УДК 681.51

ЛЕНТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ MIMO-СИСТЕМ

Н.Е. Зубов[1,2], **Е.А. Микрин**[1,2], **М.Ш. Мисриханов**[2], **В.Н. Рябченко**[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: nezubov@bmstu.ru

[2]ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королёва",
Королев, Московская область, Российская Федерация
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Рассмотрено применение метода Крылова в теории управления для решения разнообразных задач анализа и синтеза линейных динамических MIMO-систем. На основе ленточных формул анализа управляемости представлен подход для анализа и синтеза линейных динамических MIMO-систем. С помощью преобразований ленточных матриц управляемости найдена ленточная формула, связывающая параметры MIMO-системы и коэффициенты характеристического полинома.

Ключевые слова: матричный делитель нуля, динамическая система, управляемость, ленточный критерий, обратная связь по состоянию, параметризация регуляторов.

BAND FORMULAS FOR ANALYSIS AND SYNTHESIS OF CONTROLLED DYNAMIC MIMO SYSTEMS

N.E. Zubov[1,2], **E.A. Mikrin**[1,2], **M.Sh. Misrikhanov**[2], **V.N. Ryabchenko**[1,2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: nezubov@bmstu.ru

[2]OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya",
Korolev, Moscow region, Russian Federation
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

The application of A.N. Krylov's method in the control theory for solving various problems of analysis and synthesis of linear dynamic multi-input multi-output (MIMO) systems is discussed. These problems include the calculation of a balanced implementation of the linear MIMO system transfer matrix in the state space; reduction and decomposition of a model of this system in the state space; the definition of controlled and observed subspaces; stabilization using state elements feedback; synthesis of the control that provides the system invariance to the external perturbation. An approach is presented for analysis and synthesis of linear dynamical MIMO-systems on the basis of band formulas of controllability analysis. Using transformations of controllability band matrices, the band formula, connecting the MIMO-system parameters and the characteristic polynomial coefficients, is found.

Keywords: matrix zero divisor, dynamical system, controllability, band criterion, state feedback, parameterization of regulators.

Введение и постановка задачи. В теории управления для решения разнообразных задач анализа и синтеза линейных динамических

MIMO-систем (Multiple Inputs Multiple Outputs Systems), т.е. систем со многими входами и выходами, широко используется метод Крылова. К таким задачам относятся [1–5] вычисление сбалансированной реализации передаточной матрицы MIMO-системы в пространстве состояний; редукция и декомпозиция модели этой системы в пространстве состояний; определение управляемых и наблюдаемых подпространств; стабилизация с помощью обратной связи по элементам состояния; синтез управления, обеспечивающего инвариантность системы к внешним возмущениям и т.д.

Рассмотрим полностью управляемую линейную MIMO-систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — векторный вход; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Корни характеристического полинома

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n; $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексное число, определяющее устойчивость MIMO-системы (1).

В первоначальном виде метод Крылова предназначен для решения задачи нахождения коэффициентов характеристического полинома матрицы (2) по значениям ее элементов. С позиции алгебры эта задача имеет решение, если n векторов $A^{n-1}b, \ldots, A, b$ образуют полный базис в множестве $\mathbb{R}^n$. Такой базис всегда существует (всегда найдется подходящий вектор b), если характеристический полином (2) совпадает с минимальным характеристическим полиномом.

Матрицы, удовлетворяющие приведенному ниже условию, получили название циклических матриц [6]. Отметим, что линейные (циклические) подпространства, образованные векторами $A^{k-1}b, \ldots, A$, $b\,(k < n)$,

$$\operatorname{span}\left(A^{k-1}b, \ldots, A, b\right), \quad k < n$$

получили название подпространств Крылова (Krylov Subspaces) [7].

С позиций современной теории управления пара (A, b) с циклической матрицей A называется полностью управляемой и соответствует линейной SIMO-системе (Single Input Multi Output System), т.е. системе с одним входом и многими выходами. В этом случае матрица управляемости Калмана

$$\begin{pmatrix} b & Ab & \ldots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{3}$$

является квадратной и обратимой.

