УДК 517.952 EDN: QKCUJL

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА

Л.В. Гаргянц gargyants@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача Коши для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка в случае одной пространственной переменной. Функция потока предполагается несимметричной степенной с единственной точкой перегиба в нуле, а начальные условия — неограниченными экспоненциального и степенного вида. Методом характеристик построены кусочно-гладкие обобщенные энтропийные решения. Эти решения определены во всей полуплоскости $t > 0$, имеют счетное число линий разрыва и меняют знак при переходе через каждую линию разрыва. Характеристиками являются прямые линии, а линии разрыва получаются как огибающие характеристик с использованием преобразования Лежандра. Для линий разрыва получены явные формулы. В случае степенного начального условия линиями разрыва являются гиперболы, в случае экспоненциальной начальной функции — логарифмические кривые. Для продолжения решения за линии разрыва использовано условие Ранкина — Гюгонио. В силу свойств функции потока условие возрастания энтропии выполняется автоматически. Таким образом, полученные решения являются обобщенными энтропийными по построению. Доказана односторонняя периодичность построенного решения по пространственной переменной в случае экспоненциального начального условия

Ключевые слова

Обобщенные энтропийные решения, законы сохранения, преобразование Лежандра

Поступила 23.11.2023

Принята 21.02.2024

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (код проекта FSFN-2024-0004)

Введение. Для заданных $f \in C^1(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0,\ (t,x) \in \Pi_T = (0,T)\times\mathbb{R},\ 0 < T \le \infty, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

В работах [1, 2] (см. также [3, с. 39–40, 65]) приведено следующее определение.

Определение 1. *Функция* $u : \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{loc}(\Pi_T)$, *называется обобщенным энтропийным решением задачи (1), (2), если:*

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ *выполнено неравенство* $|u-k|_t + \big(\operatorname{sign}(u-k)(f(u) - f(k))\big)_x \le 0$ *в* $D'(\Pi_T)$;

2) $\operatorname{ess}\lim\limits_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0(\cdot)$ *в* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *т. е. существует множество* $\varepsilon \subset (0,T)$ *полной меры Лебега, такое что* $u(t,\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $t \in \varepsilon$, $u(t,\cdot) \to u_0(\cdot)$ *в* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *при* $t \to 0+$, $t \in \varepsilon$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи (1), (2) в общем случае многих пространственных переменных для ограниченного начального условия доказана в [1]. Если функция $u_0(x)$ не является ограниченной, то решение задачи (1), (2) может быть неединственным, а также может не существовать (соответствующие примеры можно найти в [4–8]). В настоящей работе рассмотрены именно неограниченные начальные данные. Современное состояние теории задачи Коши для уравнений и систем первого порядка отражено, например, в [9, 10].

Построим кусочно-гладкие решения. В случае кусочно-гладких решений определение 1 можно заменить следующим предложением, доказанным в [11, 12].

Предложение 1. *Пусть* $u : \Pi_T \to \mathbb{R}$ *— кусочно-гладкая в полосе* Π_T *функция с не более чем счетным числом линий разрыва* Γ_n, *являющихся графиками функций* $\gamma_n \in C^1(0,T)$, *где* $n \in \quad \subseteq \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; *пусть эти линии не пересекаются и существуют односторонние пределы*

$$u_n^-(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)-0)} u(\tau,\xi),\ u_n^+(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)+0)} u(\tau,\xi)$$

функции $u(t,x)$ *при подходе к каждой линии разрыва* Γ_n. *Тогда* $u(t,x)$ *является обобщенным энтропийным решением уравнения (1) в том и только в том случае, когда выполнены условия:*

1) в области гладкости $u(t,x)$ *удовлетворяет (1) в классическом смысле;*

2) на каждой линии разрыва Γ_n *при каждом* $t \in (0, T)$ *выполнено условие Ранкина — Гюгонио*

$$\dot{\gamma}_n(t) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)};$$

3) для любого $n \in N$ *и для любого* $t \in (0,\ T)$ *выполнено условие допустимости разрыва: при* $u_n^+(t) > u_n^-(t)$ $(u_n^+(t) < u_n^-(t))$ *график функции* f *лежит не ниже (соответственно, не выше) хорды, соединяющей точки этого графика с абсциссами* $u_n^-(t)$, $u_n^+(t)$.

