

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ РЕЛЬСОВОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

В.И. Ерофеев
Е.Е. Лисенкова

erof.vi@yandex.ru
eelissen@yandex.ru

ИПМ РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача о колебаниях рельсовой направляющей при движении по ней протяженного состава. В качестве модели рельсовой направляющей использована балка, лежащая на упругом основании, состав рассмотрен как одномерная среда с нулевой изгибной жесткостью. Предположено, что при колебаниях на балку со стороны вагонов действует распределенная нагрузка. Уравнение, описывающее динамическое поведение балки с учетом движущейся нагрузки, приведено в эйлеровых координатах и безразмерной форме. Представлены дисперсионные кривые, рассчитанные при различных скоростях движения нагрузки. Найдены критические скорости ее движения, при переходе через которые изменяется число возбуждаемых в направляющей изгибных волн. Эти скорости зависят от физико-механических свойств направляющей, нагрузки и основания. Определено, при каких условиях частота имеет отличную от нуля мнимую часть, поскольку именно отрицательное значение мнимой части частоты ассоциируется с неустойчивостью — возможностью экспоненциального роста амплитуды возмущения во времени. Установлено минимальное значение скорости движения нагрузки, при котором наступает неустойчивость направляющей по поперечным колебаниям. Показано, что на основе анализа задачи кинематики можно строить прогнозы возможных режимов устойчивости и/или неустойчивости вибраций рельсовой направляющей при движении высокоскоростных объектов

Ключевые слова

Рельсовая направляющая, упругое основание, высокоскоростная движущаяся нагрузка, критическая скорость, неустойчивость

Поступила 30.09.2024
Принята 13.12.2024
© Автор(ы), 2025

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-19-00613)

Введение. Вопросам динамики стержневых элементов конструкций, несущих движущиеся нагрузки и закрепления, уделяется достаточное внимание исследователей, что обусловлено ее широким практическим применением (см. [1–8] и цитируемую в них литературу). Особый интерес представляют задачи о колебаниях рельсовой направляющей под действием высокоскоростных нагрузок [9–13]. Этот интерес обусловлен развитием скоростного наземного транспорта, поездов на магнитном подвесе и совершенствованием конструкций реактивных катапультирующих установок (ракетных треков), применяемых при наземной отработке авиационной и ракетной техники [14, 15]. В перечисленных задачах возможны неустойчивые режимы колебаний [11, 14–16], способные привести к аварийным ситуациям, о чем свидетельствуют результаты измерений, проводимых железнодорожными компаниями, а также накопленный опыт эксплуатации ракетных треков. Неустойчивость может возникнуть, когда источник возмущений (поезд) движется со скоростью, близкой к скоростям волн в рельсовой направляющей, контактной подвеске или поверхностных рэлеевских волн в окружающем железнодорожное полотно грунте. Ранее полагалось, что такие скорости недостижимы, однако современные высокоскоростные поезда развивают скорость, сравнимую со скоростью распространения волн. В пользу этого утверждения приведем некоторые цифры. В зависимости от типа почвы скорость рэлеевских волн варьируется в пределах 150... 800 км/ч [11]. В контактном проводе скорость изгибных волн составляет примерно 200...400 км/ч. Такие поезда, как, например, CR400 Fuxing (КНР), TGV (Франция), ICE (Германия) и Shinkansen (Япония), которые развивают скорость более 300 км/ч, не только могут достичь нижнего предела, но и превысить его. Поэтому изучение потенциально опасных эффектов, связанных с высокой скоростью движения поезда, к которым относят нарастание вибраций рельсовой направляющей и подвески токосяема, имеет как теоретическое, так и практическое значение.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о колебаниях железнодорожного пути при движении по нему со скоростью w_0 состава бесконечной длины [3]. В качестве модели рельсовой направляющей используется лежащая на упругом основании балка, в качестве модели состава — одномерная среда с нулевой изгибной жесткостью. При колебаниях на рельсовый путь со стороны вагонов действует распределенная нагрузка. Уравнение, описывающее динамическое поведение балки с учетом движущейся нагрузки в эйлеровых координатах и безразмерной форме записи [3], имеет вид

$$\begin{aligned} (1+n_{11})\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + (1-J_0 w_0^2)\frac{\partial^4 u}{\partial \varepsilon^4} + 2w_0 n_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \varepsilon} - 2w_0 J_0\frac{\partial^4 u}{\partial \tau \partial \varepsilon^3} - \\ - J_0\frac{\partial^4 u}{\partial \tau^2 \partial \varepsilon^2} + n_{11} w_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + k u = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь использованы принятые в [3] обозначения безразмерных переменных соответствующих времени τ , пространственной координате ε , поперечному смещению срединной линии стержня $u(\tau, \varepsilon)$, массе n_{11} и моменту инерции нагрузки J_0 , ее скорости w_0 , коэффициенту жесткости упругого основания k .

