

УДК 531.6.011.32:532.582.4:517.958

В. Н. Тимофеев, А. Ю. Бушув

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ С ОТРЫВОМ ДОЗВУКОВОГО ПОТОКА В ДОННОЙ ОБЛАСТИ

В рамках концепции вязко-невязкого взаимодействия рассмотрено обтекание тел с отрывом дозвукового потока в донной области. Математическое моделирование процесса обтекания тел проведено методом дискретных вихрей. Представлены результаты моделирования распределения давления на осесимметричном теле с конической сужающейся хвостовой частью.

E-mail: v_n_1951@mail.ru

Ключевые слова: дозвуковое отрывное обтекание, математическое моделирование, метод дискретных вихрей.

Сложность физических процессов, происходящих при отрыве потока газа или жидкости с поверхности тел, обуславливает значительные трудности при математическом моделировании. В большинстве методов, базирующихся как на теории вязкой среды, так и на теории идеальной среды [1], оперируют с очень большими объемами данных о различных параметрах в областях внешнего течения, отрыва и присоединения потока. Поэтому указанные методы реализуются посредством сложных алгоритмов, требующих существенных затрат вычислительных ресурсов. В наибольшей степени это относится к методам, в которых отрыв потока моделируется прямым решением уравнений Навье—Стокса [2] на ЭВМ повышенной производительности или на суперЭВМ.

Вместе с тем при проектировании летательных аппаратов, промышленных установок и при решении других практических задач часто необходимо проводить оперативный анализ распределения давления на поверхности обтекаемого тела. При этом, согласно концепции вязко-невязкого взаимодействия [3], рассчитывают давление на поверхности некоторого эквивалентного тела, обтекаемого невязким потоком жидкости или газа. В области пограничного слоя эквивалентное тело отстоит от обтекаемой поверхности на малую толщину вытеснения. В первом приближении поправку на толщину вытеснения можно не проводить. Тогда до линии отрыва потока эквивалентное тело совпадает с обтекаемым, а за линией отрыва будет являться его продолжением, моделируя влияние спутного следа.

Если линия отрыва близка к линии донного среза, можно отказаться от расчетного построения поверхности эквивалентного тела, а задать ее априорно или на основе дополнительной информации [3], и получить приближенное решение задачи.

Математическая модель и алгоритм решения. Рассмотрим умеренные дозвуковые скорости, среду будем считать несжимаемой и невесомой жидкостью. Предположим, что всюду вне поверхности эквивалентного тела течение потенциальное и скорость потока в точке M_0 определяется по формуле

$$\mathbf{V}(M_0) = \mathbf{V}_\infty + \nabla \phi(M_0),$$

где \mathbf{V}_∞ — вектор скорости набегающего потока; ∇ — оператор Гамильтона; ϕ — потенциал возмущенных скоростей. Из уравнения неразрывности, граничного условия непротекания поверхности эквивалентного тела Σ и граничного условия затухания возмущений на бесконечности следует, что потенциал ϕ является решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta \phi(M_0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \phi(M_0)}{\partial \mathbf{n}} \right|_\Sigma = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}(M_0) \Big|_\Sigma,$$

$$\phi(M_0) \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty,$$

$$\nabla \phi(M_0) \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty,$$

где ∇ — оператор Лапласа; $\mathbf{n}(M_0)$ — орт вектора внешней нормали к поверхности Σ в точке M_0 .

Внешняя задача Неймана имеет единственное решение, которое найдем в виде потенциала двойного слоя

$$\phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(M)}{r^3} g(M) d\Sigma,$$

где \mathbf{r} — вектор, направленный из точки M , расположенной на элементе поверхности $d\Sigma$, в точку M_0 вычисления скорости; r — модуль вектора \mathbf{r} ; $g(M)$ — поверхностная плотность потенциала двойного слоя.

Потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию затухания возмущений на бесконечности. Гра-

ничное условие непротекания выполняется, если поверхностная плотность $g(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{M_0}} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(M)}{r^3} \right) g(M) d\Sigma = -\mathbf{V}_{\infty} \cdot \mathbf{n}(M_0).$$

Для реализации численного метода поверхность эквивалентного тела аппроксимируется конечным числом панелей-многоугольников Σ_k , $k = 1, \dots, N$, с постоянной плотностью потенциала двойного слоя g_k . Из свойств аддитивности и линейности двойного интеграла, а также линейности градиента следует, что

$$\mathbf{V}(M_0) = \mathbf{V}_{\infty} + \sum_{k=1}^N g_k \left[\frac{1}{4\pi} \nabla_{M_0} \iint_{\Sigma_k} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(M)}{r^3} d\Sigma \right]. \quad (1)$$

Градиент потенциала двойного слоя, размещенного на панели Σ_k с постоянной плотностью g_k , равен скорости, индуцированной замкнутой вихревой нитью L_k , расположенной на границе $\partial\Sigma_k$ и имеющей циркуляцию Γ_k , равную $-g_k$, следовательно, справедливо следующее соотношение:

$$\frac{g_k}{4\pi} \nabla_{M_0} \iint_{\Sigma_k} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(M)}{r^3} d\Sigma = \frac{\Gamma_k}{4\pi} \iint_{L_k} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Введем вектор \mathbf{w}_k , равный скорости, индуцированной k -й вихревой нитью L_k с единичной циркуляцией, и назовем его функцией скорости. Согласно закону Био — Савара,

$$\mathbf{w}_k(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_{M_0} \iint_{\Sigma_k} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(M)}{r^3} d\Sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{L_k} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Затем формулу (1) представим в виде

$$\mathbf{V}(M_0) = \mathbf{V}_{\infty} + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \mathbf{w}_k(M_0). \quad (2)$$

Полученные зависимости позволяют применять метод дискретных вихрей [4] и определять функцию скорости каждого из вихревых многоугольников как сумму функций скорости составляющих его вихревых отрезков [5].

