

## **T-СХЕМЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕНЕРАЦИИ ЗАВИХРЕННОСТИ НА ПРОФИЛЯХ С УГЛОВОЙ ТОЧКОЙ В ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ**

**И.К. Марчевский**  
**К.С. Сокол**  
**Ю.А. Измайлова**

iliamarchevsky@bmstu.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

---

### **Аннотация**

Разработанные ранее численные схемы для решения граничного интегрального уравнения, возникающего в вихревых методах вычислительной гидродинамики при моделировании обтекания профилей (*T*-схемы), обеспечивают повышенный порядок точности, но только для гладких профилей. В то же время во многих, если не в большинстве, инженерных приложений обтекаемые профили имеют угловые точки и/или острые кромки. С математической точки зрения это означает неограниченность ядра интегрального уравнения и ведет к решению, содержащему особенность. Знание вида особенности позволило в развитие схемы с кусочно-линейным представлением решения предложить *T*-схему повышенной точности, применимую к расчету обтекания профилей с угловыми точками, включая точки возврата. Использование разработанных схем позволяет корректно воспроизводить поле скоростей среды вблизи угловых точек, что критически важно для правильного моделирования вихреобразования. Приведены необходимые расчетные формулы для вычисления компонент матрицы и правой части системы линейных алгебраических уравнений — дискретного аналога интегрального уравнения. Представлены результаты анализа точности для модельных задач с известным решением уравнения для интенсивности вихревого слоя на профиле и известными интегральными величинами — компонентами тензора присоединенных масс

### **Ключевые слова**

*Вихревые методы, генерация завихренности, граничное интегральное уравнение, метод Галеркина, угловая точка, особенность решения, присоединенная масса*

Поступила 05.09.2024

Принята 22.05.2025

© Автор(ы), 2025

**Введение.** Значимость учета роли острых кромок аэродинамических профилей в развитии вихревых методов вычислительной аэрогидродинамики трудно переоценить. Изучение особенности поля скоростей, возникающей при приближении к задней кромке крыла в математической модели обтекания, позволило Н.Е. Жуковскому [1] установить вихревую природу подъемной силы крыла, а необходимое условие ограниченности скоростей в окрестности острой кромки при моделировании стационарного обтекания крыла получило название постулата Жуковского — Чаплыгина (в англоязычной литературе также упоминается М.В. Кутта [2]). Вихревые методы можно считать хронологически первыми численными алгоритмами моделирования обтекания профилей: они получили развитие еще в 1950-е годы, вместе с ЭВМ первых поколений. Их ранние модификации, по существу, воспроизводили алгоритмы, по которым Л. Розенхедом и В. Прагером с конца 1920-х годов [3, 4] проводили расчеты еще вручную. Вопросы построения приближенных решений подобных уравнений, учитывающих особенности постановки задачи, впервые затронуты М.А. Лаврентьевым [5]. В основу вихревых методов первоначально положена простейшая модель идеальной несжимаемой среды, а областью применения был расчет нестационарного обтекания тонких пластинок, с их задней (при больших углах атаки — также и с передней) кромки моделировался сход вихревой пелены, рассматривавшейся как поверхность касательного разрыва поля скоростей. Подобный подход можно рассматривать как глубокое обобщение идей Н.Е. Жуковского, поскольку течение всюду вне вихревых пелен оказывалось потенциальным, а на границу профиля помещался присоединенный вихревой слой. Впоследствии метод обобщен на случай моделирования обтекания телесных профилей и пространственных тел. Классической стала работа [6], посвященная теоретическим основам и приложениям вихревых методов; обзор современного состояния вихревых методов представлен в [7, 8]. В отечественной литературе многочисленные модификации вихревых методов получили обобщенное название «метод дискретных вихрей», их развитием занималась, главным образом, научная школа С.М. Белоцерковского [9, 10]. Математическое обоснование вихревых методов дано в работах научной школы И.К. Лифанова [11, 12]. Значительным шагом в развитии вихревых методов стало появление метода вязких вихревых доменов [13].

**Особенности математической модели.** Задача моделирования обтекания профиля в вихревых методах предполагает определение интенсивности завихренности, генерируемой у границы и представляемой обычно тонким вихревым слоем. Искомое распределение удовлетворяет некото-

рому граничному интегральному уравнению. При рассмотрении гладких профилей соответствующая  $T$ -модель представляет собой интегральное уравнение (подробное описание процедуры его получения и расшифровка обозначений приведены в [14])

$$\oint_K P_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \alpha(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}) = f_\tau(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in K, \quad (1)$$

с ограниченным ядром  $P_\tau = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})$ , где  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — внешняя по отношению к профилю нормаль;  $\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}$  — градиент фундаментального решения уравнения Лапласа с обратным знаком. Для численного решения уравнения (1), дополненного условием выделения единственного решения  $\oint_K \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \Gamma$ , разработано семейство  $T$ -схем [14].

Если граница профиля является кусочно-гладкой кривой, имеющей угловые точки или точки возврата, то интегральное уравнение (1) остается справедливым на участках гладкости и в пределе при приближении к угловым точкам с обеих сторон. Ядро  $T$ -модели, хотя и становится неограниченным, остается интегрируемым в окрестности таких точек [15], а решение в общем случае имеет слабую особенность степенного типа [11, 16]:

$$\gamma(\rho) \sim \rho^{-\mu}, \quad (2)$$

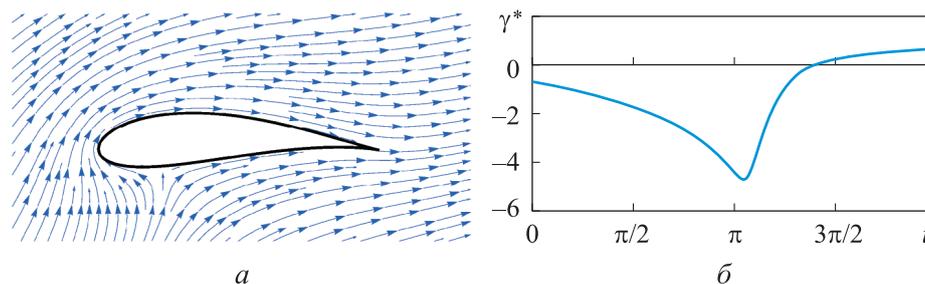
где  $\mu = 1 - (\pi/\chi)$ ,  $\chi > \pi$  — внешний угол;  $\rho$  — расстояние до угловой точки. Отметим, что  $\mu \in (0, 1/2]$ , значение  $\mu = 1/2$  достигается в точках возврата, которые соответствуют острым кромкам профиля.

Если профиль имеет единственную угловую точку или острую кромку (типичные крыловые профили), то значение интеграла от решения  $\Gamma$  можно выбрать так, чтобы обеспечить ограниченность решения интегрального уравнения. Это будет соответствовать условию Жуковского — Чаплыгина о конечности скоростей среды в окрестности кромки. Если требуется решить задачу именно в такой постановке, то можно без потери порядка точности применять численную схему  $T^0$ , разработанную в [14] (первого порядка); представленная в [14] схема  $T^1$  обеспечивает апостериорно близкий ко второму порядок, но несколько меньший, чем для гладких решений.

