

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ УЧАСТКА ТВЭЛА С УЧЕТОМ КОНТАКТА, РАСТРЕСКИВАНИЯ И ПОЛЗУЧЕСТИ

П.С. Аронов^{1,2}

aronov@bmstu.ru

М.П. Галанин^{1,2}

galan@keldysh.ru

А.С. Родин^{1,2}

rodin.a.s@bmstu.ru

¹ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Разработан алгоритм численного решения осесимметричных задач мультиконтактного взаимодействия системы деформируемых тел с учетом эффектов растрескивания и ползучести. Алгоритм основан на использовании mortar-метода для учета выполнения контактных условий на поверхностях тел. Объектом применения алгоритма является часть твэла. Пространственная область, в которой исследовано напряженно-деформированное состояние твердых тел, содержит 10 топливных таблеток в окружающей их оболочке. Напряжения и деформации возникают вследствие выделения теплоты в топливных таблетках. Временная зависимость мощности тепловыделения взята близкой к реальной. Подробно описан построенный численный алгоритм, основанный на использовании метода конечных элементов, в котором значительная и меняющаяся несогласованность сеток в контактирующих телах учтена с помощью mortar-метода. Процесс развития деформаций ползучести в таблетках и оболочке моделируется в рамках теории течения. Эффект растрескивания материала топливных таблеток учитывается с помощью модели размазанных трещин. Для оценки влияния различных неупругих эффектов на напряженно-деформированное состояние твэла проведена серия расчетов с использованием реалистичных термомеханических свойств материалов на интервале времени до одного года. Результаты сравнительного анализа показали, что выбранная модель размазанных тре-

Ключевые слова

Контактная задача, метод конечных элементов, mortar-метод, твэл, растрескивание, ползучесть

щин позволяет снизить уровень растягивающих напряжений в несколько раз и на качественном уровне учесть особенности поведения материалов топливных таблеток и оболочки

Поступила 09.07.2024

Принята 09.06.2025

© Автор(ы), 2025

Введение. Проведение расчетного обоснования надежности многих сложных конструкций в условиях высокоинтенсивного термомеханического нагружения требует анализа напряженно-деформированного состояния системы с учетом особенностей контактного взаимодействия отдельных деталей друг с другом. Именно в зонах контакта возникают концентраторы напряжений, которые могут оказаться критичными при оценке прочности конструкции. Ключевую роль при решении контактных задач играют численные методы [1, 2]: метод декомпозиции области [3, 4], метод штрафа [5, 6], модификации метода множителей Лагранжа [7, 8], mortar-метод [9, 10].

Настоящая работа продолжает серию публикаций, посвященных моделированию контактного взаимодействия элементов твэла в квазистатическом осесимметричном приближении. Алгоритм численного решения мультиконтактной задачи с помощью mortar-метода в [11] применен к решению демонстрационной задачи определения термомеханического состояния участка твэла из 10 таблеток в термоупругой постановке; выполнено сравнение с методом декомпозиции области. Участок твэла, включающий в себя до 100 топливных таблеток, в [12] моделировался с учетом эффекта ползучести материалов. Здесь добавлен учет растрескивания топливных таблеток, который выполнен с использованием модели размазанных трещин [13]. Эта модель сводится к тому, что в процессе нагружения материала его упругие свойства изменяются, причем в различных направлениях эти изменения происходят неравномерно. Таким образом, вследствие учета растрескивания необходимо решать задачу с ползучестью для материала с анизотропными упругими свойствами.

Математическая постановка задачи. *Цель работы* — моделирование напряженно-деформированного состояния участка твэла. Исследуем следующую задачу: в радиально-симметричной области G с кусочно-гладкой границей находится столб из $N - 1$ одинаковых цилиндрических таблеток, имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. Столб расположен внутри цилиндрической оболочки G_N . Индексом α обозначим номер тела. Таблетки и оболочка занимают области G_α с границами ∂G_α .

Для определения температурных полей в топливных таблетках решим начально-краевую задачу теплопроводности [14]:

$$\begin{aligned}
 c(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= (k_{ij}(T)T_{,j})_{,i} + q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in G_p, \quad t > 0; \\
 T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_p; \\
 -n_i k_{ij}(T)T_{,j} |_{\partial G_p} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_p \setminus S_{T3}, \quad t > 0; \\
 -n_i k_{ij}(T)T_{,j} &= \alpha [T(\mathbf{x}, t) - T_{clad}], \quad \mathbf{x} \in S_{T3}, \quad t > 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $c(T)$ — удельная теплоемкость среды; ρ — плотность среды; t — время; x_i — координаты вектора $\mathbf{x} \in G_\alpha$; $k_{ij}(T)$ — компоненты тензора теплопроводности; $T(\mathbf{x}, t)$ — температура в момент времени t ; $T_{,j} = \partial T / \partial x_j$ — компоненты градиента температуры; $q(\mathbf{x}, t)$ — мощность внутренних источников теплоты; $G_p = G \setminus G_N$ — область, включающая в себя таблетки; $T_0(\mathbf{x})$ — температура в начальный момент времени; n_i — компоненты вектора внешней нормали к границе ∂G ; α — коэффициент теплообмена на поверхности S_{T3} (внешние боковые поверхности таблеток), на которой происходит теплообмен между таблетками и оболочкой; T_{clad} — температура внутренней поверхности оболочки. Температуру оболочки полагаем постоянной.

Квазистатическая задача термомеханики описывается следующими соотношениями для каждого тела α ($i, j = 1, \dots, 3$) [14].

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha. \tag{2}$$

Кинематические граничные условия:

$$u_z(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1. \tag{3}$$

Силовые граничные условия:

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j = g_i(\mathbf{x}, t), \quad x \in \partial G \setminus S_2, \tag{4}$$

где u_i — компоненты вектора перемещения; g_i — компоненты вектора поверхностных сил.