На основе (3) для SIMO-систем Аккерманном [4], Бассом [3], а также авторами работы [9] были предложены явные формулы, позволяющие по коэффициентам исходного (2) и заданного характеристического полинома

$$\det\left(\lambda I_n - A + BK\right) = \lambda^n + \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

вычислить регулятор в законе управления с обратной связью

$$u = -Kx. \qquad (5)$$

Для MIMO-системы (1) матрица управляемости Калмана

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times rn} \qquad (6)$$

является прямоугольной, что не позволяет напрямую воспользоваться методом Крылова для решения задачи вычисления коэффициентов характеристического полинома и нахождения регулятора.

Известна формула [10], связывающая матрицу управляемости (6) MIMO-системы (1) и сопровождающую матрицу Фробениуса (матрицу A в канонической наблюдаемой форме [3]) для полинома (2).

Запишем сопровождающую матрицу Фробениуса

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

в компактном виде

$$\boldsymbol{F} = \underline{\mathrm{E}}_n - ae_n^{\mathrm{T}}.$$

Здесь

$$\underline{\mathrm{E}}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}; \quad a = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad (8)$$

e_n — единичный орт с единицей на n-м месте. Тогда существует равенство [10]

$$AC = C\left(F \otimes I_r\right), \qquad (9)$$

где $\otimes$ — символ операции кронекерова произведения матриц.

В настоящей работе решается следующая задача. На основе преобразований ленточных матриц управляемости требуется найти ленточную формулу, связывающую параметры MIMO-системы и коэффициенты характеристического полинома (2). Использовать полученную формулу для явного описания регулятора MIMO-системы, обеспечивающего системе, замкнутой управлением (5), коэффициенты характеристического полинома, как у (4).

Ленточная формула для определения коэффициентов характеристического полинома MIMO-системы. Рассмотрим представление матрицы управляемости (6) в следующем блочно-матричном виде [5]:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} (I_n \otimes B),$$

или в обобщенной форме

$$C = \beta\, \Omega^{-1} \alpha. \tag{10}$$

В (10) использованы матрицы

$$\beta = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n^2}; \tag{11}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} I_n & -A & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} = I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A; \tag{12}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix} = I_n \otimes B; \tag{13}$$

$$\overline{E}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Воспользовавшись соотношениями (10)–(13), запишем уравнение (9) в компактном виде

$$A\beta\,\Omega^{-1}\alpha \,=\beta\,\Omega^{-1}\alpha\,\left(F\otimes I_r\right),$$

или эквивалентно

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\,(F\otimes I_r) \end{pmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Введем понятие "левый и правый аннулятор" [11] (матричных делителей нуля), тогда уравнение (14) можно переписать в виде, аналогичном уравнению, приведенному в работе [9]:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\,(F\otimes I_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

В формуле (15) матрица $\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp}$ — правый делитель нуля максимального ранга матрицы $\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}$ [11]:

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp} = 0 \in \mathbb{R}^{n\times s},\ \ s = n^2 - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

С помощью (11) правый делитель нуля $\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp}$ можно определить в явном виде [11]. Нетрудно показать, что выполняется тождество

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}}A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}}A & 0 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где β^+ — матрица, псевдообратная к матрице β; $A_R^{\perp}$ — правый делитель нуля матрицы A; $\beta_R^{\perp}$ — правый делитель нуля матрицы (11).

В соответствии с матрицей (11) $\beta^+ = \beta^{\text{т}}$. Тогда вместо соотношения (16) можно записать

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}}A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}}A & 0 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где

$$\beta_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-1}\otimes I_n \end{pmatrix}.$$

Проверяя формулу (16), получаем

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta^{\text{т}}A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}}A & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A\beta\beta^{\text{т}}A_R^{\perp} & A\beta\beta^{\text{т}} - \beta\beta^{\text{т}}A & -\beta\beta_R^{\perp} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} AA_R^{\perp} & A - A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если матрица A — обратимая, то $A_R^{\perp} = 0$ [11] и формула (16) преобразуется к относительно простой формуле

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, проверяя, получаем

$$\begin{pmatrix} A\beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\beta\beta^{\text{т}} - \beta\beta^{\text{т}} A & A\beta\beta_R^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя (17) в (15), записываем соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\ (\boldsymbol{F} \otimes I_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

которое будем рассматривать как уравнение относительно матрицы Фробениуса F (7).