Типичным представителем крыловых профилей является профиль Жуковского, форма которого получается в результате отображения окружности радиусом  $a$ , расположенной на комплексной плоскости с центром в точке  $z_c = a(\eta e^{i\alpha} - 1)$  с использованием функции [17]

$$\zeta(z) = e^{-i\alpha} \left( z + \frac{1}{2} \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \right).$$

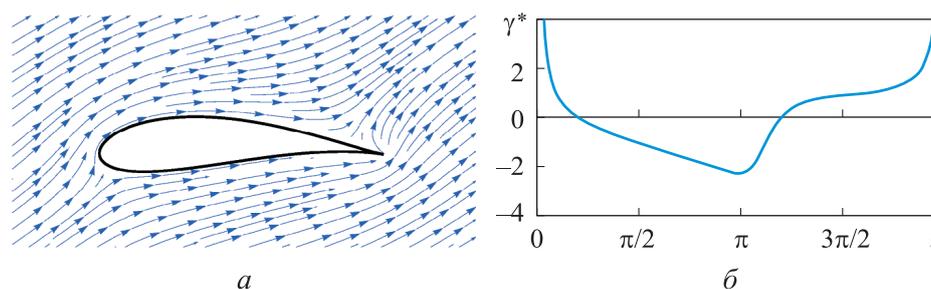
Для значений параметров  $a=1$ ,  $\eta=1,15$ ,  $\alpha = \pi/30$  форма профиля, поле скоростей среды и решение интегрального уравнения [18] показаны на рис. 1.



**Рис. 1.** Стационарный режим обтекания профиля Жуковского (а) при выборе  $\Gamma$  из условия Чаплыгина — Жуковского и точное ограниченное решение (б)

Отметим, что описанную в [14] схему  $T_{FEM}^1$  применять здесь нельзя, поскольку она основана на не выполненном в этом случае предположении о непрерывности решения.

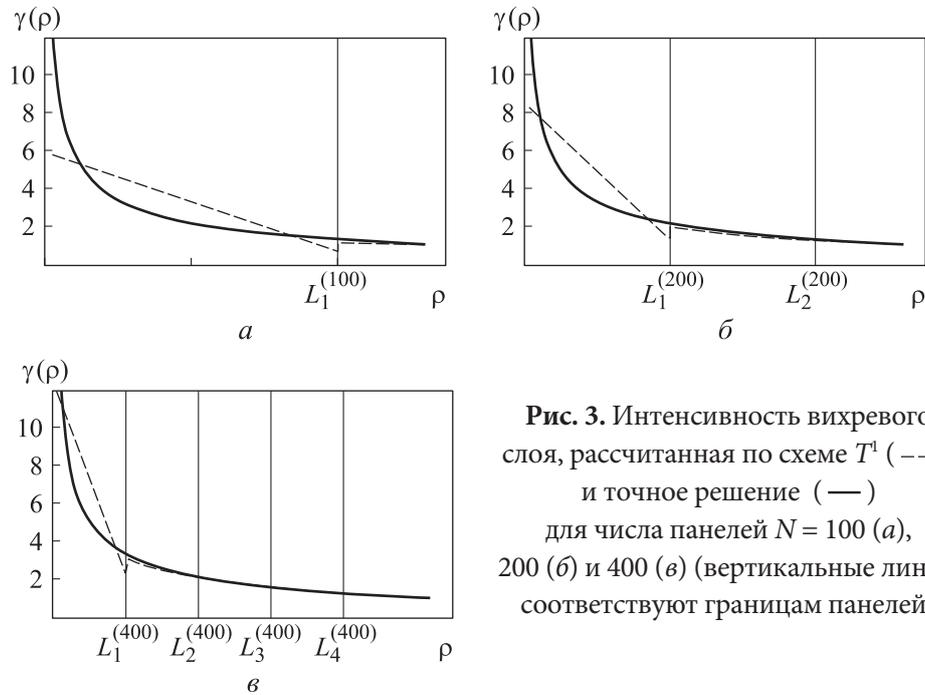
При рассмотрении задач в нестационарной постановке  $\Gamma$  определяется характером движения профиля [13]; для неподвижного или движущегося без углового ускорения профиля следует принять  $\Gamma = 0$ . Решение в угловых точках становится неограниченным (рис. 2).



**Рис. 2.** Начало моделирования нестационарного режима обтекания профиля Жуковского (а) при выборе  $\Gamma = 0$  и точное неограниченное решение (б)

Попытки воспроизведения неограниченного решения с использованием схем  $T^0$  и  $T^1$  приводят к получению ограниченного решения, хотя и возрастающего по абсолютной величине с измельчением панелей

при приближении к кромке. Численное решение для схемы  $T^1$  с кусочно-линейным представлением решения при  $\Gamma = 0$  для первых нескольких панелей в зависимости от расстояния до кромки показано на рис. 3.



**Рис. 3.** Интенсивность вихревого слоя, рассчитанная по схеме  $T^1$  (---), и точное решение (—) для числа панелей  $N = 100$  (а), 200 (б) и 400 (в) (вертикальные линии соответствуют границам панелей)

Существенное различие точного и численного решений наблюдается лишь на первой (примыкающей к кромке) панели профиля, на остальных панелях решение воспроизводится схемой  $T^1$  достаточно качественно. Сходная картина наблюдается на последней панели, также примыкающей к острой кромке, но с другой стороны.

Сопоставление численных решений этой задачи для различных значений  $N$  с точным решением при  $\Gamma = 0$  показывает, что обе схемы  $T^0$  и  $T^1$  обеспечивают в норме  $L_1$  порядок точности, близкий к  $1/2$ . Напомним [14], что при решении граничных интегральных уравнений для гладких профилей эти схемы обеспечивают первый и второй порядки точности.

При рассмотрении профиля с ненулевым углом на кромке (обобщенные профили Жуковского, они же профили Кармана — Треффца с параметром  $\sigma = \chi/\pi$ ,  $\sigma < 2$  [19]) результаты получаются следующими: если решение ограничено, т. е. удовлетворяет условию Чаплыгина — Жуковского, то порядок точности обеих схем  $T^0$  и  $T^1$  приближается к первому; в случае неограниченного решения порядок близок к  $1/2$ .

*Цель работы* — разработка численной схемы повышенной точности для решения граничного интегрального уравнения, возникающего при моделировании обтекания профилей с угловыми точками и острыми кромками.

***T*-схема с выделением асимптотики решения.** Знание асимптотического поведения решения на панелях, примыкающих к угловой точке [11, 16], позволяет построить более точную *T*-схему за счет включения в структуру приближенного решения функций, содержащих особенность требуемого вида [20]. Для этого на всех панелях, кроме примыкающих к угловой точке (далее — панели с индексами  $c-1$  и  $c$ ), решение, как и в схеме  $T^1$ , представим линейной комбинацией базисных функций  $\varphi_j^0(\mathbf{r})$  и  $\varphi_j^1(\mathbf{r})$ ,  $j=1, \dots, N$  (исключая значения  $c-1$  и  $c$ ), на двух выделенных панелях — комбинацией базисных функций  $\varphi_{c-1}^0(\mathbf{r})$ ,  $\bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r})$  и  $\varphi_c^0(\mathbf{r})$ ,  $\bar{\varphi}_c^a(\mathbf{r})$  соответственно:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{r}) = & \left( \gamma_{c-1}^0 \varphi_{c-1}^0(\mathbf{r}) + \gamma_{c-1}^a \bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r}) \right) + \left( \gamma_c^0 \varphi_c^0(\mathbf{r}) + \gamma_c^a \bar{\varphi}_c^a(\mathbf{r}) \right) + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{c-1, c\}}}^N \left( \gamma_j^0 \varphi_j^0(\mathbf{r}) + \gamma_j^1 \varphi_j^1(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где все базисные функции финитны, т. е. равны нулю вне соответствующих панелей;  $\varphi_j^0(\mathbf{r})$  — функция-индикатор  $j$ -й панели;  $\varphi_j^1(\mathbf{r})$  — функция, меняющаяся линейно от значения  $-1/2$  до  $1/2$  вдоль  $j$ -й панели; дополнительно введенные базисные функции имеют вид

$$\varphi_c^a(\mathbf{r}) = \left( \frac{L_c}{s_c(\mathbf{r})} \right)^\mu - \frac{1}{1-\mu}, \quad \bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r}) = \left( \frac{L_{c-1}}{L_{c-1} - s_{c-1}(\mathbf{r})} \right)^\mu - \frac{1}{1-\mu}. \quad (4)$$

