УДК 539.3

Ю. И. Димитриенко, И. Д. Димитриенко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ В СВЯЗАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Введено понятие связанной конфигурации для пористых сред с конечными деформациями и некогерентной поверхностью раздела фаз. Показано, что система законов сохранения для пористых сред такого класса может быть симметризована, т. е. представлена в едином универсальном дивергентном виде, при этом она отличается от классической системы законов сохранения для однофазных сред наличием двух дополнительных групп уравнений: уравнений движения фиктивной твердой среды, связанной с основной твердой фазой условиями идеального контакта, и уравнением совместности фиктивной среды.

E-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Ключевые слова: *пористые среды, конечные деформации, некогерентные поверхности, законы сохранения, связанная конфигурация, симметризация законов сохранения.*

Моделирование гидрогазодинамических и физико-механических процессов в пористых деформируемых средах имеет важное значение в таких областях, как разведка и добыча углеводородов, создание фильтрующих устройств, разработка теплоизоляционных и теплозащитных эластомерных материалов, исследование биомеханических кровеносных тканей и многих других. Большинство работ [1—7] посвящено исследованию гидрогазодинамических процессов в пористых средах без учета эффектов деформируемости. Как правило, в работах по механике пористых сред с конечными деформациями [8—11] приведены уравнения в эйлеровом описании, которые обладают известными недостатками при решении задач механики с конечными деформациями — область определения заранее не известна и устанавливается в процессе решения задачи. Двухфазные среды в лагранжевом описании изучают только для случая когерентных поверхностей раздела, однако в основном на практике реализуются некогерентные поверхности раздела твердой и жидкой (газовой) фаз, в которых возникает скольжение жидкого (газообразного) носителя по твердой поверхности. Численное исследование таких пористых сред с конечными деформациями в лагранжевом описании крайне затруднено из-за неопределенной границы контакта сред.

В настоящей работе предложено новое представление системы законов сохранения, основанное на введении специального лагранжево-эйлерова описания движения пористой среды в так называемой связанной конфигурации. Система законов сохранения в этой конфигурации может быть симметризована подобно тому, как это реализуется в традиционных эйлеровом и лагранжевом описаниях. Симметризация системы уравнений играет важную роль при численном моделировании, с ее помощью можно конструировать консервативные разностные схемы, обладающие многими ценными качествами.

Кинематика двухфазной среды с конечными деформациями и некогерентной поверхностью раздела фаз. Рассмотрим в декартовой системе координат Ox^i движение некоторой сплошной среды, которая в начальный момент времени $t = 0$ занимает область $\overset{0}{V}$ (отсчетная конфигурация $\overset{0}{K}$), а в текущий момент времени $t > 0$ — область V (актуальная конфигурация K). Введем лагранжевы координаты X^j материальных точек сплошной среды, связанные с эйлеровыми координатами законом движения [12]:

$$x^i = x^i(X^j,\ t), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(X^j,\ t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ — радиус-вектор точек в конфигурации K ($\mathbf{e}_i$ — декартов базис); $\mathbf{x}(X^j, 0) = \overset{0}{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор точек в конфигурации $\overset{0}{K}$.

Будем полагать, что сплошная среда является двухфазной, т. е. область V состоит из двух частей: V_s (твердая фаза) и V_g (газ), причем обе эти области являются односвязными. Если газовая фаза является идеальной, соседние материальные точки на поверхности раздела фаз, принадлежащие газу и твердой фазе в момент времени $t = 0$, в другие моменты времени ($t > 0$) могут разойтись на конечные расстояния. При этом скачок величины $[X^j] \neq 0$, если $[\mathbf{x}] = 0$. Поверхности, для которых выполняется это условие, называют некогерентными [12]. Для описания движения двухфазной среды с некогерентными поверхностями раздела, следуя работе [12], введем фиктивную отсчетную конфигурацию $\overset{*}{K}$, которую назовем связанной. В этой конфигурации твердая фаза занимает область $\overset{*}{V}_s$, совпадающую с областью $\overset{0}{V}_s$ в конфигурации $\overset{0}{K}$, а газовая фаза — область $\overset{*}{V}_g$, в которой все ее материальные точки на поверхности раздела фаз $\overset{*}{\Sigma}_{sg}$ совпадают с теми точками твердой фазы, с которыми они совпадают в актуальной конфигурации K. Иначе говоря, в конфигурации $\overset{*}{K}$ твердая фаза остается все время неподвижной, а газовая фаза движется относительно твердой согласованно с ее движением в актуальной конфигурации так, что в конфигурациях $\overset{*}{K}$ и K контактируют одни и те же материальные точки газа и твердой фазы на поверхности раздела. Конфигурация $\overset{*}{K}$ задается преобразованием

