УДК 681.5:681.3:519.6

Ю. В. Журавлев

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Развита методика оценки погрешности обширного класса алгоритмов параметрической идентификации, допускающих структурную декомпозицию блоков формирования матричной системы и ее решения. Проведена оценка наследственной погрешности блока решения. Точность блока формирования продемонстрирована на конкретном алгоритме производящих функций, примененном к идентификации коэффициентов дифференциального уравнения моментов в колебательной модели продольного короткопериодического движения летательного аппарата. Принята гипотеза о наиболее неблагоприятном распределении знаков ошибок. Проведено аналитическое вычисление первых двух вероятностных моментов матричных ошибок. Обсуждается отделимость задачи фильтрации измерений входных и выходных процессов от задачи параметрической идентификации стационарной линейной динамической системы.

E-mail:zhurjurwas270747@yandex.ru

Ключевые слова: *идентификация, функции Эрмита, число обусловленности, аналитическая оценка погрешности, фильтрация измерений, летательный аппарат.*

Предъявление повышенных требований к достоверности математических моделей динамических систем в связи с привлечением принципов интеллектуализации управления обусловливает научный интерес к проблеме идентификации. Создание и внедрение алгоритмов идентификации сопровождается изучением их точностных характеристик [1, 2]. Для получения оценок погрешностей вычислительных алгоритмов можно использовать четыре способа: аналитический, алгоритмический, имитационное моделирование, комбинированный [3]. Аналитический применяют для изучения априорных свойств решений. Алгоритмический и имитационный способы опираются на статистический анализ. Комбинированный заключается в декомпозиции алгоритма на блочные модули, исследуемые затем любым способом.

В работе развивается методология получения гарантирующих оценок погрешностей для обширного класса алгоритмов параметрической идентификации, структурно декомпозируемых в двухуровневую систему с двумя ключевыми блоками: 1) блок формирования матричной системы (формирователь); 2) блок решения матричной системы (решатель). С помощью аналитического аппарата нормированных пространств [4] проведена оценка нормы наследственной погрешности решателя, вызванной присутствием помех в записях экспериментальных данных. Точность формирователя изучается с использованием алгоритма идентификации коэффициентов дифференциального уравнения моментов в модели продольного короткопериодического движения летательного аппарата [5]. В основу алгоритма положен интегральный метод производящих функций Эрмита [6—8]. Родственные проблемы возникают и изучаются во всех без исключения задачах прикладной математики, использующих аппарат линеаризации и численные методы линейной алгебры, в том числе в задачах распознавания образов [9]. Содержательное изложение многих проблемных вопросов можно найти в работах [10, 11].

Точность решателя. Согласно работе [4], точность блока-решателя определяется оценкой нормы погрешности решения возмущенной матричной системы. В основу рассуждений положено допущение о полной достоверности структуры математической модели с искомым векторным параметром x в виде матричного равенства $Ax = b$. Предполагается, что блок-формирователь вместо точных матриц A, b выдает возмущенные матрицы $\tilde{A} = A + \Delta A, \tilde{b} = b + \Delta b,$ поэтому решение $\tilde{x}$ возмущенного уравнения $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ будет отличаться от истинного x, при этом разность $\Delta x = \tilde{x} - x$ называют ошибкой решения. Здесь $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n}$, $x \in \mathbb{R}^{n}$, Δx, Δb — соответствующие возмущения матриц A, b на выходе формирователя, появляющиеся в силу различных причин, таких как наличие шумовых составляющих в записях экспериментальных данных, неточности аппроксимации математических операторов в алгоритме формирователя, а также наличие погрешностей округления. Очевидно, что исходя из неявной формулы для абсолютной погрешности

$$\Delta x = A^{-1} \cdot (\Delta b - \Delta A \cdot x - \Delta A \cdot \Delta x),$$

в терминах нормированного пространства можно записать следующее неравенство:

$$\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\| \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\| + \|\Delta A\| \cdot \|\Delta x\|),$$

откуда

$$\|\Delta x\| \cdot (1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|) \le \|A^{-1}\| \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|).$$

