УДК 004.62

С.А. Сакулин, А.Н. Алфимцев

# К ВОПРОСУ О ПРАКТИЧЕСКОМ ПРИМЕНЕНИИ НЕЧЕТКИХ МЕР И ИНТЕГРАЛА ШОКЕ

*Интеграл Шоке по нечеткой мере является обобщением средневзвешенного оператора агрегирования и позволяет учитывать при агрегировании явление взаимозависимости критериев. Благодаря этому станет возможным более адекватно отражать знания эксперта, не внося в модель упрощение, которое выражается в предположении о независимости критериев агрегирования. Рассмотрены трудности применения нечетких мер и нечеткого интеграла Шоке и возможные пути их преодоления. Проведен обзор практических применений этого относительно нового аппарата.*

**E-mail: sakulin@bmstu.ru**

***Ключевые слова:*** *оператор агрегирования, нечеткая мера, нечеткий интеграл Шоке.*

**Введение.** Понятие «нечеткие меры и интегралы» сформулировано до публикации известной статьи основоположника теории нечетких множеств Лотфи Заде [1] в работе Гюстава Шоке (Теория емкостей «Theory of capacities») [2], опубликованной в 1953 г. В своей работе Шоке предложил применение неаддитивных мер, которые он называл емкостями. Хотя напрямую теория нечетких мер и теория нечетких множеств никак не были связаны, они хорошо сочетаются в том смысле, что нечеткий интеграл является удобным инструментом для агрегирования значений функций принадлежности нечетких множеств. В дальнейшем идеи Шоке, который занимался большей частью теоретической математикой, были развиты японским исследователем Сугено в его неопубликованной диссертации [3], которую цитируют во многих более поздних работах. Сугено предложил на основе мер Шоке два вида операторов агрегирования. Один из этих видов называется нечетким дискретным интегралом Шоке, а второй – нечетким дискретным интегралом Сугено. Так же, как это сделано далее в настоящей статье, слова «нечеткий» и «дискретный» часто опускают для краткости. Интеграл Сугено используется для агрегирования критериев, при котором на результат агрегирования влияет порядок расположения значений критериев относительно друг друга на числовой оси (порядковые шкалы агрегирования) [4, 5]. Интеграл Шоке применяется для агрегирования, когда на результат влияет величина каждого из критериев [4, 5]. В настоящей статье рассматриваются вопросы практического применения интеграла Шоке по нечеткой мере.

**Агрегирование, нечеткие меры и интеграл Шоке.** В соответствии с работой [5] «агрегирование числовых критериев есть метод их объединения в один числовой критерий (результат агрегирования) для выражения совокупного действия этих критериев». Агрегирование применяется в нечетком выводе и распознавании, задачах многокритериального принятия решений. Оператором агрегирования часто называют обладающую некоторыми заданными свойствами функцию от $H$ переменных (критериев), каждая из которых определена на единичном интервале. Областью значений этой функции также является единичный интервал. Нечеткая мера выражает субъективный вес или значимость каждого подмножества критериев и определяется следующим образом [4]:

Нечеткая (дискретная) мера – функция $\psi: 2^J \to [0,1]$, где $2^J$ – множество всех подмножеств множества индексов критериев $J = \{1, ..., H\}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\psi(\varnothing) = 0, \ \psi(J) = 1$;

2) $\forall D, B \subseteq J: \ D \subseteq B \Rightarrow \psi(D) \le \psi(B)$.

Введем следующие упрощения:

1) будем опускать фигурные скобки, вместо $\{i\}, \ \{i, j\}$ записывая $i, \ ij$ соответственно;

2) вместо обозначения «критерий с индексом $i \in J$» в дальнейшем для краткости будем употреблять «критерий $i$»;

3) вместо обозначения «множество индексов критериев $J$» будем употреблять «множество критериев $J$».