$$\overset{*}{\mathbf{x}} = \overset{*}{\mathbf{x}}(X^j, t), \quad \text{или} \quad \overset{*}{x}{}^i = \overset{*}{x}{}^i(X^j, t), \tag{2}$$

где $\overset{*}{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор материальных точек в конфигурации $\overset{*}{K}$, причем $\overset{*}{\mathbf{x}}(X^j,\ t) = \overset{0}{\mathbf{x}}(X^j)$, если $X^j \in \overset{0}{V}_s$. Предположим, что существует взаимнооднозначное гладкое преобразование конфигураций $\overset{0}{K}$ и $\overset{*}{K}$, т. е.

$$\overset{*}{x}{}^i = \overset{*}{x}{}^i(\overset{0}{x}{}^j,\ t). \tag{3}$$

Это преобразование в общем случае определяется неединственным образом; уравнения для нахождения функций (3) представлены далее.

С помощью выражений (1) и (2) введем в конфигурациях K, $\overset{*}{K}$, $\overset{0}{K}$ локальные векторы базиса и метрические матрицы стандартным способом [1, 2]:

$$\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{x}(X^j, t)/\partial X^i, \quad \overset{0}{\mathbf{r}}_i = \partial \overset{0}{\mathbf{x}}(X^j)/\partial X^i, \quad \overset{*}{\mathbf{r}}_i = \partial \overset{*}{\mathbf{x}}(X^j, t)/\partial X^i,$$

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad \overset{0}{g}_{ij} = \overset{0}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{0}{\mathbf{r}}_j, \quad \overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{r}}_j.$$

Введем также векторы взаимных базисов $\overset{0}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{0}{\mathbf{r}}_j$, $\mathbf{r}^i = g^{ij}\mathbf{r}_j$, $\overset{*}{\mathbf{r}}{}^i = \overset{*}{g}{}^{ij}\mathbf{r}_j$, где $\overset{0}{g}{}^{ij}$, g^{ij} и $\overset{*}{g}{}^{ij}$ — обратные метрические матрицы. В этих конфигурациях набла-операторы ковариантного дифференцирования определяются соотношениями

$$\nabla = \mathbf{r}^k \frac{\partial}{\partial X^k}, \quad \overset{0}{\nabla} = \overset{0}{\mathbf{r}}{}^k \frac{\partial}{\partial X^k}, \quad \overset{*}{\nabla} = \overset{*}{\mathbf{r}}{}^k \frac{\partial}{\partial X^k}.$$

Градиенты деформаций из конфигураций $\overset{0}{K}$ в конфигурацию K, $\overset{0}{K}$ в $\overset{*}{K}$ и $\overset{*}{K}$ в K представим следующим образом:

$$\mathbf{F}=\mathbf{r}_i\otimes\overset{0}{\mathbf{r}}{}^i,\quad \overset{0}{\mathbf{F}}=\overset{*}{\mathbf{r}}_i\otimes\overset{0}{\mathbf{r}}{}^i,\quad \overset{*}{\mathbf{F}}=\mathbf{r}_i\otimes\overset{*}{\mathbf{r}}{}^i. \tag{4}$$