Замечание 1. *Первые два условия предложения 1 эквивалентны тому, что функция* $u(t,\ x)$ *является обобщенным решением (в смысле распределений) уравнения (1), а последнее является условием возрастания энтропии для кусочно-гладких решений. Условия на разрывах эквивалентны известному E-условию Олейник [13, 14].*

Задача Коши (1), (2) с нечетной функцией потока, имеющей в нуле единственную точку перегиба, и с неограниченным начальным условием рассмотрена в [15]. Предложен единый метод построения разрывных знакопеременных энтропийных решений этой задачи, основанный на преобразовании Лежандра.

Цель работы — распространить указанный метод на более общий случай функции потока с единственной точкой перегиба в нуле (необязательно нечетной).

В качестве примера рассмотрим задачу (1), (2) для несимметричной степенной функции потока с единственной точкой перегиба в нуле и с экспоненциальным или степенным начальным условием. Среди начальных данных, рассмотренных в [15], эти случаи выделяются тем, что для них получены явные формулы для линий разрыва (см. также [4, 6, 8, 15–19]).

Решения, построенные в [15], имеют следующую структуру. Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими непересекающимися кривыми Γ_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, являющимися графиками гладких функций $\gamma_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, на счетное число областей. Функциональная последовательность $\gamma_n(t)$ является неограниченно монотонно убывающей. В областях $D_n = \{(t, x) \mid \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\}$, $n \in \mathbb{N}$, между этими кривыми и в области $D_0 = \{(t, x) \mid x > \gamma_0(t)\}$ решение является классическим, а каждая кривая Γ_n — линией сильного разрыва (ударной волной), причем со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n представляет собой огибающую семейства характеристик из области D_n. Огибающие семейств прямых на плоскости определяются преобразованием Лежандра [20].

Рассматриваемые здесь решения имеют ту же структуру, что и в [15]. Предпошлем доказательству основных результатов несколько вспомогательных рассуждений.

Вспомогательные рассуждения. Характеристическая система для уравнения (1) имеет вид [11]: $\dot{t}=1, \dot{x}=f'(u), \dot{u}=0$.

В областях D_n характеристиками являются прямые линии: $x = kt-g_n(k), g_n''(k)<0,$ параметризованные угловым коэффициентом k.

Далее рассмотрим степенную функцию потока $f(u)=A_1\,|\,u\,|^{\alpha-1}\,u$, если $u>0$, и $f(u)=A_2\,|\,u\,|^{\alpha-1}\,u$, если $u<0$, где $A_1, A_2>0$.

Условие Ранкина — Гюгонио на линии разрыва $x=\gamma_n(t)$

$$\dot{\gamma}_n(t)=f'(u_n^+(t))=\frac{f(u_n^+(t))-f(u_n^-(t))}{u_n^+(t)-u_n^-(t)}$$

приводит к равенству $f(u_n^-(t))=f(u_n^+(t))+f'(u_n^+(t))\cdot(u_n^-(t)-u_n^+(t))$, которое определяет отображения $u^+=u_n^+(t)\to u^-=u_n^-(t)$ (вследствие несимметричности функции потока этих отображений будет два). Определим отображения $k^+=f'(u^+)\to k^-=f'(u^-)$. Далее обозначим (см. определение 3) эти отображения как $\varphi(k)$ и $\tilde{\varphi}(k)$ (в силу нечетности функции $f(u)$ в [15] эти отображения совпадают).

Прямые $x=k^+t-g_n(k^+)$ и $x=k^-t-g_{n+1}(k^-)$ пересекаются в некоторой точке $(t^*,\gamma_n(t^*))\in\Gamma_n$, т. е. $k^+t^*-g_n(k+)=k^-t^*-g_{n+1}(k-)=\gamma_n(t^*)$. Кривая Γ_n является огибающей семейства прямых $x=kt-g_n(k)$, функция $\gamma_n(t)$ — преобразованием Лежандра функции $g_n(k)$. Следовательно, $t^*=g_n'(k^+)$, получаем рекуррентное соотношение $g_{n+1}(k^-)=g_n(k^+)+ g_n'(k^+)(k^- - k^+)$.

Напомним, что *преобразованием Лежандра* гладкой выпуклой вверх функции $g(k)$ называют функцию $\gamma(t)=L(g)(t)=\inf\limits_k(kt-g(k))$.

