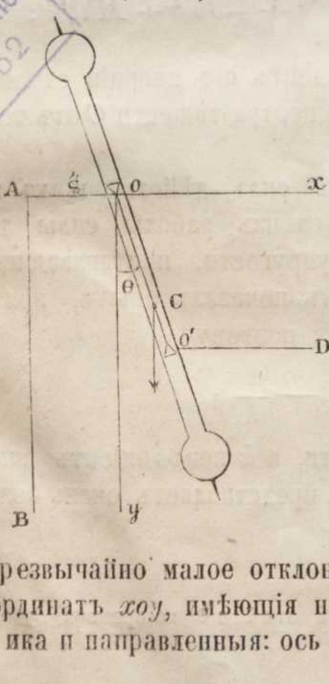
О вліяніи колебаній штатива на время качанія маятника.

Н. Жуковскаго.

Въ этой замѣткѣ мы опредѣлимъ величину поправки длины секунднаго маятника, которая должна быть введена для устраненія погрѣшности отъ непрочности штатива.

(Фиг. 1).



Пусть (фиг. 1) *AB* будетъ вертикальная линія, совпадающая съ направленіемъ оборотнаго маятника при его равновѣсіи. Когда маятникъ будетъ приведенъ въ колебаніе, то точка его опоры *o* не будетъ оставаться въ *A*, а будетъ совершать колебанія, уклоняясь вправо и влѣво отъ точки *A* по горизонтальному направленію.

Назовемъ черезъ ξ это чрезвычайно малое отклоненіе *Ao*. Вообразимъ оси координатъ *xoy*, имѣющія начало въ точкѣ опоры маятника и направленныя: ось *ox* по горизонтальной, а ось *oy* по вертикальной линіи. Пусть θ будетъ уголъ, который ось маятника образуетъ съ осью oy.

Кординаты ξ и θ вполнѣ опредѣляютъ положеніе маятника, поэтому мы можемъ относительно ихъ написать дифференціальныя уравненія движенія въ лагранжевой формѣ. Для этого надо предварительно опредѣлить живую силу системы и силовую функцію всѣхъ силъ, на нее дѣйствующихъ.

Проэкціи абсолютныхъ скоростей точекъ нашего маятника на оси ox и oy выразятся слѣдующими формулами *):

$$u = \xi' + y\theta',$$
$$v = -x\theta'.$$

Поэтому живая сила T нашей системы будетъ:

$$T = \frac{1}{2}\sum m(u^2 + v^2) = \frac{1}{2}M\xi'^2 + \frac{1}{2}J\theta'^2 + Mh\xi'\theta';$$

гдѣ M масса маятника, J моментъ его инерціи относительно точки o, h разстояніе центра тяжести C отъ точки o.

Силовая функція U всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на нашу систему будетъ слагаться изъ работы силы тяжести и изъ работы силы упругости, притягивающей точку o къ A. Эта сила, какъ показалъ опытъ, прямо пропорціональна отклоненію ξ; поэтому

$$U = Mghcs\theta - \frac{k\xi^2}{2}\cdot$$

Здѣсь g напряженіе тяжести, а k коэффиціентъ силы упругости штатива, который представляетъ очень большую величину.

---

*) Первыя и вторыя производныя отъ ξ и θ по времени будемъ обозначать чрезъ ξ', θ', ξ'', θ''.

Подставляемъ T и U въ лагранжевы уравненія движенія:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'}\right) - \frac{dT}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\theta'}\right) - \frac{dT}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta};$$

получимъ, замѣняя по малости угла отклоненія маятника $sn\theta$ на θ,

$$\begin{aligned} M\xi'' + Mh\theta'' &= -k\xi, \\ Mh\xi'' + J\theta'' &= -Mgh\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Мы удовлетворяемъ этимъ уравненіямъ, полагая