Элементарные радиус-векторы вдоль координатных направлений в конфигурациях (здесь и далее по нижним индексам суммирования нет) запишем в виде

$$d\mathbf{x}_\alpha(X^i,\,t)=\mathbf{r}_\alpha dX^\alpha,\quad d\,\overset{0}{\mathbf{x}}_\alpha(X^i)=\overset{0}{\mathbf{r}}_\alpha\,dX^\alpha,\quad d\,\overset{*}{\mathbf{x}}_\alpha(X^i,\,t)=\overset{*}{\mathbf{r}}_\alpha\,dX^\alpha$$

и с их помощью определим элементарные объемы в конфигурациях $\overset{0}{K}$, $\overset{*}{K}$ и K:

$$dV=d\mathbf{x}_1\cdot(d\mathbf{x}_2\times d\mathbf{x}_3)=\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)dX^1dX^2dX^3=\sqrt{g}dX^1dX^2dX^3,$$

$$d\overset{0}{V}=\sqrt{\overset{0}{g}}dX^1dX^2dX^3,\quad d\overset{*}{V}=\sqrt{\overset{*}{g}}dX^1dX^2dX^3.$$

Введем плотности фаз $\overset{0}{\rho}$, $\overset{*}{\rho}$ и ρ в $\overset{0}{K}$, $\overset{*}{K}$, K, которые связаны соотношениями неразрывности:

$$\overset{0}{\rho}\,d\overset{0}{V}=\overset{*}{\rho}\,d\overset{*}{V}=\rho\,dV,\quad \overset{0}{\rho}\sqrt{\overset{0}{g}}=\overset{*}{\rho}\sqrt{\overset{*}{g}}=\rho\sqrt{g}. \tag{5}$$

С их помощью запишем интегральные формулы перехода из одной конфигурации в другую:

$$\int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i,t)}\overset{*}{\rho}\,\mathbf{a}d\overset{*}{V}=\int\limits_{V(x^i,t)}\rho\,\mathbf{a}dV=\int\limits_{\overset{0}{V}(\overset{0}{x}{}^i,t)}\overset{0}{\rho}\,\mathbf{a}d\overset{0}{V}, \tag{6}$$

а также формулы дифференцирования интеграла по подвижному объему в конфигурациях $\overset{0}{K}$, $\overset{*}{K}$ и K:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i,t)}\mathbf{a}d\overset{*}{V}=\frac{d}{dt}\int\limits_{V(x^i,t)}\mathbf{a}\sqrt{\frac{\overset{*}{g}}{g}}dV=\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{0}{V}(\overset{0}{x}{}^i,t)}\mathbf{a}\sqrt{\frac{\overset{*}{g}}{\overset{0}{g}}}d\overset{0}{V}=$$

$$=\int\limits_{\overset{0}{V}(\overset{0}{x}{}^i,t)}\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}+\mathbf{a}\overset{*}{\nabla}\cdot\overset{*}{\mathbf{v}}\right)\sqrt{\frac{\overset{*}{g}}{\overset{0}{g}}}d\overset{0}{V}=\int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i,t)}\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\overset{*}{\nabla}\cdot(\overset{*}{\mathbf{v}}\otimes\mathbf{a})\right)d\overset{*}{V}. \tag{7}$$

Здесь **a** — произвольная дифференцируемая вектор-функция; $\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^{i}, t)$, $\overset{0}{V}(\overset{0}{x}{}^{i})$, $V(x^{i}, t)$ — области, содержащие одни и те же материальные точки. При выводе соотношений (7) использованы формулы дифференцирования по времени детерминанта метрической матрицы и полной производной по времени:

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\overset{*}{g}} = \frac{d}{dt}\left(\overset{*}{\mathbf{r}}_1 \cdot (\overset{*}{\mathbf{r}}_2 \times \overset{*}{\mathbf{r}}_3)\right) = \overset{*}{\nabla} \cdot \overset{*}{\mathbf{v}}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt}(\overset{*}{x}{}^{i}, t) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \overset{*}{\mathbf{v}} \cdot \overset{*}{\nabla} \otimes \mathbf{a}. \tag{8}$$

В формулах (7) и (8) относительная скорость движения многофазной среды в связанной конфигурации $\overset{*}{K}$

$$\overset{*}{\mathbf{v}} = \frac{d\overset{*}{\mathbf{x}}}{dt}(X^{j}, t),$$

которая в твердой фазе равна нулю ($\overset{*}{\mathbf{v}} = 0$, $X^{j} \in \overset{0}{V}_{s}$) и в газовой фазе, вообще говоря, отлична от нуля.