В отличие от [3], где рассмотрены структуры конечной длины, которые применяются, в частности, при анализе железнодорожных мостов, ниже приведены результаты исследования динамики бесконечно длинной структуры, например, обычного железнодорожного полотна или контактной подвески.

Анализ задачи кинематики и результаты расчетов волновых процессов в зависимости от скорости движения нагрузки. Полагая $u \sim \exp(i\Omega\tau - iK\varepsilon)$, т. е. отождествляя возмущения с бегущими гармоническими волнами, где Ω , K — безразмерные циклическая частота и волновое число, из (1) получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} -(1+n_{11})\Omega^2 + (1-J_0 w_0^2)K^4 + 2w_0 n_{11}\Omega K + 2w_0 J_0 \Omega K^3 - \\ - J_0 \Omega^2 K^2 - n_{11} w_0^2 K^2 + k = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая частоту ω внешнего источника возмущений (нагрузки) заданной и совпадающей с частотой излучаемых волн $\omega = \Omega$, из условия вырождения корней уравнения (2) определяют критические скорости (w_{0*}) движения нагрузки. Эти скорости являются решениями уравнения 10-го порядка:

$$\begin{aligned} J_0 n_{11}^4 (\omega^2 - k) w_{0*}^{10} + (3J_0^2 \omega^2 n_{11} - 8J_0^2 (\omega^2 - k) - n_{11}^2) (\omega^2 - k) n_{11}^2 w_{0*}^8 + \\ + \left[3J_0^2 \omega^4 n_{11}^2 (\omega^2 - k) + 16J_0^2 (\omega^2 - k)^3 + 16n_{11}^2 (\omega^2 - k)^2 - 24n_{11}^3 \omega^2 (\omega^2 - k) + \right. \\ \left. + 20J_0^2 n_{11} \omega^2 (\omega^2 - k)^2 - n_{11}^4 \omega^4 \right] J_0 w_{0*}^6 + \\ + \left[n_{11}^4 \omega^4 - 48J_0^2 (\omega^2 - k)^3 + (J_0^4 \omega^4 - 8n_{11}^2 - 52J_0^2 n_{11} \omega^2) (\omega^2 - k)^2 + \right. \\ \left. + (8J_0^2 n_{11} \omega^2 + J_0^4 \omega^4 + 20n_{11}^2) n_{11} \omega^2 (\omega^2 - k) - 3J_0^2 n_{11}^3 \omega^6 \right] w_{0*}^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[48(\omega^2 - k)^3 + 20\omega^2(\omega^2 - k)^2(4n_{11} - J_0^2\omega^2) + \right. \\
 & + 4n_{11}\omega^4(\omega^2 - k)(13n_{11} - 6J_0^2\omega^2) - 3J_0^2\omega^8n_{11}^2 + 20n_{11}^3\omega^6 \left. \right] J_0w_0^2 - \\
 & - (\omega^2(1+n_{11}) - k) \left[J_0^2\omega^4 + 4\omega^2(1+n_{11}) - 4k \right]^2 = 0. \quad (3)
 \end{aligned}$$

При переходе через критические скорости изменяется число возбуждаемых в рельсовой направляющей волн. Поэтому кривые $w_0^*(\omega)$, определяемые уравнением (3) в неявном виде, разделяют пространство параметров (ω, w_0) на области качественно различных случаев возбуждения изгибных волн в балке.

Для выявления условий неустойчивости выразим из (2) частоту Ω через волновое число K :

$$\Omega = \frac{w_0K(n_{11} + J_0K^2) \pm \sqrt{(1+n_{11} + J_0K^2)(K^4 + k) - w_0^2K^2(n_{11} + J_0K^2)}}{(1+n_{11} + J_0K^2)}. \quad (4)$$

Установим, при каких условиях частота Ω имеет отличную от нуля мнимую часть $\text{Im}(\Omega)$, поскольку именно отрицательное значение мнимой части частоты ассоциируется с неустойчивостью — возможностью экспоненциального роста амплитуды возмущения во времени.