Здесь  $s_c(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} - \mathbf{p}_c) \cdot \boldsymbol{\tau}_c$  — расстояние, измеряемое вдоль  $c$ -й панели от ее начала  $\mathbf{p}_c$ ;  $\mu$  — показатель степени, определяющий асимптотическое поведение решения (2);  $L_c$  — длина панели. Функция  $\varphi_c^a(\mathbf{r})$  имеет особенность в начале  $c$ -й панели, функция  $\bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r})$  — в конце  $(c-1)$ -й панели. Постоянные слагаемые в функциях (4) выбраны так, чтобы обеспечить условие их ортогональности базисным функциям  $\varphi_c^0(\mathbf{r})$  и  $\varphi_{c-1}^0(\mathbf{r})$ .

Для определения неизвестных коэффициентов разложения приближенного решения (3) по базисным функциям будем, как и ранее в *T*-схемах [14], использовать условие ортогональности невязки в системе проекционных функций. В качестве проекционных в [14] использованы базисные функции, что соответствует методу Бубнова — Галеркина.

В рассматриваемом случае такой подход вызвал бы излишние сложности при вычислении коэффициентов результирующей системы линейных уравнений, поэтому теперь в качестве проекционных выберем базисные функции схемы  $T^1$  с кусочно-линейным решением, т. е. набор функций  $\{\varphi_j^0(\mathbf{r})\}_{j=1}^N, \{\varphi_j^1(\mathbf{r})\}_{j=1}^N$ . Обозначим такую схему  $T_a^1$ , ее можно рассматривать как результат применения метода Петрова — Галеркина.

Дополнительным аргументом в пользу такого подхода является возможность моделирования обтекания профилей с острой кромкой (точкой возврата): решение в ее окрестности имеет особенность вида  $\rho^{-1/2}$ , что исключает возможность использования аналогичной функции в качестве проекционной.

В результате схеме  $T_a^1$  соответствует система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} [A^{00}] + [D^{00}] & [A^{01}] & \{I_N\} \\ [A^{10}] & [A^{11}] + [D^{11}] & \{O_N\} \\ \{L^0\}^T & \{L^1\}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^1\} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{b^0\} \\ \{b^1\} \\ \Gamma \end{pmatrix}, \quad (5)$$

которая по структуре совпадает с системой для схемы  $T^1$  при кусочно-линейном представлении решения [14]. Кроме того, все компоненты матрицы системы и столбца правой части остаются неизменными за исключением  $(c-1)$ -го и  $c$ -го столбцов блоков  $[A^{01}]$  и  $[A^{11}]$ , а также соответствующих диагональных компонент в блоке  $[D^{11}]$ .

Записывая выражения для компонент  $A_{j,c}^{01}$  и  $A_{j,c}^{11}$  матрицы системы (5), получаем

$$\begin{aligned} A_{j,c}^{p,1} &= \frac{1}{L_j} \int \left( \int_{K_j} P_\tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_c^a(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi \right) \varphi_j^p(\mathbf{r}) dl_r = \\ &= \frac{1}{L_j} \left( \int_{K_j} \left( \int_{K_c} (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})) \left( \frac{L_c}{s_c(\boldsymbol{\xi})} \right)^\mu dl_\xi \right) \varphi_j^p(\mathbf{r}) dl_r - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-\mu} \int_{K_j} \left( \int_{K_c} (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})) dl_\xi \right) \varphi_j^p(\mathbf{r}) dl_r \right) = \\ &= \frac{1}{L_j} \left( (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{H}_{j,c}^p) - \frac{1}{1-\mu} (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{I}_{j,c}^{p,0}) \right), \end{aligned}$$

где учтено, что интеграл  $\mathbf{I}_{j,c}^{p,0}$  во втором слагаемом в точности совпадает с тем, что возник при построении схемы  $T^1$  с кусочно-линейным пред-

ставлением решения [14]. Таким образом, задача сводится к вычислению интегралов от неограниченных функций

$$\mathbf{H}_{j,c}^p = \int \left( \int_{K_c} \mathbf{Q}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}) \left( \frac{L_c}{s_c(\boldsymbol{\xi})} \right)^\mu d\boldsymbol{\xi} \right) \varphi_j^p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Вычисление компонент  $A_{j,c-1}^{01}$  и  $A_{j,c-1}^{11}$ , стоящих в  $(c-1)$ -х столбцах соответствующих блоков, проводится аналогично с учетом замены индекса  $c$  индексом  $c-1$  и функции  $\varphi_c^a(\mathbf{r})$  функцией  $\bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r})$ .

Если  $j$ -я панель совпадает с  $c$ -й или  $(c-1)$ -й, то соответствующие компоненты матриц равны нулю:  $A_{c,c}^{01} = A_{c-1,c-1}^{01} = A_{c,c}^{11} = A_{c-1,c-1}^{11} = 0$ .

Диагональные компоненты матрицы  $[D^{11}]$ , стоящие в  $c$ -й и  $(c-1)$ -й строках, выражаются интегралами

$$D_{c,c}^{11} = -\frac{1}{2L_c} \int_{K_c} \varphi_c^1(\mathbf{r}) \varphi_c^a(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\mu}{4(\mu^2 - 3\mu + 2)},$$

$$D_{c-1,c-1}^{11} = -\frac{1}{2L_{c-1}} \int_{K_{c-1}} \varphi_{c-1}^1(\mathbf{r}) \bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\frac{\mu}{4(\mu^2 - 3\mu + 2)}.$$

Отметим, что выделение особенности решения можно провести введением базисных функций  $\varphi_c^a(\mathbf{r})$  и  $\bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r})$  не вместо, а в дополнение к линейным. В этом случае решение на панелях, примыкающих к угловым точкам, будет определяться тремя коэффициентами, и вместо (3) будем иметь:

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \left( \gamma_{c-1}^a \bar{\varphi}_{c-1}^a(\mathbf{r}) + \gamma_c^a \varphi_c^a(\mathbf{r}) \right) + \sum_{k=1}^N \left( \gamma_k^0 \varphi_k^0(\mathbf{r}) + \gamma_k^1 \varphi_k^1(\mathbf{r}) \right). \quad (7)$$

Такой подход требует введения на двух указанных панелях дополнительных (третьих) проекционных функций. Не касаясь нетривиального вопроса выбора их вида, отметим, что реализация подобного алгоритма приводит к усложнению вычислительной процедуры и структур данных в программах. В то же время, как показали методические эксперименты, заметного повышения точности при этом не происходит.