Определение 2. *Функция* $f\in C^1(\mathbb{R})$ *принадлежит классу* F, *если*:

1) $f\in C^\infty(-\infty;\ 0)\cap C^\infty(0;\ +\infty)$;

2) $f'(u)$ *строго монотонно убывает от* $+\infty$ *до* $k_*=f'(0)$ *на отрицательной полуоси и строго монотонно возрастает от* k_* *до* $+\infty$ *на положительной полуоси;* $f''(u)>0$ *при* $u>0$, $f''(u)<0$ *при* $u<0$.

Определение 3. *Для функций* $f\in F$ *определим отображения* $k^- = \varphi_f(k^+)$ *и* $\tilde{k}^-=\tilde{\varphi}_f(k^+)$, φ_f, $\tilde{\varphi}_f:(k_*;\ +\infty)\to(k_*;\ +\infty)$.

1. *Разрешим уравнение* $f'(u^+) = k^+$ *относительно* u^+. *Положительный и отрицательный корни обозначим как* u^+ *и* $\tilde{u}^+$.

2. *Разрешим уравнение* $f(u^-) - f(*) = k^+(u^- - *), * = u^+, \tilde{u}^+$ *относительно* u^-.

3. *Примем* $k^- = \varphi_f(k^+) = f'(u^-)$, $\tilde{k}^- = \tilde{\varphi}_f(k^+) = f'(\tilde{u}^-)$.

Отметим, что $\varphi_f = \tilde{\varphi}_f$, если функция f нечетная.

Лемма 1. *Пусть* $f(u) = A_1 |u|^{\alpha-1} u$, *если* $u > 0$, *и* $f(u) = A_2 |u|^{\alpha-1} u$, *если* $u < 0$, *где* $A_1, A_2 > 0$. *Тогда*

$$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \frac{A_2}{A_1} k, \quad \tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varkappa}^{\alpha-1} \frac{A_1}{A_2} k.$$

◄ Поскольку $f'(u) = \alpha A_1 |u|^{\alpha-1}$, $u > 0$ и $f'(u) = \alpha A_2 |u|^{\alpha-1}$, $u < 0$, уравнение $f(u^-) - f(*) = f'(u^+)(u^- - *), * = u^+, \tilde{u}^+$ является однородным. Выполнив замену $v = u^- / u^+$, $\tilde{v} = u^- / \tilde{u}^+$ (в силу свойств функции f значения v и $\tilde{v}$ отрицательны), получим уравнения $A_1 |v|^{\alpha-1} - A_2 = \alpha A_1 \tilde{v} - \alpha A_1$ и $A_2 |\tilde{v}|^{\alpha-1} - A_1 = \alpha A_2 \tilde{v} - \alpha A_2$. Каждое уравнение имеет единственный отрицательный корень, который обозначим как $-\kappa$ и $-\tilde{\kappa}$. Тогда

$$k^- = f'(u^-) = A_2 \alpha |u^-|^{\alpha-1} = A_2 \alpha \kappa^{\alpha-1} |u^+|^{\alpha-1} = \varkappa^{\alpha-1} \frac{A_2}{A_1} k^+.$$

Следовательно, $\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \frac{A_2}{A_1} k$. Аналогично, $\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varkappa}^{\alpha-1} \frac{A_1}{A_2} k$. ►

Лемма 2. *1. Пусть* $g_0(k) = \ln k - C_0$. *Тогда семейство функций* $g_n(k)$, *заданных рекуррентным соотношением*

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_{n'}(k)(\varphi_f(k) - k)$$

для четных n, *и*

$$g_{n+1}(\tilde{\varphi}(k)) = g_n(k) + g_{n'}(k)(\tilde{\varphi}_f(k) - k)$$

для нечетных n, *имеет вид*

$$g_n(k) = \ln k - C_0 + [(n+1)/2] B_1 + [n/2] B_2,$$
$$A = A(\alpha, A_1),\ B_i = B_i(\alpha, A_1, A_2),\ i = 1, 2.$$

2. Пусть $g_0(k) = C_0 k^\sigma$, $0 < \sigma < 1$. *Тогда семейство функций* $g_n(k)$, *заданных тем же рекуррентным соотношением, имеет вид* $g_n(k) = C_n k^\sigma$.

Лемма 2 проверяется непосредственными вычислениями.