Границе области неустойчивости соответствует случай, когда подкоренное выражение в (4) изменяет знак, т. е. когда

$$w_0 = \sqrt{\frac{(1+n_{11} + J_0K^2)(K^4 + k)}{K^2(n_{11} + J_0K^2)}}.$$

Спектр допустимых значений волнового числа K определяется, в основном, протяженностью балки. Для балки, неограниченной по длине ($0 < K < \infty$), минимальное значение скорости w_0 движения нагрузки, при котором наступает неустойчивость, определяется из решения алгебраического уравнения восьмого порядка:

$$\begin{aligned}
 & J_0^2n_{11}^2w_0^8 + 2J_0\Theta w_0^6 + (\gamma^2 - 12kJ_0^2)w_0^4 + \\
 & + 4kJ_0(\gamma - 2\Theta - 4n_{11}^2 + 3n_{11} + 3)w_0^2 - \Lambda = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Theta & = n_{11}^3 - n_{11}^2 + (n_{11} + 2)kJ_0^2; \quad \gamma = n_{11}^2 + n_{11} - kJ_0^2; \\
 \Lambda & = 4k\left((n_{11} + 1)^2 + kJ_0^2\right)^2.
 \end{aligned}$$

Оно имеет вид

$$w_0 = w_{**} = \left\{ -\frac{1}{2J_0 n_{11}^2} \left[\Theta + \sqrt{c} - \sqrt{(\Theta + \sqrt{c})^2 + 2J_0 n_{11}^3 \left(\sqrt{(yJ_0 n_{11})^2 + 4\Lambda} - yJ_0 n_{11} \right)} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c &= 4(n_{11} + 1)k^2 J_0^4 + 4n_{11}^2(n_{11}^2 + n_{11} + 2)kJ_0^2 - 4n_{11}^5 + yn_{11}^4 J_0^2; \\ y &= \frac{1}{3J_0^2 n_{11}^2} \left(\gamma^2 - 12kJ_0^2 - \sqrt[3]{b - \gamma^6 - a} + \sqrt[3]{b + \gamma^6 + a} \right), \\ b &= 24 \left\{ 3kJ_0^2(n_{11} + 1)(n_{11}^2 + kJ_0^2)(\gamma^3 + 27kJ_0^2(n_{11} + 1)(n_{11}^2 + kJ_0^2))^3 \right\}^{1/2}, \\ a &= 108kJ_0^2(n_{11} + 1) \left[5n_{11}^5(n_{11} + 1)^3 - kJ_0^2 n_{11}^3(n_{11} + 1)(10n_{11}^2 + 59n_{11} - 5) - \right. \\ &\quad \left. - 123k^2 J_0^4 n_{11}^2(n_{11} + 1)^2 + k^3 J_0^6(10n_{11}^2 - 39n_{11} - 54) - 5k^4 J_0^8 \right]. \end{aligned}$$

Соответствующая выражению (5) прямая разделяет плоскость параметров задачи на области устойчивости и неустойчивости направляющей по поперечным колебаниям.

В результате анализа задачи кинематики имеем следующую картину возбуждения волн в направляющей. В случае неподвижного поезда ($w_0 = 0$) критическая частота, при превышении которой в рельсовой направляющей возбуждаются бегущие волны, определяется выражением

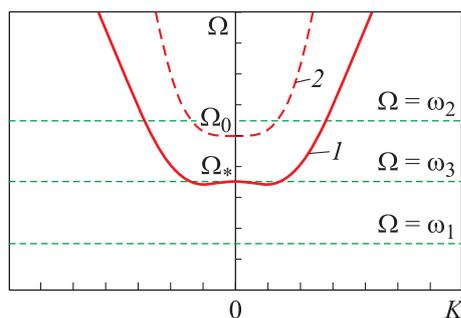
$$\Omega_{**} = \frac{\sqrt{2}}{J_0} \sqrt{\left((1 + n_{11})^2 + J_0^2 k \right)^{1/2} - (1 + n_{11})}.$$

Это значение (как показывают результаты исследования) меньше, чем для балки, лежащей на упругом основании, в отсутствие нагрузки $\Omega_{**} < \Omega_0 = \sqrt{k}$, т. е. наличие инерционной нагрузки приводит к сужению области $(0, \Omega_{**}) \subset (0, \Omega_0)$, в которой низкочастотное поле с частотой $\Omega < \Omega_{**}$ не распространяется, а экспоненциально убывает по мере проникания в систему.

Если частота действующего источника ω колебаний не превышает значение Ω_{**} , то соответствующая кинематическому инварианту [2] прямая $\Omega = \omega = \omega_1$ не пересекает дисперсионных кривых (рис. 1), следо-

вательно, бегущие волны не возбуждаются и поле поперечных смещений локализовано. Если частота источника $\omega > \Omega_* = \sqrt{k/(1+n_{11})}$, то прямая $\Omega = \omega = \omega_2 = \text{const}$ (см. рис. 1) пересекает дисперсионную кривую в двух точках, следовательно, наряду с локальным полем возбуждаются две волны. Как фазовые ($v_{ph} = \Omega/K$), так и групповые ($v_{gr} = d\Omega/dK$) скорости этих волн направлены в противоположные стороны от источника. При $\Omega_{**} < \omega < \Omega_*$ прямая, соответствующая кинематическому инварианту, пересекает дисперсионную кривую в четырех точках (см. рис. 1). Таким образом, источник возбуждает четыре волны (по две с каждой стороны от него). Причем наряду с прямыми волнами возбуждаются и так называемые обратные [17, 18], у которых фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны. Так, у одной из волн, отводящей энергию вправо от источника, фазовая скорость ориентирована влево (к источнику), а у другой волны, отводящей энергию влево от источника, фазовая скорость направлена вправо (к источнику).