Поверхностные величины в различных конфигурациях. Формулы преобразования ориентированной площадки при переходе из конфигураций $\overset{*}{K}$, $\overset{0}{K}$ в конфигурацию K имеют стандартный вид:

$$\mathbf{n}\, d\Sigma = \overset{*}{J}{}^{-1}\, \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1\text{т}} \cdot \overset{*}{\mathbf{n}}\, d\overset{*}{\Sigma}, \quad \mathbf{n}\, d\Sigma = \overset{0}{J}{}^{-1}\, \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \overset{0}{\mathbf{n}}\, d\overset{0}{\Sigma}, \tag{9}$$

$$\overset{0}{J} = \sqrt{\frac{\overset{0}{g}}{g}}, \quad \overset{*}{J} = \sqrt{\frac{\overset{*}{g}}{g}}.$$

С их помощью можно ввести поверхностные тензорные величины $\overset{*}{B}_{\zeta}$ и $\overset{0}{B}_{\zeta}$ в конфигурациях $\overset{*}{K}$ и $\overset{0}{K}$, если их аналоги B_{ζ} определены в актуальной конфигурации K:

$$\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \overset{*}{B}_{\zeta}\, d\overset{*}{\Sigma} = \mathbf{n} \cdot B_{\zeta}\, d\Sigma, \quad \overset{0}{\mathbf{n}} \cdot \overset{0}{B}_{\zeta}\, d\overset{0}{\Sigma} = \mathbf{n} \cdot B_{\zeta}\, d\Sigma, \tag{10}$$

причем

$$\overset{*}{B}_{\zeta} = \overset{*}{J}{}^{-1}\, \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1\text{т}} \cdot B_{\zeta}, \quad \overset{0}{B}_{\zeta} = \overset{0}{J}{}^{-1}\, \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot B_{\zeta}\,.$$

Такими поверхностными тензорными величинами являются: $B_2 = \mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши; $B_3 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q}$ ($\mathbf{q}$ — вектор теплового потока); $B_4 = -\mathbf{q}/\theta$ (θ — температура); $B_6 = \rho\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{v}$. В конфигурации $\overset{0}{K}$ этим величинам соответствуют: $\overset{0}{B}_2 = \overset{0}{\mathbf{T}}$ — первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа; $\overset{0}{\mathbf{q}}$ — вектор теплового потока в отсчетной конфигурации, $\overset{0}{B}_6 = \overset{0}{\rho}\,\mathbf{E}\otimes\mathbf{v}$. В конфигурации $\overset{*}{K}$ появляются новые величины: $\overset{*}{B}_2 = \overset{*}{\mathbf{T}} = \overset{*}{J}{}^{-1}\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1}\cdot\mathbf{T}$ — условный тензор напряжений, $\overset{*}{\mathbf{q}}$ — вектор потока в конфигурации $\overset{*}{K}$ и $\overset{*}{B}_6 = \overset{*}{\rho}\,\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1}\cdot\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}$, поскольку, согласно (5), (8), (9),

$$\mathbf{n}\cdot\rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}\,d\Sigma = \rho\,\overset{*}{J}{}^{-1}\,\overset{*}{\mathbf{n}}\cdot\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1}\cdot\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}\,d\overset{*}{\Sigma} = \overset{*}{\mathbf{n}}\cdot\overset{*}{\rho}\,\overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1}\cdot\mathbf{F}\otimes\mathbf{v}\,d\overset{*}{\Sigma}.$$