Основные результаты. Теорема 1. *У задачи Коши для уравнения (1) с функцией потока*

$$f(u)=\begin{cases} A_1\,|\,u\,|^{\alpha-1}\,u,\ u>0,\\ A_2\,|\,u\,|^{\alpha-1}\,u,\ u<0,\ A_1, A_2>0\end{cases} \tag{3}$$

и начальным условием $u_0(x)=e^{-x/(\alpha-1)}$ *существует обобщенное энтропийное решение* $u(t,x)$, *которое:*

1) определено во всей полуплоскости $t>0$ *и локально ограничено в ней;*

2) имеет счетное число линий разрыва $\Gamma_n,\ n\in\mathbb{N}_0$, *являющихся графиками функций*

$$\gamma_n(t)=\left(1+\ln t+A\right)-\left[\frac{n+1}{2}\right]B_1-\left[\frac{n}{2}\right]B_2, \tag{4}$$

где $A=A(\alpha, A_1),\ B_i=B_i(\alpha, A_1, A_2),\ i=1,\,2;$

3) является знакочередующимся и удовлетворяет соотношениям

$$u(t,x)=U_1\left(t,x+\left[\frac{n-1}{2}\right]B_1+\left[\frac{n}{2}\right]B_2\right),\ (t,x)\in D_n,\ \textit{при четных } n,$$

$$u(t,x)=U_2\left(t,x+\left[\frac{n-1}{2}\right]B_1+\left[\frac{n-2}{2}\right]B_2\right),\ (t,x)\in D_n,\ \textit{при нечетных } n>1,$$

где $D_n=\{(t,x)\,|\,\gamma_n(t)<x<\gamma_{n-1}(t)\},\ N\in\mathbb{N};\ U_1=u\big|_{D_1}>0,\ U_2=u\big|_{D_2}<0.$

Теорема 2. *У задачи Коши для уравнения (1) с функцией потока (3) и начальным условием* $u_0(x)=|\,x\,|^{1/(\sigma(\alpha-1))}$ *существует обобщенное энтропийное решение, которое определено во всей полуплоскости* $t>0$ *и обладает счетным числом линий разрыва* $\Gamma_n,\ n\in\mathbb{N}_0$, *являющихся графиками функций* $\gamma_n(t)=\eta_n t^{-\theta}$, *где* $\theta=\sigma/(1-\sigma)$.

Доказательство теорем 1, 2. Отметим, что функция потока (3) принадлежит классу F, а отображения φ и $\tilde{\varphi}$ задаются формулами

$$\varphi(k)=\varkappa^{\alpha-1}\frac{A_2}{A_1}k,\ \ \tilde{\varphi}(k)=\tilde{\varkappa}^{\alpha-1}\frac{A_1}{A_2}k\ \text{(лемма 1).}$$

Характеристиками в области D_0 являются прямые $x=f'(u_0(s))t+s$, $s\in\mathbb{R}$.

1. Если $u_0(x)=e^{-x/(\alpha-1)}$, то $x=A_1e^{-s}t+s$. Обозначив $k=A_1e^{-s}$, получим $x=kt-g_0(k)$, где $g_0(k)=\ln k-\ln A_1\alpha$. Тогда

$$g_n(k) = \ln k - \ln A_1\alpha + \left[\frac{n+1}{2}\right]B_1 + \left[\frac{n}{2}\right]B_2 \text{ (лемма 2).}$$

Поскольку функции $g_n(k)$ являются гладкими выпуклыми вверх, для них определено преобразование Лежандра.

Найдем преобразование Лежандра функции $g(k) = \ln k$. Имеем $g'(k) = 1/k$. Тогда $L(g)(t) = t\dfrac{1}{t} - \ln\dfrac{1}{t} = 1 + \ln t$. Поскольку $L(g+C)(t) = = L(g)(t) - C$, получим формулу (4).

В силу свойств функции потока решение является знакочередующимся, а поскольку линии разрыва получаются сдвигом на фиксированную константу, решение обладает свойством односторонней периодичности по пространственной переменной.

2. Если $u_0(x) = |x|^{1/(\sigma(\alpha-1))}$, $0 < \sigma < 1$, то $x = A_1|s|^{1/\sigma}t + s$. Если $s > 0$, то характеристики не пересекаются, поэтому в области $x > 0$ существует классическое решение задачи Коши. Если $s < 0$, то, обозначив $k = |s|^{1/\sigma}$, получим $x = kt - g_0(k)$, где $g_0(k) = (k/A_1)^\sigma$. Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma$ (лемма 2).