Рис. 1. Дисперсионные кривые для лежащей на упругом основании балки при наличии (1) и отсутствии (2) инерционной нагрузки



Отметим, что свойства симметрии позволяют ограничиться построением дисперсионных ветвей не во всей области их определения, поэтому на рис. 1 построены дисперсионные ветви в области положительных частот $\text{Re } \Omega > 0$ и всех возможных значений волнового числа K .

При движении нагрузки ($w_0 \neq 0$) дисперсионная кривая, описываемая (4), где знак «+» соответствует верхней ветви дисперсионной кривой, знак «-» — нижней (рис. 2), теряет симметрию относительно оси ординат, имеющуюся в стационарном случае $w_0 = 0$. Когда скорость движения нагрузки мала $w_0 < \sqrt{2kJ_0 \left(\sqrt{1+n_{11}^2/(kJ_0^2)} - 1 \right) / n_{11}^2}$, ветви дисперсионных кривых (4) не пересекают оси абсцисс (см. рис. 2). В зависимости от частоты действующего источника ω возможны следующие качественно различные случаи возбуждения поперечных колебаний направляющей. Если $w_0 < w_{0*}$ (w_{0*} — положительный действительный корень уравнения (3)), то, как и в случае неподвижной нагрузки, соответствующие

щая кинематическому инварианту прямая $\Omega = \omega = \omega_1$ не пересекает дисперсионных кривых, бегущие волны не возбуждаются и поле поперечных смещений локализовано. Если частота источника достаточно велика, то прямая $\Omega = \omega = \text{const}$ (см. рис. 2) пересекает дисперсионную кривую в двух точках, следовательно, наряду с локальным полем возбуждаются две волны (по одной с каждой стороны от источника). При $\omega > \Omega_*$ как фазовые, так и групповые скорости этих волн направлены в противоположные стороны от источника. При $\omega < \Omega_*$ у отводящей энергию вправо от источника волны фазовая скорость направлена влево.

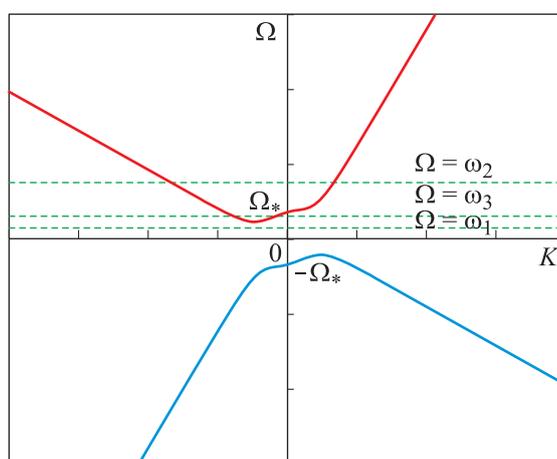


Рис. 2. Графическая интерпретация задачи кинематики волн при малых скоростях движения нагрузки

С увеличением скорости движения нагрузки область, где действительным частотам не соответствуют действительные волновые числа, уменьшается вплоть до нуля (рис. 3), когда

$$w_0 = \sqrt{2kJ_0 \left(\sqrt{1+n_{11}^2/(kJ_0^2)} - 1 \right) / n_{11}^2}. \quad (6)$$

В этом случае дисперсионные кривые (3) касаются оси абсцисс (см. рис. 3) в точках

$$K_{1,2} = \mp \sqrt{kJ_0 \left(\sqrt{1+n_{11}^2/(kJ_0^2)} + 1 \right) / n_{11}}.$$

В диапазоне скоростей $\sqrt{2kJ_0 \left(\sqrt{1+n_{11}^2/(kJ_0^2)} - 1 \right) / n_{11}^2} < w_0 < w_{**}$ дисперсионные кривые пересекают ось абсцисс, но не касаются друг друга (рис. 4). Если диапазон скоростей

$$\sqrt{2kJ_0 \left(\sqrt{1+n_{11}^2/(kJ_0^2)} - 1 \right) / n_{11}^2} < w_0 < 1/\sqrt{J_0}, \quad (7)$$

то дисперсионные кривые пересекают ось абсцисс в четырех точках (рис. 4, а):

$$K_{1,2} = -\sqrt{\frac{n_{11}w_0^2 \pm \sqrt{n_{11}^2w_0^4 - 4k(1-J_0w_0^2)}}{2(1-J_0w_0^2)}};$$

$$K_{3,4} = \sqrt{\frac{n_{11}w_0^2 \mp \sqrt{n_{11}^2w_0^4 - 4k(1-J_0w_0^2)}}{2(1-J_0w_0^2)}}.$$