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha. \tag{5}$$

Определяющие уравнения (закон Гука):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^c - d\varepsilon_{kl}^{crk}). \tag{6}$$

Здесь $d\sigma_{ij}$ — приращения компонент тензора напряжений Коши; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; $d\varepsilon_{kl}$ — приращения компонент

тензора полной деформации; $d\varepsilon_{kl}^T$ — приращения компонент тензора температурной деформации; $d\varepsilon_{kl}^c$ — приращения компонент тензора деформации ползучести; $d\varepsilon_{kl}^{crk}$ — приращения компонент тензора деформации растрескивания (отличны от нуля только для топливных таблеток).

При построении модели учтено, что все таблетки (кроме первой и последней) находятся в контакте в двумя соседними таблетками и оболочкой.

Дополнительные условия на участках потенциально контактных поверхностей тел с номерами 1 и 2 записываются так [4, 7]:

$$\sigma_t^1(\mathbf{x}) = \sigma_t^2(\bar{\mathbf{x}}) = 0; \quad (7)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}) = \sigma_n^2(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0, \quad (8)$$

$$u_n^1(\mathbf{x}) + u_n^2(\bar{\mathbf{x}}) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}) (u_n^1(\mathbf{x}) + u_n^2(\bar{\mathbf{x}}) - \delta_{0n}(\mathbf{x})) = 0. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{x} — точка, лежащая на поверхности первого тела S_k^1 ; $\bar{\mathbf{x}}$ — соответственная точка, находящаяся напротив нее на поверхности второго тела S_k^2 ; $\delta_{0n}(\mathbf{x}) \geq 0$ — функция, задающая начальный зазор; $u_n^\alpha = \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha$; $\sigma_t^\alpha = (\sigma^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$; $\sigma_n^\alpha = (\sigma^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \mathbf{n}^\alpha$; $\alpha = 1, 2$ (суммирование по α не проводится).

Выполнение условий (7)–(10) гарантирует совпадение поверхностей S_k^1 и S_k^2 на участке S_k^{12} , расположение которого изначально неизвестно и подлежит определению в процессе решения задачи. В решаемой мультиконтактной задаче имеются $N - 2$ контактные пары таблетка–таблетка и $N - 1$ контактные пары таблетка–оболочка.

Для описания деформации ползучести применена теория течения. Основные соотношения приведены ниже [14].

Аддитивное разложение приращения тензора полной деформации:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^{crk}. \quad (11)$$

Материал несжимаем при деформации ползучести:

$$d\varepsilon_{ii}^c = 0. \quad (12)$$

Соотношение для производной по времени тензора деформации ползучести:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \dot{\mu} \sigma'_{ij}. \quad (13)$$

Здесь

$$\dot{\mu} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_i^c}{\sigma_i},$$

$\dot{\varepsilon}_i^c = f(T, \sigma_i)$ — функция скорости деформации ползучести;

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{kl} \sigma'_{kl}}$$

— интенсивность напряжений, $\sigma'_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta_{kl}$.

Для учета растрескивания таблеток применим модель размазанных трещин, в рамках которой предполагается, что сумма приращений упругой деформации и деформации растрескивания связана с приращением напряжений следующим равенством¹: $d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{crk} = \tilde{C}_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl}$, причем коэффициенты тензора податливости \tilde{C}_{ijkl}^{-1} зависят от полных деформаций или полных напряжений (далее рассмотрен пример такого тензора в матричном виде).

Следовательно, определяющее соотношение в таблетках записывается в виде:

$$d\sigma_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} \left(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^c \right). \quad (14)$$

Для дискретизации уравнений теплопроводности (1) и задачи механики (2)–(14) применен метод конечных элементов, для учета контактного взаимодействия тел построен алгоритм на основе mortar-метода.

Построение численного алгоритма. Для получения слабой постановки квазистатической задачи деформирования твердого тела (2)–(14) с учетом контактного взаимодействия используем принцип возможных перемещений, который выражается равенством [15]

$$\int_G (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dG + \delta W_c = 0, \quad (15)$$

где $\delta \mathbf{u}$ — возможные перемещения; δW_c — вариация потенциала контактных сил.

Далее для описания контактного взаимодействия используем метод множителей Лагранжа. Для случая скольжения без трения потенциал контактных сил задан выражением [7]

¹ Suzuki M., Saitou H. Light water reactor fuel analysis code FEMAXI-6. Detailed structure and user's manual. Japan Atomic Energy Agency, 2006.

$$W_c(\mathbf{u}, \lambda_n) = \int_{S_k} \lambda_n(\mathbf{x}, t) [\mathbf{n}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)) - \delta_{0n}(\mathbf{x}, t)] dS, \quad (16)$$

где $\lambda_n(\mathbf{x}, t)$ — множитель Лагранжа, соответствующий нормальной компоненте вектора распределенных контактных сил; $\delta_{0n}(\mathbf{x}, t)$ определяется из (9).

Уравнение (15) в момент времени $t + \Delta t$ в индексной форме записи принимает вид (относящиеся к этому моменту времени величины обозначим знаком \wedge):

$$\int_G \hat{\sigma}_{ij} \delta \hat{\varepsilon}_{ij} dG + \delta \hat{W}_c = \hat{R}, \quad (17)$$

где $\hat{R} = \int_{S_2} \hat{g}_i \delta \hat{u}_i dS$ — виртуальная работа внешних сил.