Наложив ограничение на норму погрешности матрицы A, а именно

$$d = 1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| > 0\,,$$

получим оценку абсолютной погрешности

$$\|\Delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{d} \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|)$$

и оценку относительной погрешности решения

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{d} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right).$$

В силу свойства согласованности матричной и векторной норм имеем

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|,$$

откуда

$$\|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

что позволяет получить оценку относительной погрешности в виде

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{d} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \|A\| + \|\Delta A\| \right).$$

Вводя обозначения

$$\nu = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \ , \qquad \delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \qquad \delta b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \quad \delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

$$d = 1 - \nu \cdot \delta A,$$

запишем оценку относительной погрешности δx в виде

$$\delta x \le K \cdot (\ \delta b + \delta A \ ),$$

где

$$K = \frac{\nu}{1 - \nu \cdot \delta A} \ .$$

Очевидно, если $\delta A = 0$, то $\delta x \le \nu \delta b$.

Можно сказать, что 1 % погрешности в исходных матрицах может перейти в K % погрешности результата, естественно, что $K > 1$. Кроме того, полученная аналитическая оценка справедлива лишь при соблюдении условия $1 - \nu \delta A > 0$, которое указывает на очень высокую чувствительность оценок δx и δA. Например, если погрешность δx =

= 10 %, необходимо, чтобы оценка δA составляла не более 9 % при $v = 1$, но уже при $v = 100$ — не более 0,09 %.

Относительная погрешность решателя является усиленной суммой относительных погрешностей исходных матриц. Отметим, что главная часть нормы вектора определяется своими доминирующими компонентами, но тогда и оценка δx будет объективной именно для доминирующих компонент вектора. Например, если $x = (1, 50, 20)^{\text{т}}$, $\Delta x = (0{,}2,\ 5,\ 2)^{\text{т}}$, то в сферической норме $\|x\| \approx 53{,}9$, $\|\Delta x\| \approx 5{,}39$, $\delta x \approx \approx 0{,}1$, а истинные значения относительных погрешностей таковы: $\dfrac{\Delta x_1}{x_1} \approx 0{,}2$, $\dfrac{\Delta x_2}{x_2} \approx 0{,}1$, $\dfrac{\Delta x_3}{x_3} \approx 0{,}1$, и здесь отчетливо наблюдается значительная неустойчивость оценки погрешности меньшего параметра $x_1 = 1$ на фоне приемлемых оценок погрешностей больших параметров. Проблема идентификации малых параметров, вообще говоря, относится к классу некорректных [12]. Принципиально необходимо проводить исследование чувствительности оценок малых параметров к влиянию разброса оценок доминирующих параметров.

В рассмотренном способе оценки погрешностей блока-решателя принята гипотеза о максимально неблагоприятном распределении знаков всевозможных ошибок, так что подобные оценки являются робастными (грубыми) и гарантирующими, что актуально в стохастических условиях с высоким уровнем неопределенности.

Замечание. При любой матричной норме $\|A\| \geq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, где $\{\lambda_i\}$ — спектр собственных чисел матрицы A. При этом $\|A^{-1}\| \geq 1/\min\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, откуда $v \geq 1$. Норма матрицы $\|A\|$, подчиненная векторной евклидовой норме $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2}$ и одновременно согласованная с ней, выражается через спектральный радиус $\rho\left(A^{\text{т}} A\right) = \dfrac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$ матрицы $A^{\text{т}}A$, а именно $A = \sqrt{\rho(A^{\text{т}} A)}$, где $\mu_{\max}, \mu_{\min}$ — максимальное и минимальное собственные числа симметрической матрицы $A^{\text{т}}A$.

С увеличением числа обусловленности матрицы v точностные характеристики блока-решателя ухудшаются, и это указывает на необходимость планирования реальных испытаний объекта идентификации с привлечением критерия минимума числа обусловленности.