Рассмотрим основные понятия, используемые в теории нечетких мер. Шепли [6] предложил определение коэффициента важности критерия, основанное на нескольких естественных аксиомах. В контексте теории нечетких мер индекс Шепли для критерия $i \in J$ по отношению к мере $\psi$ определяется выражением

$$\Phi_{Sh}(i) := \sum_{D \subseteq (J-i)} \frac{\left(|J| - |D| - 1\right)! |D|!}{|J|!} \left[\psi\left(D \cup i\right) - \psi\left(D\right)\right]. \qquad (1)$$

Для выражения знака и степени взаимодействия между критериями Мурофуши и Сонеда [7] предложили индекс взаимодействия (зависимости) критериев $i$ и $j$, который определяется выражением

$$I(i, j) := \sum_{D \subseteq (J - \{i, j\})} \frac{\left(|J| - |D| - 2\right)! |D|!}{\left(|J| - 1\right)!} \times$$
$$\times \left[\psi(D \cup ij) - \psi(D \cup i) - \psi(D \cup j) + \psi(D)\right]. \qquad (2)$$

**Формализация зависимостей между критериями.** Основные виды зависимостей между критериями в контексте агрегирования с помощью интеграла Шоке выделил Маричалл в статье [8]. *Положительная (отрицательная) корреляция критериев и взаимозависимость (замещение) критериев* формализуются с помощью нечеткой меры посредством знака и индекса взаимодействия $I(i,j)$. При положительной корреляции и замещении критериев индекс $I(i,j)$ принимается отрицательным, при отрицательной корреляции и замещении – положительным. *Предпочтительная зависимость критериев* и ее противоположность – предпочтительная независимость критериев – виды зависимостей между критериями хорошо известны в теории полезности [9, 10]. Предположим, что предпочтения эксперта на множестве реализаций критериев $A$ известны и выражены отношением нестрогого порядка. Обозначим $\mathbf{g}_D$ реализацию критериев $g_i$, ($i \in D$), а $\mathbf{g}_{J-D}$ – реализацию критериев $g_i$ ($i \in J - D$). Подмножество $D \subset J$ критериев называется предпочтительно независимым от $J - D$ тогда и только тогда, когда для каждой пары реализаций критериев $\mathbf{g}_D$, $\mathbf{g}'_D$ из $(\mathbf{g}_D, \mathbf{g}_{J-D}) \succeq (\mathbf{g}'_D, \mathbf{g}_{J-D})$ для некоторой реализации $\mathbf{g}_{J-D}$ следует $(\mathbf{g}_D, \mathbf{g}_{J-D}) \succeq (\mathbf{g}'_D, \mathbf{g}_{J-D})$ для всех реализаций $\mathbf{g}_{J-D}$, где знак «$\succeq$» означает отношение предпочтения (нестрогого порядка) на $A$. В противном случае подмножество критериев $D \subset J$ является предпочтительно зависимым от подмножества $J - D$. Полный набор критериев $J$ называется взаимно предпочтительно независимым, если подмножество $D$ предпочтительно независимо от подмножества $J - D$ для каждого подмножества $D \subseteq J$. Известно [4, 9, 10], что если некоторые критерии предпочтительно зависимы от других, то никакой аддитивный оператор агрегирования не может отразить предпочтения эксперта. В частности, в этом случае также невозможно использование средневзвешенного оператора.

**Трудности практического применения нечетких интегралов и возможные пути их преодоления.** По мнению Грабиша [11], «С началом использования нечетких интегралов в качестве операторов агрегирования подразумевалось, что неаддитивность нечеткой меры должна позволять моделировать предпочтительную зависимость критериев. Однако до сих пор не разработан аппарат, позволяющий делать это строго формально, слабо изучено само явление предпочтительной зависимости критериев». Если нечеткая мера аддитивна, то критерии не взаимодействуют между собой и индексы взаимодействия (2) этих критериев равны нулю. Поэтому если, по мнению эксперта, критерии взаимно предпочтительно независимы, то соответствующие индексы взаимодействия равны нулю. Если эксперт предполагает предпочтительную зависимость критериев, то формализовать это можно лишь с помощью частичного порядка на множестве реализаций критериев $A$ (обучающей выборки). Каких-либо других методов формализации предпочтительной зависимости и независимости критериев до сих пор не предложено [11].