Используя приращения за время Δt множителя Лагранжа $\Delta \lambda_n$ и тензоров полной $(\Delta \varepsilon_{ij})$ и неупругой $(\Delta \varepsilon_{ij}^0)$ деформаций, уравнение (17) можно переписать в следующем виде (с учетом того, что $\delta \varepsilon_{ij} = 0$):

$$\begin{aligned} \int_G C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \delta (\Delta \varepsilon_{ij}) dG + \delta W_c(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda_n) = \\ = \hat{R} - \int_G [\sigma_{ij} - C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^0] \delta (\Delta \varepsilon_{ij}) dG. \end{aligned} \quad (18)$$

Затем выполним стандартную для метода конечных элементов пространственную дискретизацию задачи [15], в рамках которой в каждом элементе пространственной сетки с номером (e) векторы приращений перемещений $\{\Delta u\}$, полных деформаций $\{\Delta \varepsilon\}$ и напряжений $\{\Delta \sigma\}$ вычисляются по соотношениям:

$$\begin{aligned} \{\Delta u\}^{(e)} &= [N]^{(e)} \{\Delta U\}^{(e)}; \\ \{\Delta \varepsilon\}^{(e)} &= [B]^{(e)} \{\Delta U\}^{(e)}; \\ \{\Delta \sigma\}^{(e)} &= [\hat{D}]^{(e)} (\{\Delta \varepsilon\}^{(e)} - \{\Delta \varepsilon^0\}^{(e)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $[N]^{(e)}$ — матрица базисных функций; $\{\Delta U\}^{(e)}$ — вектор приращений узловых перемещений; $[B]^{(e)}$ — матрица связи деформаций с перемещениями; $[\hat{D}]^{(e)}$ — матрица коэффициентов упругости.

Для дискретизации контактной задачи использован mortar-метод, который обеспечивает широкие возможности для применения несогласо-

ванных сеток на границах контактирующих тел [16, 17]. Подробное описание и особенности применения mortar-метода приведены в [18, 19], алгоритм формирования новой поверхностной (мортарной) сетки, использованный в настоящей работе, детально представлен в [11].

Каждому элементу мортарной сетки соответствует единственный элемент поверхности активного и пассивного тел. В интеграле, который задает потенциал контактных сил (16) на элементе (e) , функции λ_n , \mathbf{u}_m (перемещения на поверхности активного тела) и \mathbf{u}_s (перемещения на поверхности пассивного тела) заменяют интерполяциями

$$\hat{\lambda}_n = [L_\lambda]^{(e)} \{\lambda + \Delta\lambda\}^{(e)}, \quad \hat{\mathbf{u}}_m = [N_S]^{(em)} \{U_S + \Delta U_S\}^{(em)},$$

$$\hat{\mathbf{u}}_s = [N_S]^{(es)} \{U_S + \Delta U_S\}^{(es)},$$

где $[L_\lambda]^{(e)}$, $[N_S]^{(em)}$, $[N_S]^{(es)}$ — матрицы функций формы соответствующих одномерных элементов; $\{\lambda\}^{(e)}$ — вектор множителей Лагранжа в элементе (e) .

Применяя соотношения (19), можно переписать выражение (18) в виде матричного уравнения

$$\{\delta\Delta U\}^T \left([K] \{\Delta U\} - \{\hat{R}\} + \{\hat{F}\} + (\{\lambda\} + \{\Delta\lambda\})^T [M]^T \right) +$$

$$+ \delta\{\Delta\lambda\}^T \left([M]^T (\{U\} + \{\Delta U\}) - \{\hat{R}_\delta\} \right) = 0. \quad (20)$$

Здесь $\{\Delta U\}$ — вектор приращений перемещений; $[K]$ — матрица жесткости; $\{\hat{R}\}$ — вектор внешних сил; $\{\hat{F}\}$ — вектор внутренних сил; $\{\Delta\lambda\}$ — вектор приращений множителей Лагранжа; $[M]$ — матрица, описывающая взаимодействие тел друг с другом; $\{\hat{R}_\delta\}$ — вектор, учитывающий наличие начального зазора между контактирующими поверхностями.

С учетом произвольности векторов $\{\delta\Delta U\}$ и $\delta\{\Delta\lambda\}$ из (20) следуют дискретные уравнения равновесия твердого тела с учетом контактного взаимодействия, которые можно записать в виде [7, 15]:

$$\begin{bmatrix} K & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{R}_u \\ \hat{R}_\lambda \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Здесь

$$\{\hat{R}_u\} = \{\hat{R}\} - \{\hat{F}\} - \{\lambda\}^T [M]^T; \quad (22)$$

$$\{\hat{R}_\lambda\} = \{\hat{R}_\delta\} - [M]^T \{U\}.$$

Конфигурация контактных поверхностей заранее неизвестна, поэтому для учета ее изменений проводится цикл внешних итераций. На внешней итерации с номером $i+1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) используется mortarная сетка (и сформированная на ее основе матрица M), относящаяся к известной конфигурации с предыдущей i -й итерации.

Если приращение неупругих деформаций $\{\Delta\varepsilon^0\}$ зависит от текущих значений деформаций и напряжений (учитывается ползучесть или растрескивание), то для фиксированной контактной конфигурации система уравнений (21) является нелинейной и ее требуется линеаризовать с использованием одного из итерационных методов (имеет место цикл внутренних итераций).

В рассматриваемой задаче можно полагать, что вектор неупругих деформаций включает в себя температурные деформации и деформации ползучести: $\{\Delta\varepsilon^0\} = \{\Delta\varepsilon^T\} + \{\Delta\varepsilon^c\}$. Для оболочки матрица коэффициентов упругости $[\hat{D}]$ имеет стандартный вид [15], а для топливных таблеток при использовании модели размазанных трещин матрица $[\hat{D}]$ учитывает растрескивание материала и вычисляется с помощью матрицы коэффициентов податливости²:

$$[\hat{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\hat{E}_r & -\nu/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/\hat{E}_z & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/\hat{E}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Здесь модифицированные модули Юнга \hat{E}_i ($i = r, \varphi, z$) в зависимости от текущих значений деформаций ε_i меняются от номинального значения E (в области сильного сжатия) до некоторого предельного E_∞ (в области сильного растяжения). В расчетах использовано $E_\infty = E/10$, для задания сглаженного перехода между значениями — функция arcsctg .