Точность формирователя. Исследование точности блока формирования системы рассмотрено на примере задачи идентификации трех параметров x_1, x_2, x_3 уравнения моментов в модели короткопериодического движения летательного аппарата [5]:

$$x_1 \ddot{\vartheta} + x_2 \dot{\vartheta} + x_3\, \alpha = u,$$

$$x_4 (\dot{\alpha} - \dot{\vartheta}) + x_5 \cdot \alpha = u.$$

Для идентификации привлечен интегральный метод производящих функций [6—8]. Доступной информацией служат угловая скорость тангажа $\dot{\vartheta}$, угол атаки α и отклонение руля высоты u на отрезке времени $[0, T]$. В качестве производящих используем четыре функции Эрмита $G_i(r)$, $i = \overline{0, 3}$:

$$G_0 = e^{-r^2/2}, \quad G_1 = -re^{-r^2/2}, \quad G_2 = \left(r^2 - 1\right)e^{-r^2/2}, \quad G_3 = -\left(r^3 - 6r\right)e^{-r^2/2},$$

которые ортогональны на интервале $(-\infty, +\infty)$ в смысле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(G_i(r) G_j(r)\right) dr = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Одно из свойств их выражается в том, что $\dfrac{dG_i(r)}{dr} = G_{i+1}(r)$.

Функция Эрмита порядка m приближенно финитная: обладает «носителем» в виде некоторого отрезка $[-r_m, r_m]$, вне которого она исчезающе малая; при этом функции низших порядков имеют аналогичные носители, но вложенные в отрезок $[-r_m, r_m]$.

Согласуем T и r_m, положив $r = m\left(t - \dfrac{T}{2}\right)$, где $m = 2r_m / T$. Умножим дифференциальное уравнение моментов на $G_i(r(t))$ и проинтегрируем по t на отрезке $[0, T]$. Проблемный интеграл $\int_0^T G_i\left[r(t)\right] \ddot{\vartheta}(t)\, dt$ с недоступной функцией $\ddot{\vartheta}$ после интегрирования по частям сводится к интегралу с доступной функцией $\dot{\vartheta}$:

$$\int_0^T G_i\left[r(t)\right] \ddot{\vartheta}(t)\, dt = G_i\left[r(t)\right] \dot{\vartheta}(t)\Big|_0^T - m\int_0^T G_{i+1}\left[r(t)\right] \dot{\vartheta}(t)\, dt.$$

Поскольку $G_i(\pm r_m) \approx 0$, постольку $G_i\left[r(t)\right]\dot{\vartheta}(t)\Big|_0^T \approx 0$, так что

$$\int_0^T G_i\left[r(t)\right] \ddot{\vartheta}(t)\, dt \approx -m\int_0^T G_{i+1}\left[r(t)\right] \dot{\vartheta}(t)\, dt.$$

Вместо дифференциального уравнения моментов получаем модель в форме алгебраического уравнения вида

$$-m\left\langle \dot{\vartheta}, G_{i+1}\right\rangle x_1 + \left\langle \dot{\vartheta}, G_i\right\rangle x_2 + \left\langle \alpha, G_i\right\rangle x_3 = \left\langle u, G_i\right\rangle,$$

где

$$\left\langle p, q\right\rangle = \int_0^T p(t)\, q(t)\, dt.$$

Повторив эту процедуру для i = 0, 1, 2, в итоге получаем матричное уравнение $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} -m\left\langle \dot{\vartheta}, G_1\right\rangle & \left\langle \dot{\vartheta}, G_0\right\rangle & \alpha, G_0 \\ -m\left\langle \dot{\vartheta}, G_2\right\rangle & \left\langle \dot{\vartheta}, G_1\right\rangle & \left\langle \alpha, G_1\right\rangle \\ -m\left\langle \dot{\vartheta}, G_3\right\rangle & \left\langle \dot{\vartheta}, G_2\right\rangle & \left\langle \alpha, G_2\right\rangle \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \left\langle u, G_0\right\rangle \\ \left\langle u, G_1\right\rangle \\ \left\langle u, G_2\right\rangle \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Помехи измерительного тракта будем моделировать аддитивным наложением случайных процессов:

$$\tilde{\dot{\vartheta}}(t) = \dot{\vartheta}(t) + \xi_1(t), \qquad \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + \xi_2(t), \quad \tilde{u}(t) = u(t) + \xi_3(t).$$