Для применения интеграла Шоке необходимо предварительно идентифицировать на основе экспертных знаний нечеткую меру. Эта идентификация затруднена экспоненциально возрастающей сложностью в том смысле, что нужно задавать значение меры для каждого подмножества критериев. Для эксперта выбор всех $2^H$ значений коэффициентов нечеткой меры $\psi(D)$, $D \subseteq J$, соответствующих $2^H$ подмножеств множества индексов критериев $J$, является весьма трудным и даже невыполнимым. Отметим, что даже в случае трех критериев для определения нечеткой меры необходимо получить значения $2^3 = 8$ коэффициентов. Для того чтобы, несмотря на эту сложность, интеграл Шоке все-таки можно было применять на практике, Грабиш предложил концепцию нечеткой меры $\kappa$-го порядка или $\kappa$-аддитивной нечеткой меры, где порядок $\kappa$ меньше, чем количество агрегируемых критериев, или $\kappa < |J| = H$ [12]. Суть этой концепции заключается в том, что для упрощения задания нечетких мер из рассмотрения исключаются зависимости между более чем $\kappa$ критериями. В соответствии с концепцией нечеткой меры $\kappa$-го порядка в большинстве практических случаев возможно применение интеграла Шоке по нечеткой мере 2-го порядка, или, что то же самое, интеграла Шоке 2-го порядка, поскольку он позволяет моделировать взаимодействия между критериями, оставаясь при этом относительно простым [12]. В работе [13] рассмотрен вопрос, при каких обстоятельствах такое упрощение (т. е. применение интеграла Шоке 2-го порядка) допустимо. В ней сформулированы необходимые условия, которым должны удовлетворять экспертные знания для того, чтобы они могли быть формализованы с использованием интеграла Шоке 2-го порядка.

Кроме возрастающей сложности, появляется еще и проблема понимания экспертом самого смысла коэффициентов нечеткой меры [11]. Для решения этой проблемы Грабиш [14] выдвинул идею графической интерпретации интеграла Шоке 2-го порядка. Смысл этой интерпретации заключается в построении на координатной плоскости линии ограничений для значений индекса взаимодействия и индексов Шепли для двух критериев. Эта идея была развита в работах [15, 16], в которых рассмотрены методы идентификации нечеткой меры с помощью иерархической диаграммы парных сравнений (в виде «бриллианта»), основанной на интерпретации Грабиша. Такой подход к идентификации сталкивается с двумя основными трудностями. Во-первых, вследствие того, что рассматриваются все возможные пары критериев по отдельности, эксперт не имеет целостной картины агрегирования и может так сформулировать свои предпочтения, что задача идентификации нечеткой меры на их основе заведомо не будет иметь решения. Во-вторых, шкала в виде «бриллианта» не является тривиальной для эксперта. Эти трудности могут быть преодолены путем явного задания ограничений, накладываемых на экспертные предпочтения [13], а также достаточно тщательным обучением эксперта методу графической интерпретации.