Отметим, что после начала растрескивания материал таблеток приобретает упругую анизотропию, что учитывается при построении численного алгоритма нахождения деформации ползучести.

Если для линеаризации применить метод простой итерации, то на $(i + 1)$ -й внешней и $(s + 1)$ -й внутренней итерациях необходимо решить систему линейных уравнений

² Suzuki M., Saitou H. Op. cit.

$$\begin{bmatrix} K^{(i,s)} & M^{(i)} \\ M^{(i)T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U^{(i+1,s+1)} \\ \Delta \lambda^{(i+1,s+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{R}_u^{(i,s)} \\ \hat{R}_\lambda^{(i)} \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

Здесь для определения локальных векторов внутренних сил $\{\hat{F}^{(i,s)}\}^{(e)}$ (из которых складывается глобальный вектор внутренних сил $\{\hat{F}\}$ в (22)) используется вектор приращений неупругих деформаций $\{\Delta \varepsilon^{0(i,s)}\}^{(e)}$, а для определения локальных матриц жесткости $[K^{(i,s)}]^{(e)}$ в элементах, относящихся к топливным таблеткам, — матрицы $[\hat{D}]^{(i,s)}$, заданные (23).

Рассмотрим общий случай, когда моделируемая система включает в себя N тел и q пар контактных поверхностей. Тогда матрицы и векторы, входящие в (24), допускают блочное представление (опустим индексы, отвечающие за номера итераций) [20]:

$$[K] = \text{diag}(K_1, \dots, K_N); [M] = [M_1, \dots, M_N]^T;$$

$$\{\Delta U\} = \{\Delta U_1, \dots, \Delta U_N\}^T; \{\Delta \lambda\} = \{\Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_q\}^T,$$

где K_i — матрицы жесткости для i -го тела размерностью $n_i \times n_i$, $i = 1, \dots, N$ (n_i — число неизвестных перемещений в i -м теле, $n = n_1 + \dots + n_N$); M_i — матрицы размерностью $n_i \times m$ ($m = m_1 + \dots + m_q$ — общее число неизвестных множителей Лагранжа).

Для численного решения системы (24) использован алгоритм LU-разложения для разреженных матриц, реализованный в виде процедуры *SparseLU* из библиотеки *Eigen*³. Для обеспечения меньшей ширины ленты матрицы применен приближенный метод минимальной степени (*AMDOrdering* из библиотеки *Eigen*). Для использованных в расчете сеток время решения системы (24) составляло не более нескольких секунд. Отметим, что при моделировании содержащего большое число таблеток участка твэла или при использовании мелких сеток более эффективным оказалось применение модифицированных итерационных методов (Якоби или симметричной последовательной верхней релаксации) при подходящем выборе предобусловливателей и итерационных параметров [12].

Обсуждение полученных результатов. Для оценки вклада различных эффектов в итоговое напряженно-деформированное состояние выполнено несколько расчетов для участка твэла, включающего в себя 10 таблеток ($N = 11$). Чтобы учесть реалистичные характеристики материалов (сплав

³ *Eigen*. URL: <https://eigen.tuxfamily.org> (дата обращения: 01.07.2025).

циркония для оболочки и диоксид урана для топливных таблеток), использованы процедуры из библиотеки *MATPRO*⁴.

Задача теплопроводности (1) решена при заданных начальной температуре $T_0 = 300$ К и постоянной температуре оболочки $T_{clad} = 623$ К. Объемная мощность тепловыделения предполагалась синусоидальной: $q(\mathbf{x}, t) = q_0(t) \sin(\pi z / L)$, где L — высота топливного столба; $q_0(t)$ за один час линейно возрастала от нуля до постоянного значения (этап 1) и далее не менялась (этап 2).

В механической задаче (2)–(6) поставлены следующие граничные условия: нижние поверхности оболочки и нижней таблетки закреплены в осевом направлении; на верхней поверхности верхней таблетки задано постоянное давление 50 МПа, на боковой поверхности оболочки — постоянное давление 10 МПа. Начальный зазор между таблетками и оболочкой отсутствовал.

В расчете 1 для описания поведения таблеток и оболочки использована модель термоупругого тела, в расчете 2 для таблеток дополнительно учтен эффект растрескивания, в расчете 3 для всех тел дополнительно учтены деформации ползучести. Расчеты 1 и 2 проведены до момента времени 1 ч (всего выполнено 20 шагов по времени), в расчете 3 моделировался промежуток времени длительностью 1 год (характерное время работы твэла — несколько лет).

Во всех расчетах после выхода на номинальную мощность тепловыделения максимальная температура в таблетках достигала значения около 1500 К, вследствие чего столб топливных таблеток существенно смещался относительно начального положения (порядка высоты одной таблетки). В результате возникших вследствие нагрева тепловых деформаций торцы соседних таблеток, изначально полностью находившиеся в контакте друг с другом, расходились. В контакте оставалось лишь несколько элементов сетки вблизи внутренних отверстий.

В расчетах применена следующая сетка из четырехугольных элементов второго порядка: таблетки разбиты на 10 элементов в радиальном направлении и 20 элементов в осевом, оболочка — на пять элементов в радиальном направлении, в осевом направлении каждый участок оболочки, соответствующий высоте одной таблетки, разбит на 20 элементов.