Найдем преобразование Лежандра функции $g(k) = k^\sigma$. Имеем $g'(k) = \sigma k^{\sigma-1}$. Тогда

$$L(g)(t) = t(\sigma/t)^{1/(1-\sigma)} - (\sigma/t)^{\sigma/(1-\sigma)} = (\sigma^{1/(1-\sigma)} - \sigma^{\sigma/(1-\sigma)})t^{-\theta},\ \theta = \sigma/(1-\sigma).$$

Поскольку $L(Cg)(t) = CL(g)(t/C)$, получим $\gamma_n(t) = \eta_n t^{-\theta}$. В силу свойств функции потока решение также является знакочередующимся.

Отметим, что условие допустимости разрыва в каждом случае выполнено автоматически вследствие свойств функции потока.

Заключение. Построены обобщенные энтропийные решения задачи Коши (1), (2) с несимметричной степенной функцией потока и начальными условиями экспоненциального и степенного вида. Для экспоненциального начального условия доказана односторонняя периодичность построенного решения по пространственной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными. *Математический сборник*, 1970, т. 81, № 2, с. 228–255.

[2] Кружков С.Н. Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка. *Докл. АН СССР*, 1969, т. 187, № 1, с. 29–32.

[3] Бахвалов С.Н., ред. Труды С.Н. Кружкова. М., ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[4] Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю. О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. *Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*, 2002, т. 236, № 5, с. 120–133.

[5] Goritsky A.Yu., Panov E.Yu. Example of nonuniqueness of entropy solutions in the class of locally bounded functions. *Russ. J. Math. Phys.*, 1998, vol. 6, no. 4, pp. 492–494. EDN: MWPUKZ

[6] Таргянц Л.В. О локально ограниченных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока. *Мат. заметки*, 2018, т. 104, вып. 2, с. 191–199. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11626

[7] Gargyants L.V. Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data. *Russ. J. Math. Phys.*, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 412–414. DOI: https://doi.org/10.1134/S106192081703013X

[8] Горицкий А.Ю., Гаргянц Л.В. О неединственности неограниченных решений задачи Коши для скалярных законов сохранения. *Тр. семинара им. И.Г. Петровского,* 2019, № 32, с. 111–133.

[9] Dafermos C.M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-49451-6

[10] Serre D. Systems of conservation laws 1, 2. Cambridge Univ. Press, 1999, 2000.

[11] Evans L.C. Partial differential equations. AMS, 1998.

[12] Lax P. Hyperbolic partial differential equations. AMS, 2006.

[13] Олейник О.А. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. *Докл. АН СССР*, 1954, т. 95, № 3, с. 451–454.

[14] Олейник О.А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. *Успехи мат. наук*, 1959, т. 14, № 2, с. 165–170.

[15] Гаргянц Л.В., Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю. Построение неограниченных разрывных решений скалярных законов сохранения при помощи преобразования Лежандра. *Мат. сборник*, 2021, т. 212, № 4, с. 29–44.
DOI: https://doi.org/10.4213/sm9383

[16] Горицкий А.Ю. Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счетным числом ударных волн. *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика*, 1999, № 2, с. 3–6.

[17] Гаргянц Л.В. Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения. *Дифференциальные уравнения,* 2016, т. 52, № 4, с. 481–489. EDN: VTOWJJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064116040075

[18] Gargyants L.V. Unbounded solutions of one-dimensional conservation laws with asymmetrical flux function. *AIP Conf. Proc.*, 2023, vol. 2849, iss. 1, art. 200006.
DOI: https://doi.org/10.1063/5.0163005

[19] Гаргянц Л.В. О задаче Коши для одномерного закона сохранения с начальными условиями, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на бесконечности. *Дифференциальные уравнения*, 2022, т. 58, № 3, с. 309–318. EDN: BXLRJB

[20] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., МЦНМО, 2012.

Гаргянц Лидия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гаргянц Л.В. Неограниченные решения одномерных законов сохранения с несимметричной степенной функцией потока. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 5 (116), с. 4–14. EDN: QKCUJL

UNBOUNDED SOLUTIONS OF ONE-DIMENSIONAL CONSERVATION LAWS WITH ASYMMETRICAL POWER-TYPE FLUX FUNCTION

L.V. Gargyants gargyants@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers a problem for the quasilinear first-order partial differential equation in the case of one spatial variable. Flow function is assumed to be the asymmetric power function with a single inflection point at zero, the initial conditions are of the unbounded exponential and power types. Piecewise smooth generalized entropy solutions are constructed using the characteristic method. These solutions are defined within the entire half-plane $t > 0$, they have a countable number of discontinuity lines, and are changing their sign while passing through each discontinuity line. The characteristics are straight lines and the discontinuity lines are obtained by enveloping the characteristics using the Legendre transform. Explicit formulas are obtained for the discontinuity lines. In the case of a power-type initial condition, hyperbolas are the discontinuity lines. While in the case of exponential initial function, they are the logarithmic curves.