Выполним для уравнения (18) следующее преобразование (слева):

$$\left(I_2 \otimes \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp} \\ \alpha^{+} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\ (\boldsymbol{F} \otimes I_r) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(I_2 \otimes \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp} \\ \alpha^{+} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где

$$I_2 \otimes \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp} \\ \alpha^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp} & 0 \\ \alpha^{+} & 0 \\ 0 & \alpha_L^{\perp} \\ 0 & \alpha^{+} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица, ненулевые блоки которой удовлетворяют тождеству

$$\begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp} \\ \alpha^{+} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\operatorname{rank}\alpha} \end{pmatrix}.$$

Здесь α^{+} — матрица, псевдообратная к матрице α; $\alpha_L^{\perp}$ — левый делитель нуля матрицы (13) максимального ранга (определение левого делителя нуля симметрично определению правого делителя нуля [11]).

На основе (19) получим два матричных уравнения:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ I_{\operatorname{rank}\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp}\Omega \\ \alpha^{+}\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \otimes I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F \otimes I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp}\Omega \\ \alpha^{+}\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix},$$

которые перепишем в виде трех матричных соотношений:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp}\Omega & 0 \\ 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}; \tag{20}$$

$$I_{\operatorname{rank}\alpha} = \alpha^{+}\Omega \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}; \tag{21}$$

$$\boldsymbol{F} \otimes I_r = \alpha^{+}\Omega \begin{pmatrix} 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Рассмотрим уравнения (20), (21) как условия для выбора матрицы $\begin{pmatrix} \mu_1^{\text{т}} & \mu_2^{\text{т}} & \mu_3^{\text{т}} \end{pmatrix}^{\text{т}}$, а уравнение (22) — как собственно решение, т.е. матрицу Фробениуса F (7).

Проанализируем (20), вследствие чего справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp}\Omega & 0 \\ 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \\ 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix}}\Bigg|_R^{\perp} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\text{т}} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta_R^{\perp} \\ 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix}_R^{\perp},$$

т.е. матрица $\begin{pmatrix} \mu_1^{\text{т}} & \mu_2^{\text{т}} & \mu_3^{\text{т}} \end{pmatrix}^{\text{т}}$ — правый делитель нуля матрицы максимального ранга

$$\begin{pmatrix} \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\text{т}} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta_R^{\perp} \\ 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix},$$

которая должна удовлетворять дополнительному соотношению (21):

$$\alpha^{+}\Omega \begin{pmatrix} \beta^{\text{т}} A_R^{\perp} & \beta^{\text{т}} & \beta_R^{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = I_{\operatorname{rank}\alpha},$$

или в раскрытом виде

$$\alpha^{+}\Omega\beta^{\text{т}} A_R^{\perp}\mu_1 + \alpha^{+}\Omega\beta^{\text{т}}\mu_2 + \beta_R^{\perp}\mu_3 = I_{\operatorname{rank}\alpha}.$$

Допустим, что это действительно так. Тогда имеет место формула

$$\boldsymbol{F} \otimes I_r = \alpha^+ \Omega \begin{pmatrix} 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_L^\perp \Omega \beta^{\text{т}} A_R^\perp & \alpha_L^\perp \Omega \beta^{\text{т}} & \alpha_L^\perp \Omega \beta_R^\perp \\ 0 & \alpha_L^\perp \Omega \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix}_R^\perp =$$

$$= \alpha^+ \Omega \begin{pmatrix} 0 & \beta^{\text{т}} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \alpha^+ \Omega \mu_2. \quad (23)$$