Внешний итерационный процесс продолжался до стабилизации списка узлов, находящихся в контакте. На этапе 1 число и внешних, и внутренних

⁴ Hagrman D.L. *MATPRO* — a library of materials properties for use in the analysis of light water reactor fuel rod behavior. NUREG/CR-6150 TREE-1280, 1993.

итераций достигало нескольких десятков. Как правило, на этапе 2 для сходимости обоих итерационных процессов достаточно нескольких итераций.

Графики компонент тензора напряжений вдоль поперечного сечения, проведенного по центру третьей или пятой топливных таблеток (область, соответствующая координате $x > 0,0039$, относится к оболочке), показаны на рис. 1, 2. Графики радиальных перемещений и напряжений приведены на рис. 3, 4 (один график относится к внешним поверхностям таблеток, другой — к внутренней поверхности оболочки. Финальному моменту времени для расчета 1 соответствуют графики на рис. 1, а, 3, а и рис. 4, а, для расчета 2 — на рис. 1, б, для расчета 3 — на рис. 2, 3, б, и рис. 4, б. Значения напряжений на графиках приведены в соответствующих узлах квадратурной формулы Гаусса, значения перемещений — в узлах расчетной сетки.

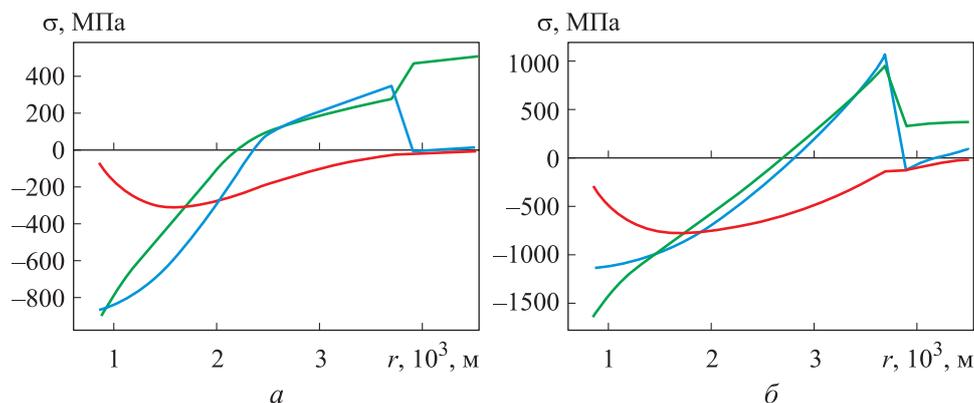


Рис. 1. Графики радиальных (—), осевых (—) и окружных (—) напряжений вдоль поперечного сечения пятой таблетки при $t = 1$ ч для расчетов 1 (а) и 2 (б)

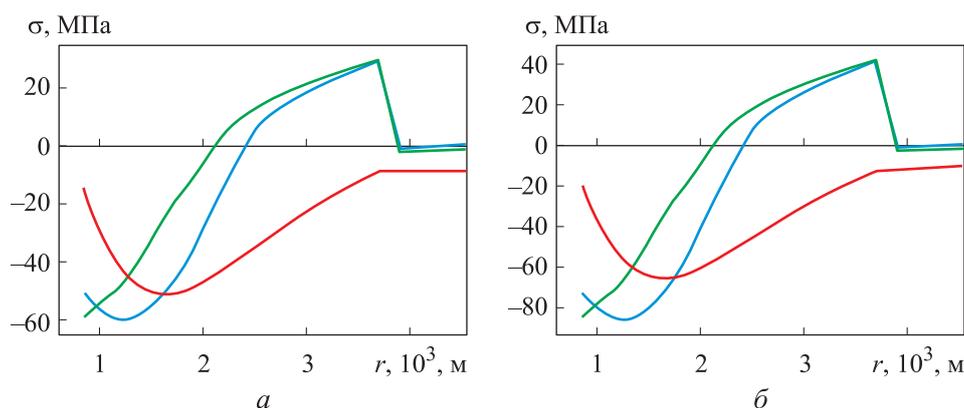


Рис. 2. Графики радиальных (—), осевых (—) и окружных (—) напряжений вдоль поперечного сечения при $t = 1$ г для расчета 3 для третьей (а) и пятой (б) таблеток

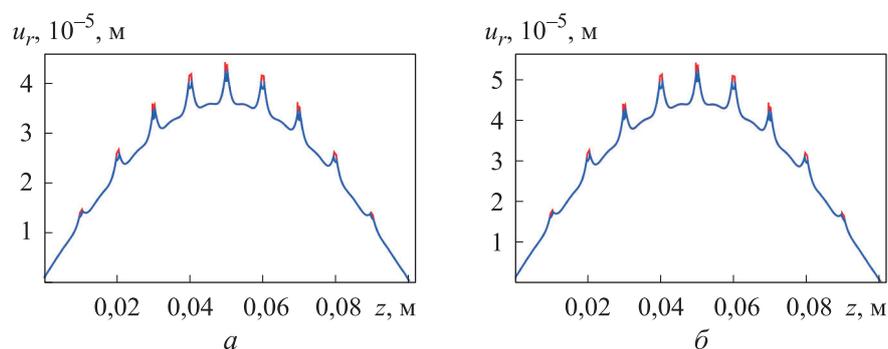


Рис. 3. Графики радиальных перемещений вдоль продольного сечения для расчета 1 при $t = 1$ ч (а) и расчета 3 при $t = 1$ г (б) для таблетки (—) и оболочки (—)