**Вычисление коэффициентов схемы.** Внутренний интеграл в выражении (6) имеет самостоятельный смысл: если обозначить

$$\mathbf{S}_c(\mathbf{r}) = \int_{K_c} \mathbf{Q}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}) \left( \frac{L_c}{s_c(\boldsymbol{\xi})} \right)^\mu d\boldsymbol{\xi}, \quad (8)$$

то величина  $\mathbf{k} \times \mathbf{S}_c(\mathbf{r})$  выражает скорость, индуцируемую  $c$ -й панелью, когда интенсивность вихревого слоя на ней имеет распределение

$\gamma_c^*(\xi) = (L_c/s_c(\xi))^\mu$ ;  $\mathbf{k}$  — орт нормали к плоскости течения. В общем случае указанный интеграл сводится к неполной бета-функции Эйлера  $B_\omega(x, y) = \int_0^\omega t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  при  $x = 1 - \mu$ ,  $y = 0$ . Если показатель степени является рациональной дробью, т. е.  $\mu = \alpha / \beta$ , то интеграл можно вычислить в замкнутой форме (без ограничения общности полагаем, что  $\beta$  — четное). Переходя для простоты к комплексным числам, получаем

$$\overline{S_c(z)} = \frac{(-1)^{\alpha+1} e^{-i\theta_c}}{2\pi} \left( \frac{z - p_c}{d_c} \right)^{-\alpha/\beta} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\beta} \exp\left(\frac{ip\pi k}{\beta/2}\right) \ln\left(1 + \left(\frac{z - p_c}{d_c}\right)^{-1/\beta} \exp\left(\frac{i\pi k}{\beta/2}\right)\right). \quad (9)$$

Здесь  $z$  — комплексное число, соответствующее точке вычисления скорости  $\mathbf{r}$ ;  $p_c$  — начало  $c$ -й панели на комплексной плоскости;  $i$  — мнимая единица;  $d_c = L_c e^{i\theta_c}$  — комплексное число, соответствующее вектору  $c$ -й панели;  $\theta_c$  — угол поворота  $c$ -й панели, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс и измеряемый в диапазоне  $(-\pi, \pi]$ ; черта сверху означает комплексное сопряжение.

Отметим, что при вычислении величины  $\overline{S_c(z)}$  для точек, лежащих вблизи  $c$ -й панели, использовать формулу (9) не удастся, поскольку при вычислении суммы в слагаемом, соответствующем  $k = \beta/2$ , возникает необходимость вычисления логарифма отрицательного числа; результат будет определяться лишь неизбежными погрешностями округления аргумента этого числа: он будет близок к  $\pi$  или  $-\pi$ . В связи с этим прямое значение интеграла, т. е. его значение при попадании точки  $z$  на  $c$ -ю панель (исключая ее концы), вычисляется как полусумма предельных значений:

$$\overline{S_c(z)} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \overline{S_c(z + \varepsilon n)} + \overline{S_c(z - \varepsilon n)} \right) = \\ = \frac{(-1)^{\alpha+1} e^{-i\theta_c}}{2\pi} f_c^{-\alpha/\beta} \left( \exp(i\alpha\pi) \ln(f_c^{-1/\beta} - 1) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq \beta/2}}^{\beta} \exp\left(\frac{i\alpha\pi k}{\beta/2}\right) \ln\left(1 + f_c^{-1/\beta} \exp\left(\frac{i\pi k}{\beta/2}\right)\right) \right), \quad z \in K_c, \quad (10)$$

где  $f_c = |z - p_c| / L_c$ . Предельные значения интеграла по обе стороны панели  $K_c$  равны

$$\overline{S_c(z)}^\pm = \overline{S_c(z)} \pm \frac{i}{2} e^{-i\theta_c} \gamma_c^*(z) = \overline{S_c(z)} \pm \frac{i}{2} \frac{e^{-i\theta_c}}{f_c^{\alpha/\beta}}, \quad z \in K_c,$$

где знак «+» соответствует внешности контура, а «-» — внутренности, панели ориентированы так, что при обходе контура область течения остается справа.

Величина  $\mathbf{H}_{j,c}^0$ , которая дается интегралом вдоль панели  $K_j$  от величины  $\mathbf{S}_c(\mathbf{r})$  с единичной проекционной функцией, может быть вычислена аналитически в комплексных числах. Для панелей, не имеющих общих точек с  $K_c$ , справедлива формула

$$\overline{H_{j,c}^0} = \frac{L_c e^{-i\theta_j}}{2\pi(1-\alpha/\beta)} \left( \ln \left( \frac{p_{jc}^1}{p_{jc}^2} \right) + (-1)^\alpha \sum_{k=1}^{\beta} \left( Y_{j,c}^{k,2} - Y_{j,c}^{k,1} \right) \right),$$

где

$$Y_{j,c}^{k,m} = \left( \frac{s_{jc}^m}{d_c} \right)^{1-\alpha/\beta} \ln \left( 1 + \exp \left( \frac{i\pi k}{\beta/2} \right) \left( \frac{s_{jc}^m}{d_c} \right)^{-1/\beta} \right) \exp \left( \frac{i\alpha\pi k}{\beta/2} \right),$$

$$m = 1, 2, \quad k = 1, \dots, \beta.$$

Здесь  $s_{jc}^m$ ,  $p_{jc}^m$  — комплексные числа, соответствующие векторам, которые соединяют начало ( $s$ ) и конец ( $p$ )  $c$ -й панели с концом ( $m = 1$ ) и началом ( $m = 2$ )  $j$ -й панели.

Если начало панели  $K_j$  совпадает с концом панели  $K_c$  ( $j = c + 1$ ) или наоборот ( $j = c - 1$ ), то предыдущая формула приводит к неопределенности, раскрывая которую путем вычисления пределов, получаем

$$\overline{H_{j,c}^0} = \frac{L_c e^{-i\theta_j}}{2\pi(1-\alpha/\beta)} \left( \ln \left( \frac{1}{\beta} \frac{d_j}{d_c} \right) + (-1)^\alpha \left( \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq \beta/2}}^{\beta} Y_{j,c}^{k,2} - \sum_{k=1}^{\beta} Y_{j,c}^{k,1} \right) \right), \quad j = c + 1,$$

$$\overline{H_{j,c}^0} = \frac{L_c e^{-i\theta_j}}{2\pi(1-\alpha/\beta)} \left( \ln \left( \frac{p_{jc}^1}{p_{jc}^2} \right) + (-1)^\alpha \sum_{k=1}^{\beta} Y_{j,c}^{k,2} \right), \quad j = c - 1.$$

Величина  $\mathbf{H}_{j,c}^1$ , выражающая интеграл вдоль панели  $K_j$  от величины  $\mathbf{S}_c(\mathbf{r})$  с линейной проекционной функцией, для панелей, не имеющих общих точек с панелью  $K_c$ , может быть вычислена точно по формуле

$$\begin{aligned} \overline{H_{j,c}^1} &= \frac{d_c}{d_j} \frac{L_c e^{-i\theta_j}}{2\pi(2-\alpha/\beta)} \left( h_{jc} \ln \left( \frac{p_{jc}^1}{p_{jc}^2} \right) + \frac{d_j}{d_c} + \right. \\ &+ (-1)^\alpha \sum_{k=1}^{\beta} \left( \left( h_{jc} + \frac{p_{jc}^2}{d_c} \right) Y_{j,c}^{k,2} - \left( h_{jc} + \frac{p_{jc}^1}{d_c} \right) Y_{j,c}^{k,1} \right) \left. \right) - \frac{1}{2} \overline{H_{j,c}^0}, \end{aligned} \quad (11)$$

где все обозначения соответствуют введенным выше, дополнительно обозначено

$$h_{jc} = 1 - \frac{s_{jc}^2}{d_c} \left( \frac{2-\alpha/\beta}{1-\alpha/\beta} \right).$$

