in power machine construction]. St. Petersburg, Sven Publ., 2014.

[3] Neganov D.A. Basics of deterministic normative methods of pipeline strength substantiation. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefti i nefteproduktov* [Science and Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation], 2018, vol. 8, no. 6, pp. 608–617 (in Russ.). EDN: YRNHBJ

[4] Von Hönl H., Maue A.W., Westpfahl K. Theorie der Beugung. Springer, 1961.

[5] Kostrov B.V. Diffraction of a plane wave by a rigid wedge inserted without friction into an infinite elastic medium. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1966, vol. 30, no. 1, pp. 198–202 (in Russ.).

[6] Poruchikov V.B. Metody dinamicheskoy teorii uprugosti [Methods of dynamics elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1986.

[7] Guz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. Difraktsiya uprugikh voln [Diffraction of elastic waves]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1978.

[8] Aleshin N.P., Kamenskiy V.S., Kamenskiy D.V., et al. Diffraction of an elastic wave on a stress-free disk. *Doklady AN SSSR*, 1988, vol. 302, no. 4, pp. 777–780 (in Russ.). EDN: YAGSJN

[9] Aleshin N.P., Mogilner L.Yu. Elastic-wave scattering by a plane crack: application of flaw detection. *Dokl. Phys*., 2023, vol. 68, no. 3, pp. 97–105.
DOI: https://doi.org/10.1134/S1028335823030011

[10] Mogilner L.Yu., Krysko N.V. Elastic wave 3d scattering on a crack edge in the weld joint shve. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2024, no. 3, pp. 42–55 (in Russ.). EDN: EUNZDH

[11] Aleshin N.P., Mogilner L.Yu., Shchipakov N.A., et al. On use of slots in modelling cracks in ultrasonic testing. *Russ. J. Nondestruct. Test*., 2022, vol. 58, no. 2, pp. 71–80. DOI: https://doi.org/10.1134/S1061830922020036

[12] Dymkin G.Ya., Maksimov A.V. Study of reflection of Rayleigh waves from subsurface defects. *Defektoskopiya*, 1988, no. 3, pp. 93–95 (in Russ.).

[13] Razin A.V. Scattering of a Rayleigh surface acoustic wave by a small-size inhomogeneity in a solid half-space. *Radiophys. Quantum El.*, 2010, vol. 53, no. 7, pp. 417–431. DOI: https://doi.org/10.1007/s11141-010-9239-3

[14] Yavorskaya I.M. Diffraction of plane stationary elastic waves on smooth convex cylinders. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 493–508 (in Russ.).

[15] Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland, 1978.

[16] Mogilner L.Yu. Use of a cylindrical reflector for adjusting sensitivity in ultrasonic testing. *Defektoskopiya*, 2018, no. 7, pp. 27–36 (in Russ.). EDN: YLFBZZ.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0130308218070047

[17] Sheriff R.E., Geldart L.P. Exploration seismology. Cambridge Univ. Press, 1995.

[18] Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology. University Science Books, 2002.

[19] Viktorov I.A. Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh [Sound surface waves in solids]. Moscow, Nauka Publ., 1981.

[20] Biryukov S.V., Gulyaev Yu.V., Krylov V.V., et al. Poverkhnostnye akusticheskie volny v neodnorodnykh sredakh [Surface acoustic waves in inhomogeneous media]. Moscow, Nauka, 1991.

[21] Aleshin N.P., Kirillov A.A., Mogilner L.Yu., et al. A general solution of the problem of elastic-wave scattering by a plane crack. *Dokl. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 7, pp. 202–208. DOI: https://doi.org/10.1134/S102833582107001622

[22] Lokhov V.P. Investigation of Rayleigh wave diffraction at the crack edge. *Defektoskopiya*, 1989, no. 3, pp. 39–47 (in Russ.).

[23] Budaev B.V. Elastic wave diffraction by a wedge-shaped inclusion. *J. Math. Sci.*, 1995, vol. 73, no. 3, pp. 330–341. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02362817

Kirillov A.A. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Modeling, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Mogilner L.Yu. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Welding, Diagnostics and Special Robotics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Chief Researcher, “Welding and Testing” of MSTU n.a. Bauman (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Savelova E.P. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Modeling, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kirillov A.A., Mogilner L.Yu., Savelova E.P. On the boundary conditions for scattering of elastic waves on plane cracks. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 3 (120), pp. 62–79 (in Russ.).
EDN: NARUPY