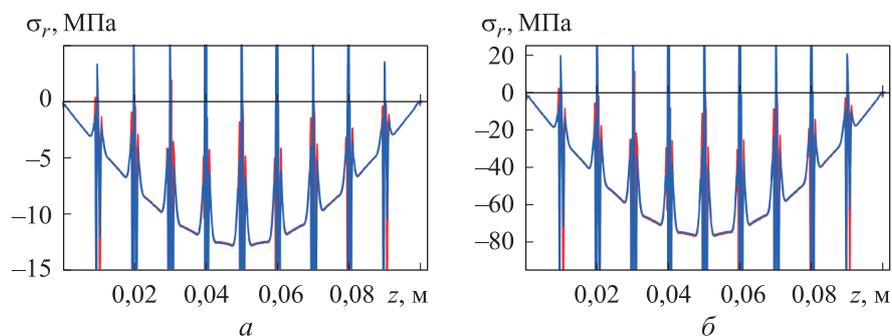


Рис. 4. Графики радиальных напряжений вдоль продольного сечения для расчета 1 при $t = 1$ ч (а) и расчета 3 при $t = 1$ г (б) для таблетки (—) и оболочки (—)

Во всех расчетах радиальные напряжения остаются непрерывными при переходе через границу контакта, в осевых и окружных напряжениях возникают разрывы.

Результаты для расчета 1 показывают, что при использовании модели термоупругого тела в таблетках ближе к внешней поверхности возникают растягивающие осевые и окружные напряжения (~ 1 ГПа). Подобные напряжения являются нефизичными, диоксид урана разрушается при значительно меньших нагрузках. Учет растрескивания с использованием модели размазанных трещин позволяет в несколько раз снизить растягивающие напряжения (до ~ 300 МПа). Сравнение графиков на рис. 1, а и б показывает, что и значения сжимающих напряжений, возникающих в таблетках ближе к внутренней поверхности, также значительно уменьшаются.

Учет эффекта ползучести в расчете 3 приводит к уменьшению значений напряжений при увеличении деформации ползучести. Итоговые

значения напряжений (как сжимающих, так и растягивающих) в топливных таблетках в конце расчета 3 на порядок меньше, чем соответствующие значения напряжений в конце термоупругого расчета 1. За счет ползучести окружные напряжения в оболочке уменьшаются с 500 МПа (см. рис. 1) практически до нуля (см. рис. 2).

Графики радиальных перемещений на рис. 3 показывают выполнение кинематической части контактных условий (7)–(10), а графики радиальных напряжений на рис. 4 — выполнение силовой части условий в контактных парах таблетка–оболочка как в термоупругом расчете 1, так и в расчете 3 с учетом растрескивания и ползучести. Заданный синусоидальный характер тепловыделения приводит к синусоидальному распределению контактных сил и соответствующих перемещений и напряжений вдоль топливного стержня. В областях контактных поверхностей вблизи углов фасок таблеток возникают концентраторы напряжений: в этих местах контактное давление может быть на порядок больше, чем в центральной зоне контакта (на рис. 4 эти пики напряжений обрезаны для большей наглядности). При последовательном измельчении сетки напряжения в концентраторах пропорционально возрастают, но интегральные силы остаются практически неизменными. На участках поверхности оболочки, находящихся между фасками соседних таблеток (не в зоне контакта), возникают небольшие растягивающие радиальные напряжения (участки синих графиков на рис. 4, расположенные выше оси). За счет ползучести значения контактных сил в конце расчета 3 уменьшаются в несколько раз по сравнению с результатами расчета 1.

Двумерные распределения компонентов тензоров напряжений и деформаций ползучести в финальный момент времени для расчета 3 приведены на рис. 5. Представлены фрагменты распределений радиальных (рис. 5, а) и окружных (рис. 5, б) напряжений, радиальных (рис. 5, в) и окружных (рис. 5, г) деформаций ползучести для участка, соответствующего верхней части третьей таблетки, всей четвертой таблетке, нижней части пятой таблетки и части оболочки. Для большей наглядности полученные перемещения (см. рис. 5) увеличены в 10 раз для таблеток и в 50 раз для оболочки.

Заключение. Построен алгоритм численного решения квазистатической задачи мультиконтактного взаимодействия системы осесимметричных термоупругих тел в условиях термомеханического нагружения. Для дискретизации контактной задачи использован mortar-метод. Выполнено моделирование участка твэла, состоящего из 10 таблеток. Использовано приближение, включающее в себя описание развития деформаций за счет