Для определения неизвестных циркуляций Γ_k необходимо задать граничные условия непротекания поверхности эквивалентного тела Σ , которые выполняются в контрольных точках C_ν , $\nu=1, \dots, N$, расположенных в геометрических центрах панелей Σ_ν . Поскольку в контрольных точках нормальные производные потенциала двойного слоя непрерывны, справедливо равенство

$$\frac{\partial \phi(C_\nu)}{\partial \mathbf{n}} = [\mathbf{V}(C_\nu) - \mathbf{V}_\infty] \cdot \mathbf{n}(C_\nu) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \mathbf{w}_k(C_\nu) \cdot \mathbf{n}(C_\nu),$$

и граничные условия непротекания можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k [\mathbf{w}_k(C_\nu) \cdot \mathbf{n}(C_\nu)] = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}(C_\nu),$$

где $\mathbf{n}(C_\nu)$ — орт нормали к панели Σ_k в контрольной точке C_ν . Поэтому циркуляции Γ_k будут определяться системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N a_{\nu k} \Gamma_k = b_\nu, \quad \nu=1, \dots, N, \quad (3)$$

где

$$a_{\nu k} = \mathbf{w}_k(C_\nu) \cdot \mathbf{n}(C_\nu);$$

$$b_\nu = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}(C_\nu).$$

Для замкнутых поверхностей Σ , согласно методу дискретных вихрей, матрица $\|a_{\nu k}\|$ получается вырожденной, поэтому систему (3) решают с использованием регуляризирующей переменной [5].

После нахождения неизвестных циркуляций Γ_k скорость потока вне поверхности тела определяется соотношением (1). Поскольку контрольные точки расположены на поверхности тела, в них скорость как градиент потенциала двойного слоя терпит разрыв:

$$\Delta \mathbf{V}(C_\nu) = \frac{\partial g(C_\nu)}{\partial \tau_1} \boldsymbol{\tau}_1(C_\nu) + \frac{\partial g(C_\nu)}{\partial \tau_2} \boldsymbol{\tau}_2(C_\nu),$$

причем частные производные можно вычислить по направлениям двух ортогональных ортов $\boldsymbol{\tau}_1(C_\nu)$ и $\boldsymbol{\tau}_2(C_\nu)$, лежащих в касательной плоскости. Учитывая, что величины g_ν и $-\Gamma_\nu$ равны, эти частные

производные определим численно по значениям циркуляций ν -го и соседних с ним вихревых многоугольников. Скорость в контрольных точках на поверхности тела находим как предельное значение градиента потенциала двойного слоя:

$$\mathbf{V}(C_\nu) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \mathbf{w}_k(C_\nu) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V}(C_\nu).$$

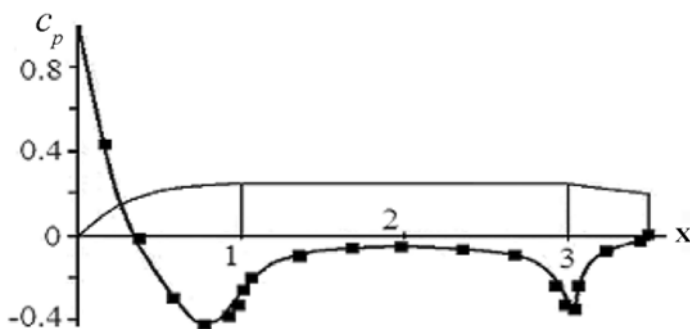
Безразмерные коэффициенты давления

$$c_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2}$$

рассчитывают с помощью интеграла Бернулли по формуле

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2.$$

Результаты численных расчетов. Согласно предложенной в работе методике, выполнен расчет обтекания осесимметричного тела под нулевым углом атаки. Длина головной оживальной части составляет d , средней цилиндрической — $2d$, а хвостовой сужающейся конической частей — $0,5d$, где d — диаметр миделевого сечения. По форме эквивалентное тело за донным срезом было построено как продолжение конической поверхности хвостовой части с полууглом раскрытия 10° . При равномерном разбиении эквивалентного тела на 32 части по окружности миделевого сечения, на 35 частей — по длине обтекаемого тела и на 23 части — по длине следа суммарное число панелей $N = 1\ 856$.



Распределение коэффициента давления c_p по образующей осесимметричного тела:

$x = x / d$, где x — расстояние, отсчитываемое по продольной оси тела; d — диаметр цилиндрической части

Согласно результатам расчетов, распределение коэффициента давления на обтекаемом теле в силу предложенной методики хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными в работе [6] и на рисунке показанными квадратами. Это свидетельствует о возможности применения рассмотренного подхода при математическом моделировании отрывного обтекания тел. Небольшие затраты машинного времени и памяти позволяют применять предложенную методику для выбора рациональных форм элементов поверхностей летательных аппаратов, энергетических и промышленных установок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: Пер. с англ. В 2 т. М.: Мир, 1990.
2. Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Вычислительный и программный инструментарий для моделирования трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 2. С. 309–320.
3. Гогиш А. В., Степанов Г. Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990.
4. Белоцерковский С. М., Ништ Н. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995.
6. Woodward F. A. An improved method for the aerodynamic analysis of wing-body-tail configurations in subsonic and supersonic flow. Washington: 1973, NASA CR-2228, P. 1–130.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.