Система законов сохранения для двухфазной среды в связанной конфигурации. Запишем систему законов сохранения для фаз двухфазной среды в интегральной форме в связанной конфигурации $\overset{*}{K}$. Представим ее в актуальной конфигурации K [1]:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(x^i,t)} \rho A_\zeta\,dV = \int\limits_{\Sigma(x^i,t)} \mathbf{n}\cdot B_\zeta\,d\Sigma + \int\limits_{V(x^i,t)} \rho C_\zeta\,dV. \qquad (11)$$

Здесь A_ξ, B_5, C_5 — обобщенные координатные столбцы:

$$A_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ e + \dfrac{v^2}{2} \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},\quad B_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}/\theta \\ 0 \\ \rho\mathbf{F}\otimes\mathbf{v} \end{pmatrix},\quad C_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + q_m \\ W^*/\theta + q_m/\theta - \mathbf{q}\cdot\nabla\theta/\theta^2 \\ \rho\mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где e — плотность внутренней энергии; $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$; η — плотность энтропии; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; θ — температура; $\mathbf{f}$ — плотность массовых сил; q_m — плотность массовых источников тепла; W^* — функция диссипации. К системе (12) добавим определяющие соотношения для фаз, которые, согласно работе [12], запишем в виде

$$\mathbf{T} = F_G^{(n)}(\mathbf{F}, \theta),$$

где индекс n соответствует номеру энергетической пары тензоров напряжений и деформаций, $n = I...V$; индекс G — классу модели определяющих соотношений, $G = A, B, C, D$. Тензорная функция $F_G^{(n)}(\mathbf{F}, \theta)$ в общем случае имеет достаточно сложный вид, наиболее просто ее можно записать для идеальной жидкости (газа):

$$F_G^{(n)}(\mathbf{F}, \theta) = -p\mathbf{E}, \quad p = p(\rho, \theta),$$

и для моделей класса $A_V (n = V, G = A)$ [12] изотропных упругих сред:

$$F_G^{(n)}(\mathbf{F}, \theta) = \mathbf{F} \cdot F(\mathbf{C}, \theta) \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

$$F(\mathbf{C}, \theta) = \overset{0}{J}(\psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \mathbf{C} + \psi_3 \mathbf{C}^2), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F},$$

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_1 I_1 + \varphi_3 I_2, \quad -\psi_2 = \varphi_2 + \varphi_3 I_1, \quad \psi_3 = \varphi_3,$$

$$\varphi_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial I_\alpha}, \quad \varphi_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial I_\alpha}, \ \psi = \psi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), \theta),$$

где $p = p(\rho, \theta)$ — давление; $I_\alpha(\mathbf{C})$ — главные инварианты правого тензора деформаций Коши—Грина $\mathbf{C}$; ψ — упругий потенциал, зависящий от главных инвариантов тензора $\mathbf{C}$ и температуры θ.

С помощью формул (6) и (10) систему законов (12) можно записать в связанной конфигурации $\overset{*}{K}$:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i, t)} \overset{*}{\rho} A_\zeta \, d\overset{*}{V} = \int\limits_{\overset{*}{\Sigma}(\overset{*}{x}{}^i, t)} \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \overset{*}{B}_\zeta \, d\overset{*}{\Sigma} + \int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i, t)} \overset{*}{\rho} C_\zeta \, d\overset{*}{V}, \tag{14}$$

причем области $\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i, t)$ и $V(x^i, t)$ будут содержать одни и те же материальные точки фаз. Используя правило дифференцирования (6) и формулу Гаусса—Остроградского в конфигурации $\overset{*}{K}$, получаем

$$\int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i, t)} \left(\frac{\partial \overset{*}{\rho} A_\zeta}{\partial t} + \overset{*}{\nabla} \cdot (\overset{*}{\rho} \overset{*}{\mathbf{v}} \otimes A_\zeta) \right) d\overset{*}{V} =$$

$$= \int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i, t)} \overset{*}{\nabla} \cdot \overset{*}{B}_\zeta \, d\overset{*}{V} + \int\limits_{\overset{*}{V}(\overset{*}{x}{}^i, t)} \overset{*}{\rho} C_\zeta \, d\overset{*}{V}. \tag{15}$$