Если начало панели  $K_j$  совпадает с концом панели  $K_c$  ( $j = c+1$ ) или наоборот ( $j = c-1$ ), то предыдущая формула приводит к неопределенности, раскрывая которую путем вычисления пределов, получаем

$$\begin{aligned} \overline{H_{j,c}^1} &= \frac{d_c}{d_j} \frac{L_c e^{-i\theta_j}}{2\pi(2-\alpha/\beta)} \times \\ &\times \left( h_{jc} \ln \left( \frac{1}{\beta} \frac{d_j}{d_c} \right) + \frac{d_j}{d_c} + (-1)^\alpha \left( h_{jc} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq \beta/2}}^{\beta} Y_{j,c}^{k,2} - \left( h_{jc} + \frac{p_{jc}^1}{d_c} \right) \sum_{k=1}^{\beta} Y_{j,c}^{k,1} \right) \right) - \frac{1}{2} \overline{H_{j,c}^0}, \\ & j = c+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{H_{j,c}^1} &= \frac{d_c}{d_j} \frac{L_c e^{-i\theta_j}}{2\pi(2-\alpha/\beta)} \times \\ &\times \left( h_{jc} \ln \left( \frac{p_{jc}^1}{p_{jc}^2} \right) + \frac{d_j}{d_c} + (-1)^\alpha \left( h_{jc} + \frac{p_{jc}^2}{d_c} \right) \sum_{k=1}^{\beta} Y_{j,c}^{k,2} \right) - \frac{1}{2} \overline{H_{j,c}^0}, \quad j = c-1. \end{aligned}$$

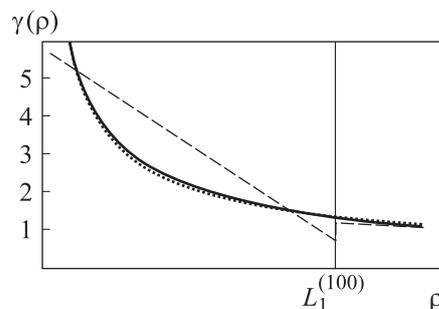
Процедура вычисления интегралов по  $(c-1)$ -й панели (примыкает к угловой точке не началом, а концом) аналогична описанной выше. Требуется условно поменять местами ее начало и конец и ввести соответствующим образом все вспомогательные векторы, а также изменить знак у проекционной функции  $\phi_{c-1}^1(\xi)$ .

Следовательно, получены выражения для всех компонент матрицы системы (5), соответствующей схеме  $T_a^1$ .

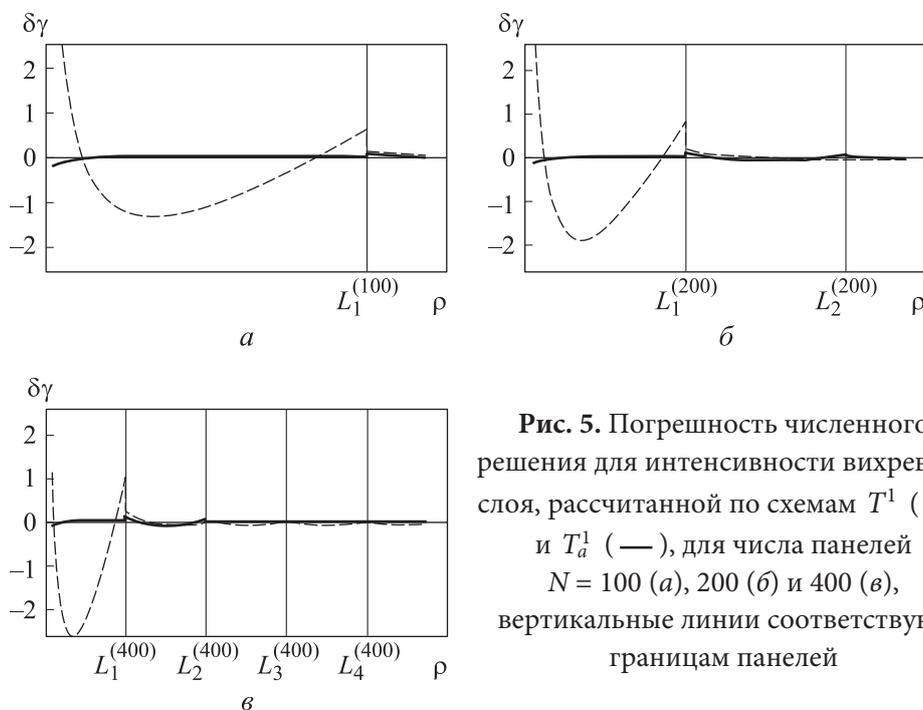
**Вычислительный эксперимент. Интенсивность вихревого слоя в окрестности кромки.** В качестве модельной задачи, как и выше, рассмотрим моделирование обтекания профиля Жуковского (см. рис. 2). Этот крыловой

профиль имеет точку возврата; он установлен под углом атаки  $\pi/6$  к набегающему потоку и в расчете разбит на  $N$  панелей близкой длины  $h$ . Численное решение при  $\Gamma = 0$  на первой панели и начале второй при общем числе панелей  $N = 100$  показано на рис. 4.

**Рис. 4.** Интенсивность вихревого слоя, рассчитанная по схемам  $T^1$  (---),  $T_a^1$  (.....), и точное решение (—), вертикальная линия соответствует границе первой и второй панелей



Даже при  $N = 100$  численное решение  $\gamma(\xi)$ , полученное с использованием схемы  $T_a^1$ , визуально не отличается от точного. Графики разности  $\Delta\gamma$  численного решения и точного для схем  $T^1$  и  $T_a^1$  показаны на рис. 5. Отметим, что точное решение  $\gamma^*$  задано на криволинейной границе исходного профиля  $K$ , тогда как численное — на многоугольнике, вписанном в  $K$ , поэтому для оценки погрешности предварительно точное решение спроецировано на аппроксимирующий многоугольник [14].



**Рис. 5.** Погрешность численного решения для интенсивности вихревого слоя, рассчитанной по схемам  $T^1$  (---) и  $T_a^1$  (—), для числа панелей  $N = 100$  (а), 200 (б) и 400 (в), вертикальные линии соответствуют границам панелей

Отметим, что при использовании схемы  $T_a^1$ , кроме существенного снижения погрешности на панели, примыкающей к кромке, наблюдается заметное уточнение решения на второй панели, хотя оно, как и ранее, представляется линейным распределением.

При количественной оценке точности новой схемы получается, что при грубой дискретизации погрешность решения, вычисляемая в норме  $L_1$ , убывает практически линейно; при дальнейшем измельчении длины панели порядок схемы падает до близкого к  $1/2$ , как и для схем  $T^0$  и  $T^1$  (рис. 6). Тем не менее абсолютная погрешность, рассчитанная для схемы  $T_a^1$ , оказывается в несколько десятков раз меньше, чем для схемы  $T^1$ .