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\,(cs(\lambda t) + \mu\, sn(\lambda t)), \\ \theta &= \beta\,(cs(\lambda t) + \mu\, sn(\lambda t)); \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ μ произвольное постоянное, а λ и отношеніе $\alpha:\beta$ опредѣляются изъ уравненій:

$$\alpha\,(k - M\lambda^2) - \beta\, Mh\lambda^2 = 0,$$
$$-\alpha\, Mh\lambda^2 + \beta\,(Mgh - J\lambda^2) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{Mh\lambda^2}{k - M\lambda^2} = \frac{Mgh - J\lambda^2}{Mh\lambda^2}. \tag{3}$$

Дѣлимъ въ послѣдней дроби числителя и знаменателя на Mh и полагаемъ

$$\frac{J}{Mh} = L. \tag{4}$$

Получаемъ для опредѣленія λ^2 уравненіе:

$$\frac{Mh\lambda^2}{k - M\lambda^2} = \frac{g - L\lambda^2}{\lambda^2};$$

откуда

$$M(L - h)\lambda^4 - (kL + Mg)\lambda^2 + kg = 0. \tag{5}$$

Рѣшаемъ относительно λ^2:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2M(L-h)}\left[(kL+Mg) \mp \sqrt{(kL+Mg)^2 - 4Mkg(L-h)}\right]. \tag{6}$$

Здѣсь оба корня дѣйствительны, потому что подкоренная величина можетъ быть приведена къ виду

$$(kL - Mg)^2 + 4\,Mgkh.$$

Кромѣ того оба корня очевидно положительны. Отсюда слѣдуетъ, что общіе интегралы уравненій (1) выразятся съ помощію однихъ тригонометрическихъ функцій. Эти интегралы найдутся, внося въ формулы (2) два положительныя значенія λ изъ формулы (6) и беря сумму такихъ интеграловъ.*)

Перейдемъ къ упрощенію фор. (6), происходящему отъ весьма значительной виличины коэффиціента k, вслѣдствіе чего можно пренебрегать степенями дроби $\frac{1}{k}$ выше первой.

Разлагаемъ радикалъ, входящій въ фор. (6) по возрастающимъ степенямъ $\frac{1}{k}$:

$$\left(L^2 + 2Mg(2h-L)\frac{1}{k} + \frac{M^2g^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$kL + \frac{Mg}{L}(2h-L) + \frac{2\,M^2g^2h(L-h)}{L^3k}.$$

---

*) Отрицательныя значенія λ подставлять въ фор. (2) не нужно, такъ какъ чрезъ это не вводится новыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

На основаніи этого разложенія фор. (6) даетъ намъ слѣдующія двѣ приблизительныя величины λ^2:

$$\lambda_1{}^2 = \frac{g}{L} - \frac{Mg^2h}{L^3k},$$

$$\lambda_2{}^2 = \frac{kL}{M(L-h)} + \frac{gh}{L(L-h)} + \frac{Mg^2h}{L^3k}. \qquad (7)$$

Этимъ двумъ величинамъ λ соотвѣтствуютъ два простыхъ періодическихъ движенія, изъ которыхъ слагается все движеніе нашего маятника. Называя чрезъ t_1 и t_2 полныя періоды $2\pi : \lambda_1$ и $2\pi : \lambda_2$ этихъ простыхъ колебательныхъ движеній, найдемъ:

$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}\left(L + \frac{Mgh}{kL}\right)},$$

$$t_2 = 2\pi \sqrt{\frac{M(L-h)}{kL}}. \qquad (8)$$

Формулы (8) показываютъ, что періодъ перваго движенія очень мало отличается отъ времени полнаго колебанія маятника при неподвижномъ штативѣ, періодъ же втораго движенія весьма коротокъ.

Можно всегда выбрать начальныя данныя такъ, чтобы все движеніе маятника представлялось только первымъ изъ этихъ двухъ періодическихъ движеній. Для этого стоитъ только отклонить маятникъ отъ вертикальной линіи на уголъ θ_0, и удерживать его въ этомъ положеніи съ помощію горизонтальной нити $o'D$, направленіе которой проходитъ чрезъ центръ качанія o'. При такомъ положеніи равновѣсія маятника точка o перемѣстится изъ A вправо на пространство

$$\xi_0 = \frac{Mgh\theta_0}{Lk}. \qquad (9)$$

Если обожжемъ нить, то маятникъ придетъ въ движеніе, выражаемое найденными нами общими интегралами.