Подставляя в (23) ленточные матрицы [9]

$$\alpha^+ = \begin{pmatrix} B^+ & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B^+ & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B^+ & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B^+ \end{pmatrix} = I_n \otimes B^+;$$

$$\alpha_L^\perp = \begin{pmatrix} B_L^\perp & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_L^\perp & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_L^\perp & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_L^\perp \end{pmatrix} = I_n \otimes B_L^\perp,$$

где

$$B_L^\perp B = 0, \quad \operatorname{rank} B_L^\perp = n - r, \quad (24)$$

получаем ленточную формулу, связывающую коэффициенты характеристического полинома MIMO-системы с парой $(A,\ B)$ без явного участия матрицы управляемости (6):

$$F \otimes I_r = \left(I_n \otimes B^+\right) \Omega \mu_2. \quad (25)$$

В раскрытом виде согласно (7), (12) ленточная формула (25) имеет вид

$$\left(\underline{E}_n - a e_n^{\text{т}}\right) \otimes I_r = \left(I_n \otimes B^+\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \mu_2, \quad (26)$$

где

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ 0 & \Psi_{22} & 0 \end{pmatrix}_R^\perp; \quad (27)$$

$$\Psi_{11} = \alpha_L^\perp \Omega \beta^{\text{т}} A_R^\perp = \left(I_n \otimes B_L^\perp\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \begin{pmatrix} A_R^\perp \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$\Psi_{12} = \alpha_L^\perp \Omega \beta^{\text{т}} = \left(I_n \otimes B_L^\perp\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (29)$$

$$\Psi_{13} = \alpha_L^\perp \Omega \beta_R^\perp = \left(I_n \otimes B_L^\perp\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix}; \quad (30)$$

$$\Psi_{22} = \alpha_L^\perp \Omega \beta^{\mathrm{т}} A = \left(I_n \otimes B_L^\perp\right)\left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right)\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (31)$$

$$\left(I_n \otimes B^+\right)\left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} A_R^\perp & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = I_{\operatorname{rank}\alpha}. \qquad (32)$$

Выражение (32) следует рассматривать как условие нормировки.

В случае динамической системы с одним входом и многими выходами (SIMO-системы)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$r = 1$ и формула (26) принимает упрощенный вид:

$$\underline{\mathrm{E}}_n - ae_n^{\mathrm{т}} = \left(I_n \otimes b^+\right)\left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right)\mu_2.$$

Таким образом, вектор коэффициентов характеристического полинома a (8) определяется по следующей ленточной формуле (записанной в форме кронекерова произведения):

$$a = \left(\left(I_n \otimes b^+\right)\left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right)\mu_2 - \underline{\mathrm{E}}_n\right)e_n,$$

или с учетом тождества $\underline{\mathrm{E}}_n e_n = e_{n-1}$

$$a = \left(I_n \otimes b^+\right)\left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right)\mu_2 e_n - e_{n-1}. \qquad (33)$$

Формула (33) эквивалентна формуле, ранее полученной в работе [9]:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^+A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b^+ & -b^+A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^+ & -b^+A & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b^+ & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b^+A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^+ \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -b_L^\perp A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_L^\perp & -b_L^\perp A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_L^\perp & -b_L^\perp A & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_L^\perp & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b_L^\perp A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_L^\perp \end{pmatrix}_R^\perp . \qquad (34)$$

Ленточная формула регулятора MIMO-системы. Для вывода явной формулы регулятора MIMO-системы, обеспечивающего этой системе, замкнутой управлением (5), коэффициенты как у характеристического полинома (4), применим выражение (26). Очевидно, что для замкнутой системы можно записать

$$\left(\underline{\mathrm{E}}_n - de_n^{\mathrm{т}}\right) \otimes I_r = \left(I_n \otimes B^+\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes (A - BK)\right) \overset{\frown}{\mu}_2, \quad (35)$$

где

$$d = \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix};$$

$\overset{\frown}{\mu}$ — некоторая подходящая матрица.