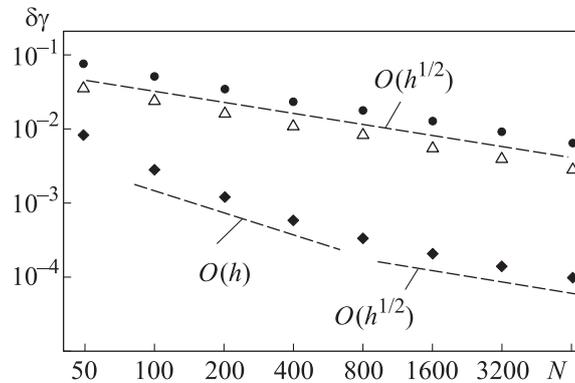


Рис. 6. Убывание погрешности при моделировании обтекания профиля Жуковского для схем  $T^0$  ( $\bullet$ ),  $T^1$  ( $\triangle$ ),  $T_a^1$  ( $\blacklozenge$ )

**Присоединенные массы профиля.** Рассмотрим задачу о вычислении компонент тензора присоединенных масс. Профиль Жуковского относится к узкому классу профилей, для которых присоединенные массы можно определить точно. Соответствующие выражения приведены в [17, 21]. Согласно определению, их вычисление требует восстановления потенциалов поля скоростей для профиля, приведенного в движение с единичной поступательной или угловой скоростью, и их последующего интегрирования по области течения [17]. Однако в рамках вихревых методов оказывается достаточно найти интенсивность вихревого слоя на профиле, а затем вычислить интеграл по его контуру [22]. Процедура вычисления правой части для случая движущегося профиля подробно описана в [14]; отметим, что суммарная завихренность в присоединенном и свободном вихревых слоях должна быть равна нулю, тогда

$$\lambda_{dx} = \oint_K \rho y \left( \gamma_d(\mathbf{r}) + \gamma_d^{att}(\mathbf{r}) \right) dl; \quad \lambda_{dy} = -\oint_K \rho x \left( \gamma_d(\mathbf{r}) + \gamma_d^{att}(\mathbf{r}) \right) dl;$$

$$\lambda_{d\omega} = -\frac{1}{2} \oint_K \rho (x^2 + y^2) (\gamma_d(\mathbf{r}) + \gamma_d^{att}(\mathbf{r})) dl, \quad d = x, y, \omega,$$

где  $x, y$  — компоненты вектора  $\mathbf{r}$ ;  $\gamma_d(\mathbf{r}), \gamma_d^{att}(\mathbf{r})$  — интенсивности свободного и присоединенного вихревых слоев на профиле, соответствующие движению профиля в направлении  $d$ ,  $\gamma_d^{att}(\mathbf{r})$  равна касательной составляющей скорости границы профиля.

Убывание максимальной относительной погрешности вычисления всех компонент тензора присоединенных масс при использовании схем  $T^0, T^1$  и  $T_a^1$  в зависимости от числа панелей равной длины (ими представлена граница профиля, установленного под нулевым углом атаки) показано на рис. 7.

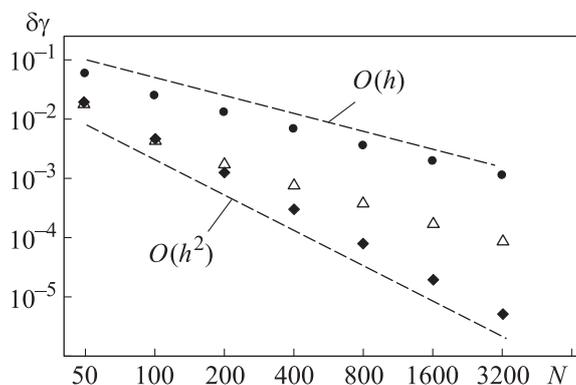


Рис. 7. Убывание погрешности вычисления присоединенных масс профиля Жуковского при использовании схем  $T^0$  ( $\bullet$ ),  $T^1$  ( $\triangle$ ),  $T_a^1$  ( $\blacklozenge$ )

Вследствие наличия острой кромки порядок точности схемы  $T^1$  при достаточно подробной дискретизации падает до первого, тогда как схема  $T_a^1$  сохраняет второй порядок точности.

Отметим, что при вычислении компонент  $\lambda_{xx}, \lambda_{xy}$  и  $\lambda_{x\omega}$  обе схемы  $T^1$  и  $T_a^1$  приводят к практически идентичным результатам и обеспечивают второй порядок точности, поскольку при приведении профиля в движение в горизонтальном направлении решение оказывается ограниченным. В то же время вычисление значений  $\lambda_{yx}$  и  $\lambda_{\omega x}$ , которые в силу симметрии тензора присоединенных масс равны  $\lambda_{xy}$  и  $\lambda_{x\omega}$ , будет приводить лишь к линейному убыванию погрешности при использовании схемы  $T^1$ .

**Восстановление поля скоростей около угловой точки.** Решаемое граничное интегральное уравнение (1) представляет собой условие равенства

предельного значения касательной компоненты скорости среды и скорости движения границы профиля, из которого и находят интенсивность присоединенного вихревого слоя  $\gamma$ . Поле скоростей во всей области течения  $S$  может быть восстановлено с использованием обобщенного разложения Гельмгольца, в соответствии с которым для плоского течения

$$\mathbf{V}(\rho) = \mathbf{V}_\infty + \int_S (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\rho - \xi)) \Omega(\xi) dS_\xi + \int_S \mathbf{Q}(\rho - \xi) D(\xi) dS_\xi + \\ + \oint_K (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\rho - \xi)) (\gamma(\xi) + \gamma^{att}(\xi)) dl_\xi + \oint_K \mathbf{Q}(\rho - \xi) q^{att}(\xi) dl_\xi, \quad \rho \in S, \quad (12)$$

где  $\mathbf{k}$  — орт нормали к плоскости течения;  $\mathbf{Q}(\xi) = \xi / (2\pi |\xi|^2)$  — градиент фундаментального решения уравнения Лапласа;  $\Omega(\xi)$ ,  $D(\xi)$  — распределения вихрей и источников в области течения  $S$ ;  $\gamma(\xi)$  — интенсивность свободного вихревого слоя;  $\gamma^{att}(\xi)$ ,  $q^{att}(\xi)$  — интенсивности присоединенных вихревого слоя и слоя источников, равные касательной и нормальной компонентам скорости движения точек границы профиля  $K$ .

При численном решении задачи в вихревых методах завихренность и источники в области течения полагаются точечными, поэтому интегралы по  $S$  выражаются конечными суммами и могут быть вычислены непосредственно (с заменой ядра  $\mathbf{Q}$  ядром  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  как в [14]); интегралы по границе профиля  $K$  представляются суммами интегралов по прямолинейным панелям. Интенсивности присоединенных слоев на всех панелях, а также вихревого слоя  $\gamma(\xi)$  на панелях, исключая примыкающие к угловым точкам, в рамках схемы  $T_a^1$  аппроксимируются кусочно-линейными функциями — идентично схеме  $T^1$ ; соответствующие интегралы вычислены в [14] и обозначены  $\mathbf{I}_i^p(\rho)$ ,  $p = 0, 1$ ,  $i$  — индекс панели.