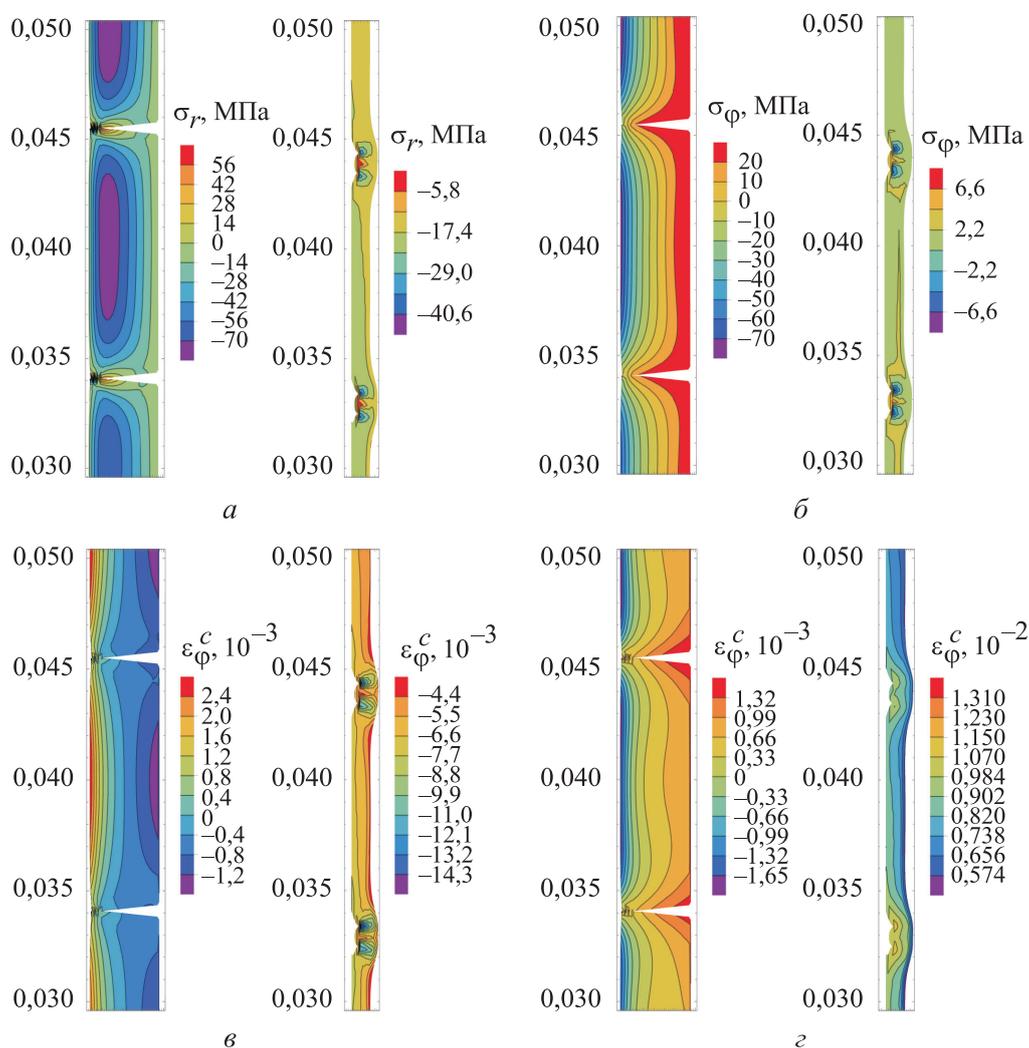


Рис. 5. Двумерные распределения радиальных (а) и окружных (б) напряжений, радиальных (в) и окружных (г) деформаций ползучести в таблетках и оболочке (расчет 3, $t = 1$ г)

растрескивания и ползучести. Заданные в примененной модели теплофизические характеристики материалов выбраны близкими к реалистичным. Результаты сравнительного анализа показали, что модель размазанных трещин позволила снизить нефизический уровень растягивающих напряжений в топливных таблетках (в термоупругом расчете) в несколько раз. Дополнительный учет эффекта ползучести привел к тому, что примерно за один год уровень напряжений и в таблетках, и в оболочке снизился на порядок. Эти результаты на качественном уровне полностью соотносятся с теоретическими представлениями о поведении материалов

при учете соответствующих эффектов и подчеркивают важность правильного выбора математической модели для получения адекватных результатов моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2005, № 1, с. 45–87. EDN: HSIVUF
- [2] Wohlmuth B. Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. *Acta Numerica*, 2011, vol. 20, pp. 569–734. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0962492911000079>
- [3] Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods — algorithms and theory. *Springer Series in Computational Mathematics*, vol. 34. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1007/b137868>
- [4] Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 2003, vol. 13, no. 8, pp. 1103–1118. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202503002830>
- [5] Babuška I. The finite element method with penalty. *Math. Comput.*, 1973, vol. 27, no. 122, pp. 221–228. DOI: <https://doi.org/10.2307/2005611>
- [6] Huněk I. On a penalty formulation for contact-impact problems. *Comput. Struct.*, 1993, vol. 48, iss. 2, pp. 193–203. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90412-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90412-7)
- [7] Wriggers P. Computational contact mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
- [8] Lleras V. A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of frictional contact problems in elastostatics. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2009, vol. 4, no. 1, pp. 163–182. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/20094108>
- [9] Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 38, iss. 3, pp. 989–1012. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142999350929>
- [10] Ben Belgacem F., Hild P., Laborde P. The mortar finite element method for contact problems. *MCM*, 1998, vol. 28, iss. 4-8, pp. 263–271. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00121-6](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00121-6)
- [11] Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Численное решение задачи контактного взаимодействия элементов твэла с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 3 (96), с. 4–22. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-3-4-22>
- [12] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of the contact interaction of the fuel element section, including up to 100 pellets, taking into account creep. *WSEAS Trans. Appl. Theor. Mech.*, 2022, vol. 17, pp. 71–78. DOI: <http://dx.doi.org/10.37394/232011.2022.17.10>

- [13] Dahlblom O., Ottosen N.S. Smearred crack analysis using generalized fictitious crack model. *J. Eng. Mech.*, 1990, vol. 116, no. 1, pp. 55–76.
DOI: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1990\)116:1\(55\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(1990)116:1(55))
- [14] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
- [15] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2000.
- [16] Popp A., Wall W.A. Dual mortar methods for computational contact mechanics — overview and recent development. *GAMM-Mitteilungen*, 2014, vol. 37, iss. 1, pp. 66–84.
DOI: <https://doi.org/10.1002/gamm.201410004>
- [17] Duong T.X., De Lorenzis L., Sauer R.A. A segmentation-free isogeometric extended mortar contact method. *Comput. Mech.*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 383–407.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1599-0>
- [18] Bernardi C., Maday Y., Rapetti F. Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitteilungen*, 2005, vol. 28, iss. 2, pp. 97–123.
DOI: <https://doi.org/10.1002/gamm.201490020>
- [19] Laursen T.A., Puso M.A., Sanders J. Mortar contact formulations for deformable–deformable contact: past contributions and new extensions for enriched and embedded interface formulations. *CMAME*, 2012, vol. 205–208, pp. 3–15.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.09.006>
- [20] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of contact interaction of fuel elements with considering the creep using the mortar method. *AIP Conf. Proc.*, 2023, vol. 2549, iss. 1, art. 210008. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0108394>