Альтернативой интерпретации Грабиша служит визуализация интеграла Шоке 2-го порядка, предложенная в работе [17], которая основана на взаимно однозначном сопоставлении математическому объекту (интегралу Шоке 2-го порядка) физического объекта (рычага, закрепленного в центре пружиной с единичным коэффициентом жесткости, который может вращаться вокруг горизонтальной оси). На рычаг устанавливаются грузы, вес которых соответствует коэффициентам взаимодействия критериев $I(ij)$, а также нечетким мерам критериев $\psi(i)$. Данный подход опирается на естественную, свойственную многим людям, интуицию в отношении хорошо известного физического объекта и позволяет эксперту иметь ясное интуитивное представление о сущности интеграла Шоке 2-го порядка. С помощью такой визуализации можно выявить предпочтения эксперта в виде ограничений, накладываемых на нечеткую меру. Затем на основе этих ограничений меру можно идентифицировать и осуществить построение рычага. Этот процесс носит итеративный характер и продолжается до того момента, пока построенный оператор агрегирования не удовлетворит эксперта. Этот подход также сталкивается с трудностями. Во-первых, при увеличении числа критериев (начиная примерно с четырех-пяти с учетом добавления грузов, сопоставленных индексам взаимодействия) у эксперта возникают трудности с восприятием такой визуализации (как известно из инженерной психологии, среднестатистический человек в состоянии одновременно держать во внимании около 7 объектов). Во-вторых, такая визуализация рассматривает нечеткую меру каждого отдельного критерия, индексы Шепли (1) визуализируются для каждого критерия по отдельности, что также увеличивает нагрузку на внимание эксперта [18]. Обе этих трудности, вероятно, могут быть преодолены путем тщательного построения процедуры работы с экспертом с учетом специфики каждой отдельно взятой предметной области.

При реализации тех или иных подходов к работе с экспертом в процессе формализации его знаний возникает вопрос выбора математического метода идентификации нечеткой меры на основе формализованных знаний. Эти методы отличаются по видам информации, которая требуется в качестве входной. Обзор таких методов применительно к теории полезности приведен в работе [19]. Метод на основе наименьших квадратов мало подходит для решения практических задач вследствие того, что предполагает знание экспертом желаемых значений результата агрегирования на обучающей выборке реализаций критериев. Метод на основе максимального разделения подходит для задач распознавания, поскольку предполагает максимизацию минимальной разности между результатами агрегирования на обучающей выборке. При этом эксперт описывает экземпляр каждого класса и ранжирует их с помощью нестрогого порядка, что служит входной информацией для метода [20]. Метод на основе минимизации дисперсии нечеткой меры, или, что то же самое, максимизации энтропии нечеткой меры, является наиболее подходящим для решения многих практических задач [21]. Он основан на принципе максимальной энтропии, который предложил в 1957 г. Джейнс [22]. Применительно к построению операторов агрегирования этот принцип предполагает использование всей доступной информации об агрегировании критериев, но максимально непредвзятое отношение к недоступной информации. Кожадиновиц [21] распространил принцип минимизации дисперсии на теорию полезности и разработал на его основе метод идентификации нечетких мер в теории полезности, где функция общей полезности есть интеграл Шоке от локальных функций полезности.

При идентификации нечеткой меры с помощью того или иного метода встает вопрос задания значений порогов безразличия для значений индексов взаимодействия, индексов Шепли и результата агрегирования. Обычно этому вопросу уделяется мало внимания и предполагается, что эксперт сам должен задавать эти значения, исходя из соображений необходимой точности [19]. Однако на практике значения порогов безразличия могут быть заданы такими, что это заведомо приведет к отсутствию решения задачи идентификации. Предотвращению возникновения подобных ситуаций посвящена статья [18].

**Современные области применения.** Ниже на практических примерах вкратце рассмотрены области применения нечетких мер и интеграла Шоке, в частности, оценка свойств интерфейсов, техническая диагностика, навигация, обработка изображений.

Авторы статьи [23] с помощью этого аппарата предложили решение задачи определения степени удобства того или иного программного интерфейса для пользователя. При этом предполагается прямое экспертное задание нечетких мер путем заполнения специальных таблиц для нескольких критериев (порядка четырех). Прямое задание нечетких мер весьма трудоемко, а в случае даже незначительного увеличения числа критериев практически невозможно. Тем не менее, этот пример показал, что с применением указанного аппарата можно повысить достоверность оценки удобства интерфейса.