Остается вычислить интегралы по панелям, примыкающим к угловым точкам:

$$\int_{K_c} (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\rho - \xi)) \gamma(\xi) dl_\xi = \mathbf{k} \times (\gamma_c^0 \mathbf{I}_c^0(\rho) + \gamma_c^a \mathbf{I}_c^a(\rho))$$

и

$$\int_{K_{c-1}} (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\rho - \xi)) \gamma(\xi) dl_\xi = \mathbf{k} \times (\gamma_{c-1}^0 \mathbf{I}_{c-1}^0(\rho) + \gamma_{c-1}^a \bar{\mathbf{I}}_{c-1}^a(\rho)).$$

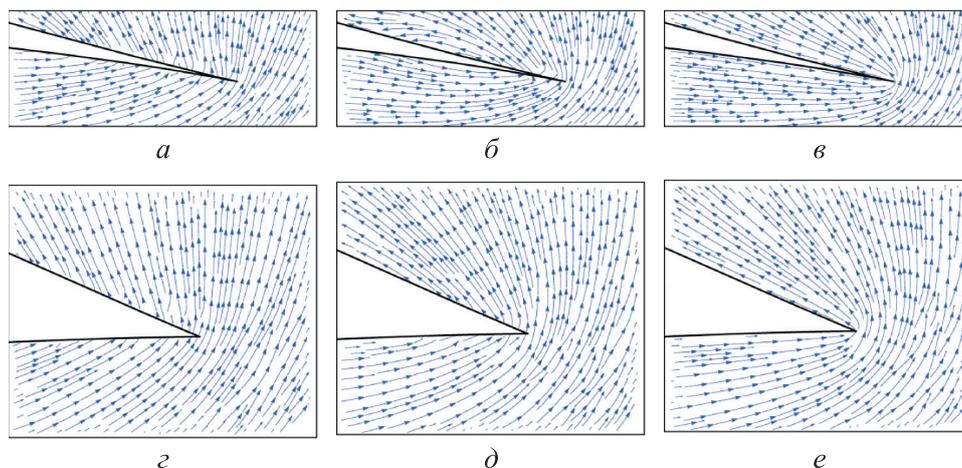
Эти интегралы можно вычислить в замкнутой форме:

$$\mathbf{I}_c^a(\rho) = \int_{K_c} \mathbf{Q}(\rho - \xi) \varphi_c^a(\xi) dl_\xi = \mathbf{S}_c(\rho) - \frac{1}{1-\mu} \mathbf{I}_c^0(\rho);$$

$$\bar{\Gamma}_{c-1}^a(\rho) = \int_{K_{c-1}} \mathbf{Q}(\rho - \xi) \bar{\varphi}_{c-1}^a(\xi) dI_\xi = \bar{\mathbf{S}}_{c-1}(\rho) - \frac{1}{1-\mu} \mathbf{I}_{c-1}^0(\rho),$$

а вычисление  $\mathbf{S}_c(\rho)$  следует выполнять по (9). Для вычисления  $\bar{\mathbf{S}}_{c-1}(\rho)$  можно применить описанный выше прием: условно «развернуть»  $(c - 1)$ -ю панель и свести задачу к решенной для  $c$ -й панели.

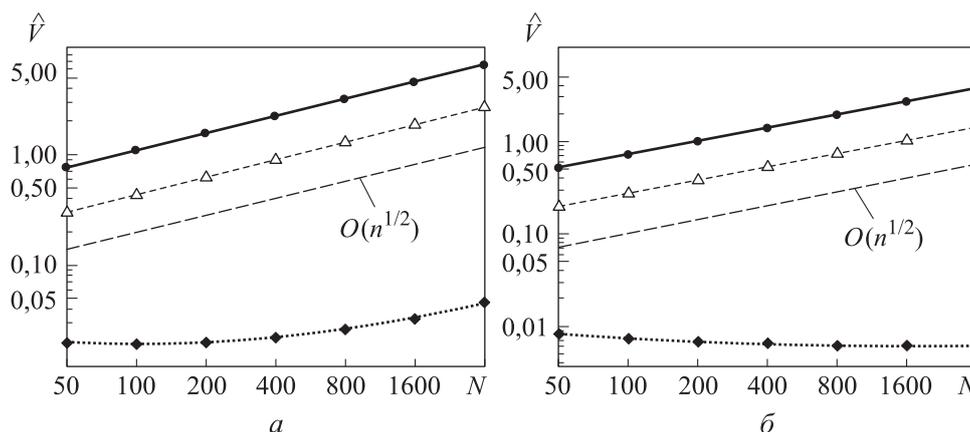
Результаты восстановления поля скоростей вблизи острой кромки профиля (см. рис. 2), установленного под углом атаки  $\pi/6$ , представлены на рис. 8, *a–в*. Суммарная циркуляция принималась равной нулю. Эту задачу следует рассматривать как модельную для оценки качества численных схем (на кромке не выполнено условие Чаплыгина — Жуковского). Исходный профиль имеет точку возврата, поэтому  $\mu = 1/2$ . Аналогичные результаты приведены на рис. 8, *г–е* для обобщенного профиля Жуковского с внешним углом при кромке  $\chi = 15\pi/8$ , для которого  $\mu = 7/15$ . Оба профиля разбиты на  $N = 50$  панелей (на рисунках показаны окрестности панелей, примыкающих к кромкам).



**Рис. 8.** Поля скоростей вблизи острых кромок классического (*a–в*) и обобщенного (*г–е*) профилей Жуковского, рассчитанных с использованием схем  $T^0$  (*a, г*),  $T^1$  (*б, д*) и  $T_a^1$  (*в, е*)

С использованием схемы  $T_a^1$ , учитывающей особенность решения граничного интегрального уравнения, удастся корректно воспроизводить поле скоростей вблизи острой кромки. При использовании схем  $T^0$  и  $T^1$  получаемое решение не удовлетворяет граничному условию (линии тока «упираются» в границу профиля), что приводит к погрешности при моделировании течения в окрестности угловой точки. Для ее количественной

оценки рассчитаны значения интегралов от модуля скорости по треугольнику внутри профиля, образованному панелями, которые примыкают к кромке (части профилей, см. рис. 8). Результаты для среднего значения модуля скорости  $\hat{V}$  внутри указанного треугольника в зависимости от числа панелей приведены на рис. 9 для профилей с точкой возврата и угловой точкой.



**Рис. 9.** Зависимости среднего значения модуля скорости внутри треугольника, образованного примыкающими к кромке панелями, для профиля с острой кромкой (а) и конечным углом (б) от числа панелей для схем  $T^0$  (•),  $T^1$  (Δ),  $T_a^1$  (◆)

Отметим, что процедура восстановления скоростей внутри профиля у кромки для схем  $T^0$  и  $T^1$  приводит к нарастанию погрешности при измельчении длины панелей. В то же время для схемы  $T_a^1$  погрешность для профиля с острой кромкой нарастает значительно медленнее, а для профиля с конечным углом даже убывает.

**Заключение.** Для моделирования обтекания профилей с угловыми точками, включая точки возврата, разработана  $T$ -схема повышенной точности, учитывающая особенность решения граничного интегрального уравнения относительно интенсивности вихревого слоя, выражающего граничное условие прилипания. Приведены расчетные формулы, которые позволяют рассчитать коэффициенты линейной системы — дискретного аналога решаемого интегрального уравнения, получены формулы для расчета поля скоростей среды. Результаты вычислительного эксперимента показали, что использование схемы с учетом особенности решения позволяет корректно воспроизводить поле скоростей среды вблизи острой кромки.