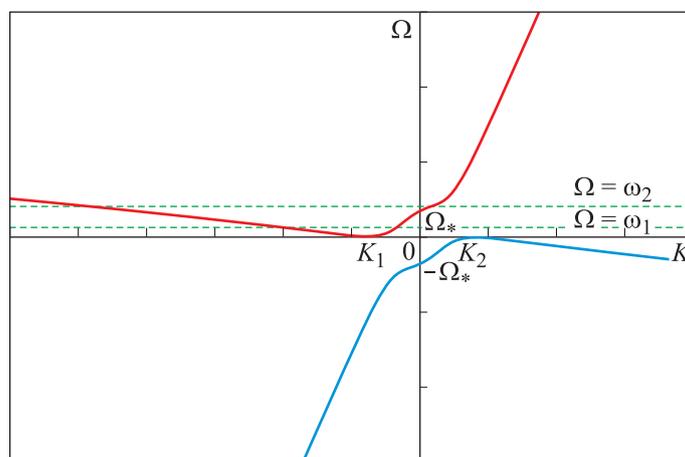


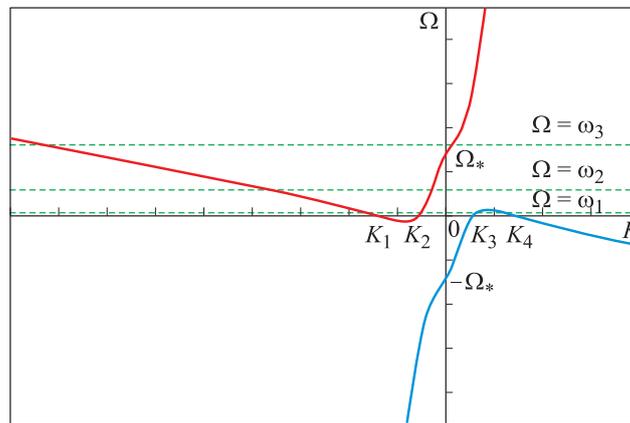
Рис. 3. Графическая интерпретация задачи кинематики волн при скорости движения нагрузки (6)

Прямая, соответствующая кинематическому инварианту $\Omega = \omega_1$, в области частот $(0, \Omega_+)$, где Ω_+ — положительный действительный корень уравнения

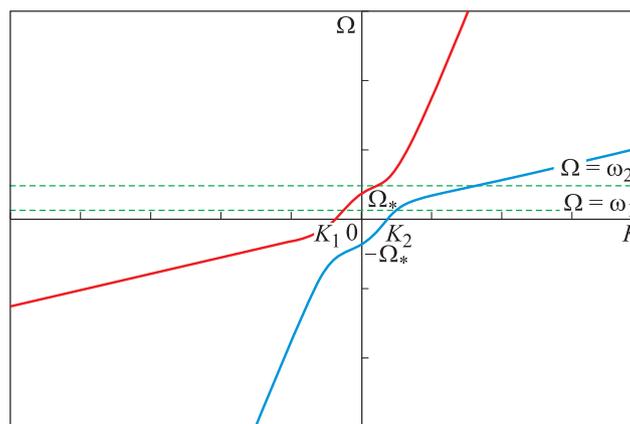
$$J_0^4 (1+n_{11}) \Omega^{10} + \left[8(1+n_{11})^2 + J_0 (20+24n_{11}+3n_{11}^2) w_0^2 - \right. \\ \left. - J_0^2 (1+n_{11}) w_0^4 - J_0^2 k \right] J_0^2 \Omega^8 + \left[16(1+n_{11})^3 - 16J_0^2 k (1+n_{11}) + \right. \\ \left. + (J_0^2 k (2+n_{11}) + 48 + 52n_{11} - 8n_{11}^2 + 3n_{11}^3) J_0^2 w_0^4 - \right. \\ \left. - J_0^3 (16+20n_{11}+3n_{11}^2) w_0^6 - (48+80n_{11}+52n_{11}^2+20n_{11}^3 + \right. \\ \left. + J_0^2 k (40+24n_{11})) J_0 w_0^2 \right] \Omega^6 + \\ \left. + \left[J_0^2 n_{11}^2 (8-3n_{11}) w_0^8 + (J_0^2 k (48+40n_{11}+3n_{11}^2) - 16n_{11}^2 + 24n_{11}^3 + n_{11}^4) J_0 w_0^6 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (8n_{11}^2 - 20n_{11}^3 - n_{11}^4 + J_0^2 k (-144 - 104n_{11} + 8n_{11}^2 - J_0^2 k)) w_0^4 + (144 + 160n_{11} + \\
 & + 52n_{11}^2 + 20J_0^2 k) J_0 k w_0^2 + k (-48(1 + n_{11})^2 + 8J_0^2 k) \Omega^4 + [-J_0 n_{11}^4 w_0^{10} + \\
 & + (-16J_0^2 k + 3n_{11} J_0^2 k + n_{11}^2) n_{11}^2 w_0^8 + (-J_0^2 k (48 + 20n_{11}) + 32n_{11}^2 - 24n_{11}^3) J_0 k w_0^6 + \\
 & + (-16n_{11}^2 + 20n_{11}^3 + J_0^2 k (144 + 52n_{11})) k w_0^4 - \\
 & - (144 + 80n_{11}) J_0 k^2 w_0^2 + 48k^2 (1 + n_{11}) \Omega^2 + \\
 & + k (J_0 w_0^2 - 1) [n_{11}^2 w_0^4 + 4k (J_0 w_0^2 - 1)]^2 = 0,
 \end{aligned}$$