Другим практическим примером применения аппарата является система анализа состояния технологических процессов на основе нечетких экспертных знаний [24]. На первом уровне анализа состояний определяют значения функций принадлежности диагностических параметров нечетким множествам эталонных термов соответствующих лингвистических переменных. На втором уровне путем агрегирования с помощью нечетких мер и интеграла Шоке значений функций принадлежности получают значения принадлежности текущего состояния процесса тому или иному нечеткому классу состояний, например, классу состояний исправного и правильного функционирования оборудования. Идентификация нечеткой меры осуществлена на основе метода минимизации дисперсии с привлечением механизма визуализации [17]. Приведенный пример также подтверждает возможность повышения достоверности технической диагностики с применением рассматриваемого аппарата.

Еще один пример применения рассматриваемого аппарата иллюстрирует работа [25], в которой описана система навигации для пешеходов. Входными данными для этой системы служат субъективные оценки различных характеристик маршрутов, в частности, расстояния, качества дорожного покрытия, живописности округи, степени зашумленности и т. п. Все эти критерии связаны между собой нетривиальным образом. Поэтому агрегирование таких критериев удобно проводить с помощью интеграла Шоке [26]. В качестве метода идентификации нечетких мер применен метод наименьших квадратов. Несмотря на относительно высокую трудоемкость реализации, этот пример указывает на гибкость интеграла Шоке в качестве оператора агрегирования такого рода субъективных критериев.

Интеграл Шоке по нечеткой мере применяется в области обработки изображений. В работе [27] описан метод распознавания участков, представляющих интерес на рентгеновских снимках компонентов электротехнического оборудования из композитных материалов. В качестве метода идентификации нечеткой меры применен метод относительной энтропии, который является развитием метода минимизации дисперсии, адаптирован для целей распознавания и позволяет получить несколько лучшие результаты. Агрегируются четыре атрибута, полученные из томографических изображений. Результаты экспериментов подтверждают перспективность использования рассматриваемого аппарата в области распознавания объектов на изображении.

Еще одной областью применения этого аппарата является улучшение цифровых изображений. В статье [28] предложен метод улучшения цифрового изображения, основанный на использовании интеграла Шоке. Результаты экспериментов показали, что применяемые в этом методе фильтры способны обрабатывать изображения с высокой точностью, сравнимой с популярными методами фильтрации, причем наибольшая точность обработки была получена методом идентификации нечеткой меры на основе минимизации дисперсии.

**Заключение.** Рассмотрены вопросы практического применения нечетких мер и интеграла Шоке. Проведен анализ возникающих при этом трудностей и возможных путей их преодоления. Основной преградой на пути широкого практического применения этого инструментария являются сложности при работе с экспертом по формализации его знаний в виде коэффициентов нечеткой меры. В настоящее время область исследований, связанная с нечеткими мерами и интегралами, интенсивно развивается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Zadeh L. A. Fuzzy sets// Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.
2. Choquet G. Theory of capacities// Annales de l'Institut Fourier. – 1953. – No. 5. – P. 131–295.
3. Sugeno M. Theory of fuzzy integrals and its applications: Ph.D. Thesis. – Tokyo. – 1974. – 237 p.
4. Grabisch M., Orlovski S., Yager R. Fuzzy aggregation of numerical preferences // Handbook of Fuzzy Sets Series/ R. Slowinski (ed), Dordrecht: Kluwer Academic. – 1998. – Vol. 4: Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics. – P. 31–68.
5. Detyniecki M. Mathematical Aggregation Operators and their Application to Video Querying: Thesis for the degree Docteur de l'Universite. – Paris, 2000. – 185 p.
6. Shapley L.S. A value for n–person games// Contributions to the Theory of Games/ H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), Princeton: Princeton University Press, 1953. – P. 307–317.
7. Murofushi T., Soneda S. Techniques for reading fuzzy measures (III): interaction index// 9th Fuzzy System Symposium-Sapporo. – 1993. – P. 693–696.
8. Marichal J.–L. An axiomatic approach to the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria// IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2000. – No. 8(6). – P. 800–807.
9. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели; Пер с англ. – М.: Мир, 1991. – 463с.
10. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 227 с.
11. Grabisch M. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making // European Journal of Operation Research. – 1996. – No. 89. – P. 445–456.
12. Grabisch M. k-order additive discrete fuzzy measures and their representation // Fuzzy Sets & Systems. – 1997. – No. 92. – P. 167–189.
13. Mayag B., Grabisch M., Labreuche Ch. A representation of preferences by the Choquet integral with respect to a 2-additive capacity. Theory and Decision. –2011. – Vol. 71. – P. 297–324.
14. Grabisch M. A Graphical Interpretation of the Choquet Integral // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2000. – No. 8. – P. 627–631.