Произвольныя постоянныя этихъ интеграловъ должны быть опредѣлены по слѣдующимъ начальнымъ даннымъ: при $t = o$, должны имѣть $\xi' = \theta' = o$, $\xi = \xi_0$, $\theta = \theta_0$.

Такимъ начальнымъ даннымъ удовлетворяемъ, давая интеграламъ видъ:

$$\xi = \xi_0 cs\lambda_1 t,$$
$$\theta = \theta_0 cs\lambda_1 t. \qquad (10)$$

Здѣсь отношеніе $\xi_0 : \theta_0$ должно удовлетворить формулѣ (3), что, при отбрасываніи высшихъ степеней дроби $\frac{1}{k}$, даетъ

$$\xi_0 = \theta_0 \frac{Mh}{k} \lambda_1{}^2 .$$

Что это уравненіе удовлетворяется видно изъ того, что, по подстановкѣ въ него величины λ_1 изъ формулы (7), получаемъ формулу (9).

Посмотримъ теперь, какую погрѣшность дѣлаемъ мы, опредѣляя по способу Гюгенса длину l маятника, соотвѣтствующую времени колебанія t_1?

Эта длина по фор. (8) будетъ

$$l = L + \frac{Mgh}{kL} . \qquad (11)$$

По способу же Гюгенса за эту длину мы принимаемъ разстояніе $h + h_1$, гдѣ h_1 есть разстояніе отъ центра тяжести c обратной точки привѣса o', которая даетъ тоже самое время колебанія маятника t_1, т.-е. для которой

$$l = L_1 + \frac{Mgh_1}{kL_1} . \qquad (12)$$

Здѣсь L_1 имѣетъ для точки o' тоже значеніе, какое L для точки o.

Называя чрезъ J_0 моментъ инерціи нашего маятника относительно центра тяжести C, можемъ формулу (4) написать такъ:

$$L = \frac{J_0}{Mh} + h.$$

Также найдемъ, что

$$L_1 = \frac{J_0}{Mh_1} + h_1.$$

Подставляемъ это въ формулы (11) и (12) и преобразуемъ ихъ:

$$\frac{J_0}{M} + \frac{Mgh^2}{kL} = lh - h^2,$$
$$\frac{J_0}{M} + \frac{Mgh_1^{\ 2}}{kL_1} = lh_1 - h_1^{\ 2}.$$

Въ этихъ формулахъ L и L_1 могутъ быть съ точностію до порядка $\frac{1}{k}$ замѣнены чрезъ $h + h_1$. Сдѣлавъ это, вычитаемъ нижнюю формулу изъ верхней и дѣлимъ результатъ на $h - h_1$. Найдемъ:

$$l - (h + h_1) = \frac{Mg}{k} \cdot \tag{13}$$

Это и есть величина поправки, которая должна быть прибавлена къ наблюденной длинѣ маятника $h + h_1$, чтобы получить его истинную длину l.

Принимая $h + h_1 = H$ за длину маятника, которому соотвѣтствуетъ время колебанія t_1 мы опредѣляемъ длину η секунднаго маятника по формулѣ

$$\eta = \frac{H}{t_1^{\ 2}} \cdot$$

Истинная же длина секунднаго маятника будетъ:

$$\eta + \delta\eta = \frac{l}{t_1^{\,2}} = \frac{1}{t_1^{\,2}}\left(H + \frac{Mg}{k}\right);$$

откуда

$$\delta\eta = \frac{Mg\eta}{kH}\,. \qquad (14)$$

Это есть формула поправки длины секунднаго маятника, опредѣленной по способу Гюгенса не на идеально прочномъ штативѣ.

Что касается до дроби

$$\frac{Mg}{k},$$

то она можетъ быть опредѣлена по фор (9), какъ сумма отношеній $\xi_0 : \theta_0$ при обоихъ положеніяхъ точки опоры.

Изданіе Императорскаго Московск. Общества Испытателей Природы.

Москва. 1882. Въ Университетской типографіи (М. Катковъ), на Страстномъ бульварѣ.