пересекает дисперсионные кривые в четырех точках, следовательно, источник возбуждает четыре волны. Если $w > \Omega_+$, то наряду с собственным полем будут возбуждаться две волны: обе прямые при $w > \Omega_+$, прямая и обратная в области $\Omega_+ < w < \Omega_*$.



а



б

Рис. 4. Графическая интерпретация задачи кинематики волн в диапазоне скоростей (7) (а) и (8) (б) движения нагрузки

Если скорость движения нагрузки

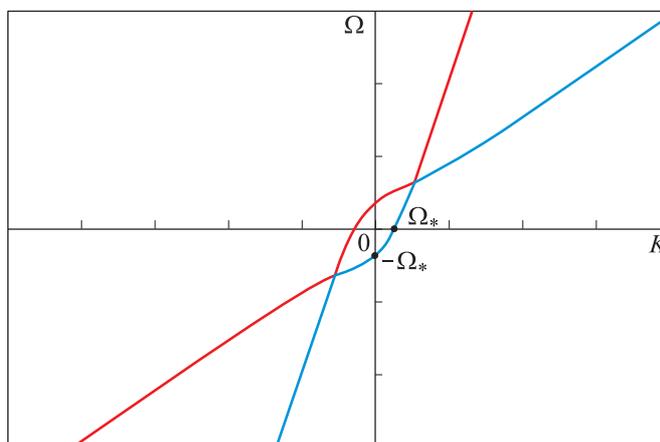
$$w_{**} > w_0 > 1/\sqrt{J_0}, \quad (8)$$

то ветви дисперсионной кривой пересекают ось абсцисс в двух точках (рис. 4, б):

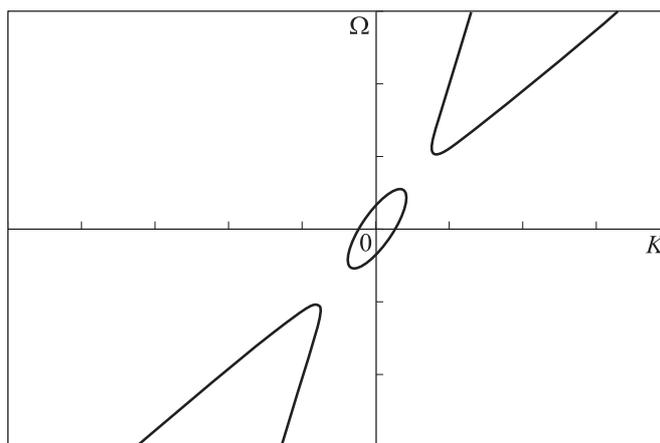
$$K_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{\sqrt{n_{11}^2 w_0^4 + 4k(J_0 w_0^2 - 1)} - n_{11} w_0^2}{2(J_0 w_0^2 - 1)}}.$$

Источник возбуждает две волны: прямую и обратную в диапазоне частот $0 < \omega < \Omega_*$ и обе прямые в случае $\omega > \Omega_*$.

Если $w_0 = w_{**}$, то дисперсионные кривые, определяемые (3), касаются друг друга в двух точках (рис. 5, а). В области неустойчивости $w_0 > w_{**}$



а



б

Рис. 5. Дисперсионные кривые при скорости движения нагрузки $w_0 = w_{**}$ (а) и $w_0 > w_{**}$ (б)

характер дисперсионной зависимости качественно меняется (рис. 5, б) и появляется спектр значений волновых чисел, для которых частоты комплексные. Следовательно, самовозбуждаться будут волны только с этим пространственным спектром.