Аронов Павел Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Галанин Михаил Павлович — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Родин Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Моделирование термомеханического состояния участка твэла с учетом контакта, растрескивания и ползучести. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 4 (121), с. 4–22.
EDN: PZVQMB

SIMULATION OF THE THERMOMECHANICAL STATE OF THE FUEL ELEMENT SECTION CONSIDERING CONTACT, CRACKING AND CREEP

P.S. Aronov^{1,2}

M.P. Galanin^{1,2}

A.S. Rodin^{1,2}

aronov@bmstu.ru

galan@keldysh.ru

rodin.a.s@bmstu.ru

¹ KIAS RAS, Moscow, Russian Federation

² BMSTU, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper presents the developed numerical algorithm for solving axisymmetric multicontact interaction problems for a system of deformable bodies considering cracking and creep. We used the mortar method to consider the contact interaction. The stress-strain state simulation of a fuel element section, including 10 pellets in the surrounding cladding, has been carried out using the constructed algorithm. Stresses and deformations occur due to the release of heat in fuel pellets. The time dependence of the heat dissipation power is taken close to the real one. The paper provides a detailed description of the constructed numerical algorithm. It is based on the use of the finite element method, in which the significant and changing inconsistency of grids in contacting bodies is considering using the mortar method. We used the flow theory to model the creep deformation development and the smeared crack model to consider the fuel pellet cracking. We carried out a series of calculations using realistic thermomechanical properties of materials over a time interval of up to a year to assess the effects of various inelastic effects on the fuel rods stress-strain state. The comparative analysis results showed that the chosen model allows reducing the level of tensile stresses several times and considering the characteristics of the behavior of pellet and cladding materials at a qualitative level

Keywords

Contact problem, finite element method, mortar method, fuel element, cracking, creep

Received 09.07.2024

Accepted 09.06.2025

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Burago N.G., Kukudzhanov V.N. A survey on contact algorithms. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2005, no. 1, pp. 45–87 (in Russ.). EDN: HSIUVF

- [2] Wohlmuth B. Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. *Acta Numerica*, 2011, vol. 20, pp. 569–734. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0962492911000079>
- [3] Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods — algorithms and theory. *Springer Series in Computational Mathematics*, vol. 34. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1007/b137868>
- [4] Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 2003, vol. 13, no. 8, pp. 1103–1118. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218202503002830>
- [5] Babuška I. The finite element method with penalty. *Math. Comput.*, 1973, vol. 27, no. 122, pp. 221–228. DOI: <https://doi.org/10.2307/2005611>
- [6] Huněk I. On a penalty formulation for contact-impact problems. *Comput. Struct.*, 1993, vol. 48, iss. 2, pp. 193–203. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90412-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90412-7)
- [7] Wriggers P. Computational contact mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
- [8] Lleras V. A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of frictional contact problems in elastostatics. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2009, vol. 4, no. 1, pp. 163–182. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/20094108>
- [9] Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 38, iss. 3, pp. 989–1012. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036142999350929>
- [10] Ben Belgacem F., Hild P., Laborde P. The mortar finite element method for contact problems. *MCM*, 1998, vol. 28, iss. 4-8, pp. 263–271. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00121-6](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00121-6)
- [11] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Numerical solution to the contact interaction problem of nuclear fuel element components using the mortar method and the domain decomposition method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 3 (96), pp. 4–22 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-3-4-22>
- [12] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of the contact interaction of the fuel element section, including up to 100 pellets, taking into account creep. *WSEAS Trans. Appl. Theor. Mech.*, 2022, vol. 17, pp. 71–78. DOI: <http://dx.doi.org/10.37394/232011.2022.17.10>
- [13] Dahlblom O., Ottosen N.S. Smearred crack analysis using generalized fictitious crack model. *J. Eng. Mech.*, 1990, vol. 116, no. 1, pp. 55–76. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1990\)116:1\(55\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(1990)116:1(55))
- [14] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of continuous medium mechanics and electro-dynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.
- [15] Korobeynikov S.N. Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2000.

- [16] Popp A., Wall W.A. Dual mortar methods for computational contact mechanics — overview and recent development. *GAMM-Mitteilungen*, 2014, vol. 37, iss. 1, pp. 66–84. DOI: <https://doi.org/10.1002/gamm.201410004>
- [17] Duong T.X., De Lorenzis L., Sauer R.A. A segmentation-free isogeometric extended mortar contact method. *Comput. Mech.*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 383–407. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1599-0>
- [18] Bernardi C., Maday Y., Rapetti F. Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitteilungen*, 2005, vol. 28, iss. 2, pp. 97–123. DOI: <https://doi.org/10.1002/gamm.201490020>
- [19] Laursen T.A., Puso M.A., Sanders J. Mortar contact formulations for deformable–deformable contact: past contributions and new extensions for enriched and embedded interface formulations. *CMAME*, 2012, vol. 205–208, pp. 3–15. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.09.006>
- [20] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of contact interaction of fuel elements with considering the creep using the mortar method. *AIP Conf. Proc.*, 2023, vol. 2549, iss. 1, art. 210008. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0108394>

Aronov P.S. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Fellow, KIAM RAS (Miusskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Galanin M.P. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, KIAM RAS (Miusskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Professor, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Rodin A.S. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, KIAM RAS (Miusskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Simulation of the thermomechanical state of the fuel element section considering contact, cracking and creep. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 4 (121), pp. 4–22 (in Russ.). EDN: PZVQMB