15. Takahagi E. A fuzzy measure identification method by diamond pairwise comparisons: AHP scales and Grabish's graphical interpretation// Proceedings of the 11th international conference, KES 2007 and XVII Italian workshop on neural networks conference on Knowledge-based intelligent information and engineering systems: Part III. – 2007. – P. 316–324.
16. Wu J., Zhang Q. 2-order additive fuzzy measure identification method based on diamond pairwise comparison and maximum entropy principle// Fuzzy Optimization and Decision Making.- Kluwer Academic Publishers. – 2010. – Vol. 9. – No. 4. – P. 435–453.
17. Сакулин С. А. Визуализация оператора агрегирования на основе интеграла Шоке по нечеткой мере 2-го порядка // Вестник ИРГТУ. – 2007. – Т. 2, № 2 (30). – С. 45–50.
18. Сакулин С. А. К вопросу об идентификации параметров интеграла Шоке 2-го порядка // Вестник ИРГТУ. – 2008. – № 3(35). – С. 205–208.
19. Grabisch M., Kojadinovic I., Meyer P. A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory: Applications of the Kappalab R package. – 2008. – No. 2. – P. 766–785.
20. Marichal J.-L., Roubens M Determination of weights of interacting criteria from a reference set // European Journal of Operational Research. – 2000. – No. 124. – P. 641–650.
21. Kojadinovic I. Minimum variance capacity identification // European Journal of Operational Research. – 2007. – No. 177 (1). – P. 498–514.
22. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics // Phys. Rev. – 1957. – No. 106. – P. 620–630.
23. Sicilia M., Garsia E., Calvo T. An Inquiry-Based Method for Choquet Integral-Based Aggregation of Interface Usability Parameters // República Checa Kybernetica. – 2003. – No. 39(5). – P. 601–614.
24. Сакулин С. А., Девятков В. В. Анализ состояния технологических процессов на основе нечетких экспертных знаний. – Lambert Academic Publishing, 2012. – 240 с.
25. Akasaka Y., Onisawa T. Pedestrian Navigation Reflecting Individual Preference for Route Selection – Evaluation on Fitness of Individual Preference Model // Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Intelligent Informatics. – 2006. –Vol. 18. – No. 6. – P. 900–910.
26. Девятков В. В., Алфимцев А. Н. Нечеткая конечно-автоматная модель интеллектуального мультимодального интерфейса // Проблемы управления. – 2011. – № 2. – С. 69–77.
27. S. Jullien, G. Mauris, L. Valet, S. Teyssier Identification of Choquet integral’s parameters based on relative entropy and applied to classification of tomographic images // http://www.gimac.uma.es/ipmu08/proceedings/papers/181-jullienetal. pdf. 2008. 8 p. (дата обращения 13.03.2012).
28. Алфимцев А. Н., Сакулин С. А., Девятков В. В. Улучшение цифрового изображения с использованием нечеткого оператора Шоке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. Спец. выпуск «Информационные технологии и компьютерные системы». – 2011. – С. 5–12.

Статья поступила в редакцию 14.05.2012