В силу произвольности области $\overset{*}{V}$ (14) искомая дифференциальная система законов сохранения в связанной конфигурации $\overset{*}{K}$ имеет вид

$$\frac{\partial \overset{*}{\rho} A_\zeta}{\partial t} + \overset{*}{\nabla} \cdot \left(\overset{*}{\rho} \overset{*}{\mathbf{v}} \otimes A_\zeta - \overset{*}{B}_\zeta \right) = C_\zeta . \tag{16}$$

Система уравнений (16) в связанной конфигурации по сравнению с системой (10) в актуальной конфигурации содержит дополнительные неизвестные: скорость $\overset{*}{\mathbf{v}}$ и градиент $\overset{*}{\mathbf{F}}$, поэтому к системе (16) необходимо присоединить дополнительные уравнения для вычисления этих величин.

Отметим, что при выводе уравнения для градиента $\overset{*}{\mathbf{F}}$ конфигурацию $\overset{*}{K}$ по отношению к конфигурации $\overset{0}{K}$ можно рассматривать как фиктивную актуальную, поэтому для градиента $\overset{0}{\mathbf{F}}$ в координатах $\overset{*}{x}{}^i$ используют такое же уравнение совместности деформаций, как и для градиента $\mathbf{F}$ в координатах x^i, т. е.

$$\frac{\partial \overset{*}{\rho} \overset{0}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \overset{*}{\nabla} \cdot \left(\overset{*}{\rho} \overset{*}{\mathbf{v}} \otimes \overset{0}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} - \overset{*}{\rho} \overset{0}{\mathbf{F}} \otimes \overset{*}{\mathbf{v}} \right) = 0. \tag{17}$$

Это уравнение следует дополнить соотношением градиентов, вытекающим из выражения (4):

$$\overset{*}{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \overset{0}{\mathbf{F}}{}^{-1}.$$

Скорость $\overset{*}{\mathbf{v}}$, как и преобразование координат (3), вообще говоря, определяется неоднозначно. Для их определения предложим следующий метод: пусть в области $\overset{*}{V}_g(\overset{*}{x}{}^i, t)$, занятой газовой фазой, имеется некоторая фиктивная твердая среда с определяющими соотношениями упругой среды типа (13), и уравнением движения

$$\frac{\partial \overset{*}{\rho} \overset{*}{\mathbf{v}}}{\partial t} + \overset{*}{\nabla} \cdot \left(\overset{*}{\rho} \overset{*}{\mathbf{v}} \otimes \overset{*}{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{T}} \right) = \overset{*}{\rho} \overset{*}{\mathbf{f}}, \tag{18}$$

где $\hat{\mathbf{T}}$ — тензор напряжений фиктивной среды, он может быть задан в виде (13).

Уравнения (17) и (18) имеют дивергентный вид, их можно присоединить к общей системе законов сохранения (16) в связанной конфигурации, тогда координатные столбцы в этой системе принимают вид

$$A_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ e + \dfrac{v^2}{2} \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \\ \overset{0}{\mathbf{F}}{}^{\mathrm{T}} \\ \overset{*}{\mathbf{v}} \end{pmatrix}, \quad \overset{*}{B}_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{*}{\mathbf{T}} \\ \overset{*}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v} - \overset{*}{\mathbf{q}} \\ -\overset{*}{\mathbf{q}}/\theta \\ 0 \\ \overset{*}{\rho}\, \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{-1} \cdot \mathbf{F} \otimes \mathbf{v} \\ \overset{*}{\rho}\, \overset{0}{\mathbf{F}} \otimes \overset{*}{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \quad \zeta = 1, \ldots, 8.$$