Примем, что матрица $A-BK$ асимптотически устойчивая и, следовательно, невырожденная. В этом случае правый делитель нуля $A_R^{\perp} = 0$ и вместо формул (27)–(32) запишем:

$$\overset{\frown}{\Psi}_{11} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\frown}{\mu}_2 \\ \overset{\frown}{\mu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\frown}{\Psi}_{12} & \overset{\frown}{\Psi}_{13} \\ \overset{\frown}{\Psi}_{22} & 0 \end{pmatrix}_R^{\perp}; \quad (36)$$

$$\overset{\frown}{\Psi}_{12} = \left(I_n \otimes B_L^{\perp}\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes (A - BK)\right) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (37)$$

$$\overset{\frown}{\Psi}_{13} = \left(I_n \otimes B_L^{\perp}\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes (A - BK)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix}; \quad (38)$$

$$\overset{\frown}{\Psi}_{22} = \left(I_n \otimes B_L^{\perp}\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes (A - BK)\right) \begin{pmatrix} A - BK \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (39)$$

$$\left(I_n \otimes B^+\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes (A - BK)\right) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\frown}{\mu}_2 \\ \overset{\frown}{\mu}_3 \end{pmatrix} = I_{\mathrm{rank}\,\alpha}.$$

Нетрудно заметить, что в силу (24) вместо формул (37)–(39) следует записать

$$\overset{\frown}{\Psi}_{12} = \left(I_n \otimes B_L^{\perp}\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi_{12};$$

$$\overset{\frown}{\Psi}_{13} = \left(I_n \otimes B_L^{\perp}\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix} = \Psi_{13};$$

$$\overset{\frown}{\Psi}_{22} = \left(I_n \otimes B_L^{\perp}\right) \left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A\right) \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi_{22},$$

т.е. матрицы Ψ_{12}, Ψ_{13} и Ψ_{22} инварианты относительно действия обратной связи (5). Откуда следует, что и матрицы (36) также инвариантны к обратной связи.

На основе выполненного анализа вместо формулы (35) запишем

$$\left(\underline{\mathrm{E}}_n - de_n^{\mathrm{т}}\right) \otimes I_r = \left(I_n \otimes B^+\right)\left(I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes (A - BK)\right)\mu_2. \quad (40)$$

Вычтем соответствующие части выражений (26) и (40), в результате получим

$$(a - d)\, e_n^{\mathrm{т}} \otimes I_r = \left(I_n \otimes B^+\right)\left(\overline{E}_n \otimes BK\right)\mu_2.$$

Следовательно, запишем цепочку утверждений

$$(a - d)\, e_n^{\mathrm{т}} \otimes I_r = \left(\overline{E}_n \otimes K\right)\mu_2;$$

$$((a - d)\, e_n^{\mathrm{т}} \otimes I_r)\, \mu_2^+ = \overline{E}_n \otimes K. \quad (41)$$

Выражение (41), записанное в виде

$$\overline{E}_n \otimes K = ((a - d)\, e_n^{\mathrm{т}} \otimes I_r)\, \mu_2^+, \quad (42)$$

и есть искомая явная формула регулятора.

Отметим, что множество регуляторов $\{K\}$, удовлетворяющих условиям задачи обеспечения заданного характеристического полинома MIMO-системы (1), в рассматриваемом случае порождается левым делителем нуля $\mu_2^{\perp L}$ матрицы μ_2. Другими словами, при любой невырожденной матрице T подходящего размера справедливо тождество

$$(a - d)\, e_n^{\mathrm{т}} \otimes I_r = \left(\overline{E}_n \otimes K + T\mu_2^{\perp L}\right)\mu_2.$$

Если произведение $T\mu_2^{\perp L}$ наделить структурой кронекерова произведения матриц $\overline{E}_n \otimes K$, т.е. $\overline{E}_n \otimes f(T\mu_2^{\perp L})$, тогда вместо формулы (42) можно записать условие параметризации множества регуляторов:

$$\overline{E}_n \otimes \left(K + f(T\mu_2^{\perp L})\right) = ((a - d)\, e_n^{\mathrm{т}} \otimes I_r)\, \mu_2^+.$$

Таким образом, в настоящем исследовании представлен подход к анализу и синтезу линейной динамической системы со многими входами и многими выходами (MIMO-системы) на основе ленточных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
2. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
3. *Kailath T.* Linear Systems. N.J: Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1980. 682 p.
4. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. 831 с.
5. *Мисриханов М.Ш.* Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. М.: Наука, 2007. 284 с.