Заключение. Наличие конвективных слагаемых в уравнении (1) динамики распределенной системы, описывающего рельсовую направляющую, повлекло за собой зависимость дисперсионного уравнения (2) еще от одного параметра — скорости движения нагрузки w_0 , а кинематический инвариант [2, 19] свелся к равенству частот Ω всех волн частоте ω действующего источника возмущений: $\Omega = \omega$.

Задача кинематики позволяет не только определять частоты и волновые числа возбуждаемых волн, но и строить в пространстве ее параметров области с качественно различными режимами образования волн. Границами этих областей являются найденные критические скорости движения нагрузки, которые зависят от ее параметров, физико-механических свойств направляющей и упругого основания. Кроме того, на основе анализа задачи кинематики можно строить прогнозы возможных режимов устойчивости и/или неустойчивости вибраций рельсовой направляющей и подвески токоослема при движении высокоскоростных объектов.

Необходимо отметить следующее: линейная теория работает только вблизи порога возникновения неустойчивости, поэтому рост изгибных колебаний балки может привести к тому, что они перестанут удовлетворять линейному уравнению (1). При этом ангармонизм изгибных волн, распространяющихся в рельсовой направляющей, может быть исследован с использованием математической модели, учитывающей нелинейную упругость не балки, а деформируемого основания, с которым эта балка взаимодействует [20].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Fryba L. Vibration of solids and structures under moving load. Thomas Telford, 1999.
- [2] Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [3] Svetlitsky V.A. Dynamics of rods. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-26490-6>
- [4] Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. Самара, Изд-во СамГТУ, 2017.

- [5] Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В. Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость. *Известия РАН. МТТ*, 2018, № 1, с. 123–133. EDN: YOFWFG
- [6] Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation and subject to a moving load. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1295–1306. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070116>
- [7] Scheidl J., Vetyukov Yu. Review and perspectives in applied mechanics of axially moving flexible structures. *Acta Mech.*, 2023, vol. 234, no. 4, pp. 1331–1364. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03514-5>
- [8] Поляков В.Ю., Саурин В.В. О подавлении колебаний балочных мостов поездом как инерционным демпфером. *Известия РАН. МТТ*, 2023, № 6, с. 89–97. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329923600251>
- [9] Коган А.Я., Никитин Д.А., Полещук И.В. Колебания пути при высоких скоростях движения экипажей и ударном взаимодействии колеса и рельса. М., Интекст, 2007.
- [10] Иванченко И.И. Динамическое взаимодействие мостов и высокоскоростных железнодорожных составов. *Известия РАН. МТТ*, 2011, № 3, с. 146–160. EDN: NTXAIV
- [11] Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. Saarbrücken, Lambert Academic Publ., 2015.
- [12] Ivanchenko I.I. Method to calculate rods under an inertial load moving with variable speed. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 1035–1041. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420070110>
- [13] Lei X. High speed railway track dynamics. Models, algorithms and applications, Singapore, Springer, 2022.
- [14] Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance. *Johns Hopkins APL Tech. Dig.*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 448–458.
- [15] Бугова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И. и др. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2015, № 1, с. 3–8. EDN: TKTLCX
- [16] Zhang D.-B., Tang Y.-Q., Liang R.-Q., et al. Dynamic stability of an axially transporting beam with two-frequency parametric excitation and internal resonance. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2021, vol. 85, art. 104084. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104084>
- [17] Шевченко В.В. Прямые и обратные волны: три определения, их взаимосвязь и условия применимости. *УФН*, 2007, т. 177, № 3, с. 301–306. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200703c.0301>
- [18] Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании. *Акустический журнал*, 2023, т. 69, № 3, с. 277–283. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0320791922600342>

[19] Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании. *Акустический журнал*, 2016, т. 62, № 6, с. 639–647. EDN: WXSPQF. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0320791916060058>

[20] Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Царев И.С. Эволюция квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 2 (107), с. 83–97. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97>

Ерофеев Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор ИПМ РАН (Российская Федерация, 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85).

Лисенкова Елена Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник ИПМ РАН (Российская Федерация, 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Неустойчивость колебаний рельсовой направляющей при воздействии движущейся распределенной нагрузки. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 4 (121), с. 40–55. EDN: QFQABG

**INSTABILITY OF THE RAIL GUIDE VIBRATIONS
UNDER THE INFLUENCE OF A MOVING DISTRIBUTED LOAD**

V.I. Erofeev

erof.vi@yandex.ru

E.E. Lisenkova

eelissen@yandex.ru

MERI RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

Abstract

The article considers the problem of oscillations of a rail guide when an extended train is moving along it. A beam lying on an elastic base is used as a model of a rail guide, the composition is considered as a one-dimensional medium with zero bending stiffness. It is assumed that a distributed load acts on the beam from the side of the wagons. The equation describing the dynamic behavior of the beam, taking into account the moving load, is given in Eulerian coordinates and dimensionless form. Dispersion curves calculated at different speeds of the load movement are presented. The critical velocities of its movement are found, during