Граничное условие для фиктивной среды таково: поскольку в актуальной конфигурации совпадают декартовы координаты контактирующих материальных точек, по лагранжевым координатам твердой фазы с помощью закона движения можно найти соответствующие им лагранжевы координаты газовой фазы:

$$x_s^i(X_s^j, t) = x_g^i(X_g^j, t) \Rightarrow X_g^j = Y_g^j(X_s^j, t).$$

Переходя для твердой фазы к координатам $\overset{*}{x}{}^i = \overset{0}{x}{}^i$, получаем уравнение, определяющее движение материальных точек газовой фазы и фиктивной твердой среды по поверхности твердой фазы в связанной конфигурации

$$X_g^j = Y_g^j \left[X_s^j(\overset{*}{x}{}^i), t \right].$$

Граничные условия на поверхности раздела фаз. Если записать интегральную систему законов сохранения (14) для области, содержащей поверхность раздела фаз $\overset{*}{\Sigma}_{sg}(t)$, и стянуть эту область к точке в соответствии с методом, изложенным в [1], получим следующую систему соотношений для скачков функций на некогерентной поверхности раздела фаз в связанной конфигурации:

$$[\overset{*}{\rho} A_\zeta]\overset{*}{D} - \overset{*}{\mathbf{n}}\cdot[\overset{*}{\rho}\overset{*}{\mathbf{v}}\otimes A_\zeta] + \overset{*}{\mathbf{n}}\cdot[\overset{*}{B}_\zeta] + C_{\zeta\Sigma} = 0.$$

Здесь $\overset{*}{D}$ — нормальная скорость движения поверхности раздела фаз в связанной конфигурации:

$$\overset{*}{D} = \overset{*}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{n},\ \overset{*}{\mathbf{c}} = \overset{*}{c}{}^i\,\mathbf{e}_i,\ \overset{*}{c}{}^i = \frac{\partial}{\partial t}\overset{*}{x}{}^i\left[X^j_{sg}(t)\right],$$

где $X^j_{sg}(t) = X^j_s\big|_{\overset{*}{\Sigma}_{sg}(t)}$ — лагранжевы координаты поверхности раздела фаз, совпадающие с лагранжевыми координатами твердой фазы и изменяющиеся во времени только за счет фазовых превращений; $C_{\zeta\Sigma}$ — скачки функций на границе раздела фаз.

Таким образом, введено понятие связанной конфигурации для пористых сред с конечными деформациями и некогерентной поверхностью раздела фаз, которая позволяет симметризовать систему законов сохранения для пористых сред такого класса путем построения специальной фиктивной твердой среды, связанной с основной твердой фазой условиями идеального контакта и находящейся в области жидкой фазы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
2. Желтов Ю. П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра. 1975.
3. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996.
4. Димитриенко Ю. И., Глазиков М. Л. Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. № 1. 2003. С. 59–71.
5. Димитриенко Ю. И., Левина А.И., Боженик П. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 3. С. 90–104.
6. Димитриенко Ю. И., Иванов М. Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. № 1. 2008. С. 39–56.
7. Димитриенко Ю. И., Левина А. И., Галицын А. Конечно-элементный анализ локальных газодинамических процессов в трехмерных пористых структурах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. выпуск Математическое моделирование. 2011. С. 50–66.
8. Dimitrienko Yu. I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. Part 1. Method of Asymptotic Averaging // European Journal of Mechanics. A: Solids. 1998. Vol. 17. № 2. P. 305–322.

9. D i m i t r i e n k o Y u. I. Mechanics of Porous Media with Phase Transformations and Periodical Structure. Part 2. Solutions of Local and Global Problems. European Journal of Mechanics. A: Solids. 1998. Vol. 17. № 2. P. 323–337.

10. D i m i t r i e n k o Y u. I. Dynamic Transport Phenomena in Porous Polymer Materials Under Impulse Thermal Effects// Journal of Transport in Porous Media.- Vol. 35. № 2. 1999.

11. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Разрушение композиционных материалов при высоких температурах и конечных деформациях // Механика композит. материалов. 1992. № 1. С. 43–55.

12. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. — Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.