6. *Воеводин В.В.*, *Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 386 с.
7. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 435 с.
8. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Анализ и синтез линейных динамических систем на основе ленточных формул // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 243–248.
9. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // АиТ. 2007. № 12. С. 53–69.
10. *Nordström K.*, *Norlander H.* On the multi input pole placement control problem // Proc. 36 IEEE Conf. Decisionand Control. 1997. Vol. 5. P. 4288–4293.
11. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196–240.

REFERENCES

[1] Andreev Yu.N. Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob’ektami [Control of finite-dimensional linear plants]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 424 p.

[2] Wonham W.M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. 3rd ed. New York, Springer-Verlag, 1985. 334 p. (Russ. Ed.: Linejnye mnogomernye sistemy upravlenija: geometricheskij podhod. Moscow, Nauka Publ., 1980. 376 p.).

[3] Kailath T. Linear Systems. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.: 1980. 682 p.

[4] Dorf R.S., Bishop R.H. Modern Control Systems. 12th ed. Prentice-Hall, 2011. 1034 p. (Russ. Ed.: Sovremennye sistemy upravlenija. Moscow, Laboratorija Bazovyh Znanij Publ., 2004. 831 p.).

[5] Misrikhanov M.Sh. Invariantnoe upravlenie mnogomernymi sistemami. Algebraicheskij podhod. [Invariant control of multivariable systems. Algebraic approach]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 284 p.

[6] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matricy i vychislenija [Matrices and computations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 386 p.

[7] Demmel J.W. Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. 184 p. (Russ. Ed.: Vychislitel’naja linejnaja algebra. Teorija i prilozhenija. Moscow, Mir Publ., 2001. 153 p.).

[8] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Analysis and Synthesis of Linear Dynamic Systems Based on Banded Formulas. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Herald of the Ivanovo State Power Eng. Un.], 2005, iss. 5, pp. 243–248 (in Russ.).

[9] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. The band formula for A.N. Krylov’s problem. *Avtom. Telemekh.* [Automation and Remote Control, vol. 68, no. 12, pp. 2142–2157], 2007, no. 12, pp. 53–69 (in Russ.).

[10] Nordström K., Norlander H. On the multi input pole placement control problem. *Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control.*, 1997, vol. 5, pp. 4288–4293.

[11] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and Matrix Methods in the Theory of linear MIMO Systems. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Herald of the Ivanovo State Power Eng. Un.], 2005, iss. 5, pp. 196–240 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 10.02.2014

Николай Евгеньевич Зубов — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области проблем управления космических аппаратов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

N.E. Zubov — Dr. Sci. (Eng.), deputy director on science of the Research and Development Center of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", professor of "Automatic Control Systems" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of problems of spacecraft control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Евгений Анатольевич Микрин — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королёва", заведующий кафедрой "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области систем управления космических аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская область, Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

E.A. Mikrin — Dr. Sci. (Eng.), Member of the Russian Academy of Sciences, head of "Automatic Control Systems" department of the Bauman Moscow State Technical University, first deputy general designer of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Author of more than 100 publications in the field of problems of spacecraft control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Мисрихан Шапиевич Мисриханов — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королёва". Автор более 150 научных работ в области проблем управления.
ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская область, Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

M.Sh. Misrikhanov — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of the Research and Development Center of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Author of more than 150 publications in the field of problems of control.
OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Владимир Николаевич Рябченко — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королёва", профессор кафедры "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области проблем управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация,105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская область, Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

V.N. Ryabchenko — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of the Research and Development Center of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", professor of "Automatic Control Systems" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of problems of control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.