Keywords

Rail guide, elastic foundation, high-speed moving load, critical speed, instability

the transition through which the number of bending waves excited in the guide changes. These speeds depend on the physical and mechanical properties of the guide, the load and the base. It is determined under what conditions the frequency has an imaginary part other than zero, since it is the negative value of the imaginary part of the frequency that is associated with instability — the possibility of exponential growth of the amplitude of the disturbance over time. The minimum value of the load speed is set, at which the guide becomes unstable due to transverse vibrations. It is shown that based on the analysis of the kinematics problem, it is possible to make predictions of possible modes of stability and/or instability of vibrations of the rail guide during the movement of high-speed objects

Received 30.09.2024

Accepted 13.12.2024

© Author(s), 2025

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 20-19-00613)

REFERENCES

- [1] Fryba L. Vibration of solids and structures under moving load. Thomas Telford, 1999.
- [2] Vesnitskiy A.I. Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2001.
- [3] Svetlitskiy V.A. Dynamics of rods. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005.
DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-26490-6>
- [4] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie kolebaniy odnomernykh mekhanicheskikh sistem s dvizhushchimisya granitsami [Mathematical modeling and study of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries]. Samara, SamSTU Publ., 2017.
- [5] Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. Natural vibrations of a liquid-transporting pipeline on an elastic base. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 101–110.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654418010120>
- [6] Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation and subject to a moving load. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1295–1306. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070116>
- [7] Scheidl J., Vetyukov Yu. Review and perspectives in applied mechanics of axially moving flexible structures. *Acta Mech.*, 2023, vol. 234, no. 4, pp. 1331–1364.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03514-5>
- [8] Polyakov V.Yu., Saurin V.V. Suppression of vibrations of beam bridges by a train as an inertial damper. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 6, pp. 2003–2010.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423600666>

- [9] Kogan A.Ya., Nikitin D.A., Poleshchuk I.V. Kolebaniya puti pri vysokikh skorostyakh dvizheniya ekipazhey i udarnom vzaimodeystvii koleasa i relsa [Track vibrations at high vehicle speeds and impact interactions between the wheel and the rail]. Moscow, Intekst Publ., 2007.
- [10] Ivanchenko I.I. Dynamic interaction of bridges and high-speed trains. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 3, pp. 455–466. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411030125>
- [11] Metrikin A.V., Verichev S.N., Vostrukhov A.V. Fundamentalnye zadachi vysokoskorostnogo nazemnogo transporta [Fundamental tasks of high-speed land transport]. Saarbrücken, Lambert Academic Publ., 2015.
- [12] Ivanchenko I.I. Method to calculate rods under an inertial load moving with variable speed. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 1035–1041. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420070110>
- [13] Lei X. High speed railway track dynamics. Models, algorithms and applications, Singapore, Springer, 2022.
- [14] Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance. *Johns Hopkins APL Tech. Dig.*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 448–458.
- [15] Butova S.V., Gerasimov S.I., Erofeev V.I., et al. Stability of high-speed objects moving along a rocket track guide. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2015, vol. 44, no. 1, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618815010021>
- [16] Zhang D.-B., Tang Y.-Q., Liang R.-Q., et al. Dynamic stability of an axially transporting beam with two-frequency parametric excitation and internal resonance. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2021, vol. 85, art. 104084. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104084>
- [17] Shevchenko V.V. Forward and backward waves: three definitions and their interrelation and applicability. *Phys. Usp.*, 2007, vol. 50, no. 3, pp. 287–292. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/PU2007v050n03ABEH006243>
- [18] Erofeev V.I., Lisenkova E.E. Dispersion and energy characteristics of bending waves in a plate lying on a two-parameter elastic foundation. *Acoust. Phys.*, 2023, vol. 69, no. 3, pp. 285–291. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063771023700604>
- [19] Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Features of wave generation by a source moving along a one-dimensional flexible guide lying on an elastic-inertial foundation. *Acoust. Phys.*, 2016, vol. 62, no. 6, pp. 643–650. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063771016060051>
- [20] Erofeev V.I., Morozov A.N., Tsarev I.S. Quasi-harmonic bending waves evolution in a beam lying on the generalized nonlinear-elastic foundation and possibility of their transformation into a sequence of wave packets. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 2 (107), pp. 83–97 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97>

Erofeev V.I. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Director of MERI RAS (Belinskogo ul. 85, Nizhny Novgorod, 603024 Russian Federation).

Lisenkova E.E. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Senior Researcher, MERI RAS (Belinskogo ul. 85, Nizhny Novgorod, 603024 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Erofeev V.I., Lisenkova E.E. Instability of the rail guide vibrations under the influence of a moving distributed load. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 4 (121), pp. 40–55 (in Russ.). EDN: QFQABG