Рассмотрена модельная задача расчета компонент тензора присоединенных масс. Показано, что в случае неограниченного решения схема с учетом особенности обеспечивает апостериорно второй порядок точности, тогда как схемы с кусочно-постоянным и кусочно-линейным представлениями решения обеспечивают первый порядок точности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях. *Тр. отд. физ. Наук Общ-ва любителей естествознания*, 1906, т. 13, вып. 2, с. 14.
- [2] Tokaty G.A. *A History and philosophy of fluid mechanics*. Dover, 1994.
- [3] Rosenhead R., Jeffreys H. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1931, vol. 134, iss. 823, pp. 170–192.  
DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0189>
- [4] Prager W. Die druckverteilung an korpern in ebener potentialstromung. *Phys. Z.*, 1928, vol. 29, pp. 865–869.
- [5] Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. *Труды ЦАГИ*, 1932, вып. 118, с. 56.
- [6] Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. *Vortex methods*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [7] Branlard E. Wind turbine aerodynamics and vorticity-based methods. *Research Topics in Wind Energy*, vol. 7. Cham, Springer, 2017.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55164-7>
- [8] Mimeau C., Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: from creation to recent advances. *Fluids*, 2021, vol. 6, iss. 2, art. 68.  
DOI: <https://doi.org/10.3390/fluids6020068>
- [9] Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И. и др. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания. М., Наука, 1988.
- [10] Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И. и др. Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы, Гылым, 1997.
- [11] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М., Янус, 1995.
- [12] Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., Янус-К, 2001.
- [13] Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М., Изд-во МГУ, 2006.
- [14] Марчевский И.К., Сокол К.С., Измайлова Ю.А. *T*-схемы для математического моделирования генерации завихренности на гладких профилях в вихревых методах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 6 (105), с. 33–59. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-33-59>

- [15] Марчевский И.К. Разработка и реализация  $T$ -схем численного решения граничных интегральных уравнений в математических моделях вихревых методов вычислительной гидродинамики. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021.
- [16] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М., Л., Гостехиздат, 1946.
- [17] Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Л., ГИТТЛ, 1950.
- [18] Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, art. 012099.  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>
- [19] Милн-Томсон М.Л. Теоретическая гидродинамика. М., Мир, 1964.
- [20] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., Наука, 1981.
- [21] Риман И.С., Крепс Р.Л. Присоединенные массы тел различной формы. *Труды ЦАГИ*, 1947, № 635, с. 47.
- [22] Дынникова Г.Я. О присоединенной массе в модели вязкой несжимаемой жидкости. *ДАН*, 2019, т. 488, № 5, с. 493–497.  
DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524885493-497>

**Марчевский Илья Константинович** — д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Сокол Ксения Сергеевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Измайлова Юлия Андреевна** — аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Марчевский И.К., Сокол К.С., Измайлова Ю.А.  $T$ -схемы для математического моделирования генерации завихренности на профилях с угловой точкой в вихревых методах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 4 (121), с. 56–77. EDN: QHKLXC

**T-SCHEMES FOR MATHEMATICAL SIMULATION  
OF VORTICITY GENERATION ON AIRFOILS  
WITH CORNER POINTS IN VORTEX PARTICLE METHODS**

**I.K. Marchevskii**

iliamarchevsky@bmstu.ru

**K.S. Sokol**

**Yu.A. Izmailova**

**BMSTU, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The boundary integral equation is considered which arises when modeling flow around airfoils using vortex methods. Numerical schemes for solving this equation previously developed by the authors (*T*-schemes) provide a higher order of accuracy only for smooth airfoils. At the same time, in many engineering applications, airfoils have corners and/or sharp trailing edge. From a mathematical point of view, this means that the kernel of the integral equation is unbounded and its solution has singularity. A type of singularity is known, this allowed us to propose a *T*-scheme of higher order of accuracy with a piecewise linear representation of the solution, which is applicable to calculating the flow past arbitrary airfoils with corner points and sharp trailing edge. Experiments show that the developed schemes correctly reproduce the velocity field of the flow near the corner points. It is important for the correct modeling of vorticity generation. All the formulae for calculating a discrete analogue of the integral equation are given. The results of the a posteriori accuracy analysis for the intensity of the vortex sheet on the airfoil and components of the added mass tensor are presented for model problems with a known solution

**Keywords**

*Vortex methods, vorticity generation, boundary integral equation, Galerkin method, corner point, singular solution, added mass*

Received 05.09.2024

Accepted 22.05.2025

© Author(s), 2025

---

**REFERENCES**

- [1] Zhukovskiy N.E. On attached vortices. *Proc. Phys. Sci. Div. Nat. Soc.*, 1906, vol. 13, no. 2, p. 14 (in Russ.).
- [2] Tokaty G.A. A History and philosophy of fluid mechanics. Dover, 1994.
- [3] Rosenhead R., Jeffreys H. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1931, vol. 134, iss. 823, pp. 170–192.  
DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0189>

- [4] Prager W. Die druckverteilung an korpern in ebener potentialstromung. *Phys. Z.*, 1928, vol. 29, pp. 865–869.
- [5] Lavrentyev M.A. On constructing a flow around an arc of a given shape. *TsAGI Proc.*, 1932, no. 118, p. 56 (in Russ.).
- [6] Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. *Vortex methods*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [7] Branlard E. Wind turbine aerodynamics and vorticity-based methods. *Research Topics in Wind Energy*, vol. 7. Cham, Springer, 2017.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55164-7>
- [8] Mimeau C., Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: from creation to recent advances. *Fluids*, 2021, vol. 6, iss. 2, art. 68.  
DOI: <https://doi.org/10.3390/fluids6020068>
- [9] Belotserkovsky S.M., Kotovskii V.N., Nisht M.I., et al. *Two-dimensional separated flows*. CRC Press, 1992.
- [10] Aubakirov T.O., Belotserkovskiy S.M., Zhelannikov A.I., et al. *Nelineynaya teoriya kryla i ee prilozheniya [Non-linear wing theory and its applications]*. Almaty, Gylym Publ., 1997.
- [11] Lifanov I.K. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht, VSP, 1996.
- [12] Vainikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskii L.N. *Hypersingular integral equations and their applications*. CRC Press, 2004.
- [13] Andronov P.R., Guvernuyuk S.V., Dynnikova G.Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok [Vortex methods for computation of the unsteady hydrodynamic loads]*. Moscow, MSU Publ., 2006.
- [14] Marchevskiy I.K., Sokol K.S., Izmaylova Yu.A. *T-schemes for mathematical modelling of vorticity generation on smooths airfoils in vortex particle methods*. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 6 (105), pp. 33–59 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-33-59>
- [15] Marchevskiy I.K. *Razrabotka i realizatsiya T-skhem chislennogo resheniya granichnykh integralnykh uravneniy v matematicheskikh modelyakh vikhrevykh metodov vychislitelnoy gidrodinamiki. Diss. d-ra fiz.-mat. nauk [Development and implementation of T-schemes for numerical solution of boundary integral equations in mathematical models of vortex methods of computational fluid dynamics. Dr. Sc. (Phys.-Math.) Diss.]*. Moscow, BMSTU, 2021.
- [16] Muskhelishvili N.I. *Singular integral equations. Boundary problems of functions theory and their applications to mathematical physics*. Wolters-Noordhoff, 1958.
- [17] Sedov L.I. *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. Interscience, 1965.
- [18] Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovskiy airfoils. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, art. 012099.  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>

- [19] Milne-Thomson L.M. *Theoretical aerodynamics*. Dover, 1973.
- [20] Marchuk G.I., Agoshkov V.I. *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody* [Introduction to projection-grid methods]. Moscow, Nauka Publ., 1981.
- [21] Riman I.S., Kreps R.L. Added masses of bodies of various shapes. *TsAGI Proc.*, 1947, no. 635, p. 47 (in Russ.).
- [22] Dynnikova G.Ya. Added mass in a model of a viscous incompressible fluid. *Dokl. Phys.*, 2019, vol. 64, no. 10, pp. 397–400.  
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335819100045>

**Marchevskii I.K.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Sokol K.S.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Izmailova Yu.A.** — Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Marchevskii I.K., Sokol K.S., Izmailova Yu.A. *T*-schemes for mathematical simulation of vorticity generation on airfoils with corner points in vortex particle methods. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 4 (121), pp. 56–77 (in Russ.). EDN: QHKLXC