Keywords

Generalized entropy solutions, conservation laws, Legendre transform

The Rankine — Hugoniot condition is used to continue solution beyond the discontinuity line. Due to the flux function properties, the entropy increase condition is satisfied automatically. Thus, the obtained solutions are the generalized entropy by construction. The paper proves one-sided periodicity of the constructed solution with respect to the spatial variable in the case of an exponential initial condition

Received 23.11.2023
Accepted 21.02.2024

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSFN-2024-0004)

REFERENCES

[1] Kružkov S.N. First order quasilinear equations in several independent variables. *Math. USSR Sb*., 1970, vol. 10, no. 2, pp. 217–243.
DOI: https://doi.org/10.1070/SM1970v010n02ABEH002156

[2] Kruzhkov S.N. Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations. *Dokl. AN SSSR*, 1969, vol. 187, no. 1, pp. 29–32 (in Russ.).

[3] Bakhvalov S.N., ed. Trudy S.N. Kruzhkova [Collected works by S.N. Kruzhkov]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2000.

[4] Goritskiy A.Yu., Panov E.Yu. Locally bounded generalized entropy solutions to the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation. *Tr. MIAN im. V.A. Steklova* [Proc. Steklov Inst. Math.], 2002, vol. 236, no. 5, pp. 120–133 (in Russ.).

[5] Goritsky A.Yu., Panov E.Yu. Example of nonuniqueness of entropy solutions in the class of locally bounded functions. *Russ. J. Math. Phys*., 1998, vol. 6, no. 4, pp. 492–494. EDN: MWPUKZ

[6] Gargyants L.V. On locally bounded solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation with power flux function. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 1-2, pp. 210–217. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618070222

[7] Gargyants L.V. Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data. *Russ. J. Math. Phys.*, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 412–414. DOI: https://doi.org/10.1134/S106192081703013X

[8] Goritsky A.Yu., Gargyants L.V. Nonuniqueness of unbounded solutions of the Cauchy problem for scalar conservation laws. *J. Math. Sci*., 2020, vol. 244, no. 2, pp. 183–197. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04613-2

[9] Dafermos C.M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-49451-6

[10] Serre D. Systems of conservation laws 1, 2. Cambridge Univ. Press, 1999, 2000.

[11] Evans L.C. Partial differential equations. AMS, 1998.

[12] Lax P. Hyperbolic partial differential equations. AMS, 2006.

[13] Oleynik O.A. Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation. *Dokl. AN SSSR*, 1954, vol. 95, no. 3, pp. 451–454 (in Russ.).

[14] Oleynik O.A. Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation. *Uspekhi mat. nauk*, 1959, vol. 14, no. 2, pp. 165–170 (in Russ.).

[15] Gargyants L.V., Goritsky A.Yu., Panov E.Yu. Constructing unbounded discontinuous solutions of scalar conservation laws using the Legendre transform. *Sb. Math.*, 2021, vol. 212, no. 4, pp. 475–489. DOI: https://doi.org/10.1070/SM9383

[16] Goritsky A.Yu. Construction of an unbounded entropy solution of the Cauchy problem with a countable number of shock waves. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika, mekhanika*, 1999, no. 2, pp. 3–6 (in Russ.).

[17] Gargyants L.V. Locally bounded solutions of one-dimensional conservation laws. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 458–466.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266116040066

[18] Gargyants L.V. Unbounded solutions of one-dimensional conservation laws with asymmetrical flux function. *AIP Conf. Proc.*, 2023, vol. 2849, iss. 1, art. 200006.
DOI: https://doi.org/10.1063/5.0163005

[19] Gargyants L.V. On the Cauchy problem for a one-dimensional conservation law with initial conditions coinciding with a power or exponential function at infinity. *Diff. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 304–313.
DOI: https://doi.org/10.1134/S001226612203003X

[20] Arnold V.I. Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations]. Moscow, MCCME Publ., 2012.

Gargyants L.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Gargyants L.V. Unbounded solutions of one-dimensional conservation laws with asymmetrical power-type flux function. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 5 (116), pp. 4–14 (in Russ.).
EDN: QKCUJL