Здесь $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ — независимые между собой, а также от измеряемых процессов центрированные помехи типа гауссовых белых шумов с известными первыми двумя моментами:

$$M\left[\xi_i(t)\right] = 0, \quad M\left[\xi_i(t)\xi_j(t)\right] = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j; \\ D_{\xi_i}\delta(t-\tau) & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Тогда в блоке формирователя матричные возмущения окажутся следующими:

$$\Delta A = \begin{pmatrix} -m\langle \xi_1, G_1\rangle & \langle \xi_1, G_0\rangle & \langle \xi_2, G_0\rangle \\ -m\langle \xi_1, G_2\rangle & \langle \xi_1, G_1\rangle & \langle \xi_2, G_1\rangle \\ -m\langle \xi_1, G_3\rangle & \langle \xi_1, G_2\rangle & \langle \xi_2, G_2\rangle \end{pmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} \langle \xi_3, G_0\rangle \\ \langle \xi_3, G_1\rangle \\ \langle \xi_3, G_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Вычисляя математические ожидания для возмущений $\Delta A, \Delta b$ с учетом

$$M\left[\xi_i, G_j\right] = \left\langle M\left[\xi_i(t)\right], G_j\right\rangle = 0,$$

получаем

$$M[\Delta A] = 0, \qquad M[\Delta b] = 0.$$

Теперь найдем дисперсию матричных возмущений, которая будет отражать степень разброса ошибок:

$$D\left(\left\langle \xi_i, G_j \right\rangle\right) = M\left\{\left[\left\langle \xi_i, G_j \right\rangle - M\left(\left\langle \xi_i, G_j \right\rangle\right)\right]^2\right\} = M\left[\left(\left\langle \xi_i, G_j \right\rangle\right)^2\right] =$$

$$= M\left\{\left[\int_0^T \xi_i(t) G_j\left(r\left(t\right) dt\right)\right]\left[\int_0^T \xi_i\left(t\right) G_j\left(r\left(t\right)\right) dt\right]\right\} =$$

$$= M\left\{\int_0^T G_i\left(r\left(t\right)\right)\left[\int_0^T \xi_i\left(t\right)\xi_i(\tau) G_i\left(r\left(\tau\right)\right) d\tau\right] dt\right\} =$$

$$= \int_0^T G_j\left(r\left(t\right)\right)\left[\int_0^T \mathrm{M}[\xi_i\left(t\right)\xi_i\left(\tau\right)] G_j\left(r\left(\tau\right)\right) d\tau\right] dt =$$

$$= \int_0^T G_j\left(r\left(t\right)\right)\left[\int_0^T D_{\xi_i}\delta\left(t-\tau\right) G_j\left(r\left(\tau\right)\right) d\tau\right] dt =$$

$$= D_{\xi_i}\int_0^T \left[G_j\left(r\left(t\right)\right)\right]^2 dt.$$

Чтобы вычислить интеграл $\int_0^T \left[G_j\left(r\left(t\right)\right)\right]^2 dt,$ заменим параметр t на $r = m\left(t - \frac{T}{2}\right)$ и найдем

$$\int_0^T \left[G_j\left(r\left(t\right)\right)\right]^2 dt = \frac{1}{m}\int_{-r_m}^{r_m} \left[G_j\left(r\right)\right]^2 dr \approx \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_j\left(r\right)\right]^2 dr.$$

Подставив вместо G_i их формулы, сведем вычисления к интегралу вида [13]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\left(2n-1\right)}{\sqrt{2^{2n}}}\sqrt{\pi},\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Приведем полученные числовые значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_j\left(r\right)\right]^2 dr = A_j \cdot \sqrt{\pi},$$

где

$$A_0 = 1,\ A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = \frac{3}{4},\ A_3 = \frac{87}{8}.$$

Таким образом, получены матрицы дисперсий для возмущений $\Delta A, \Delta b$:

$$D_{\Delta A} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \cdot \begin{pmatrix} D_{\xi_1} \cdot \frac{m^2}{2} & D_{\xi_1} & D_{\xi_2} \\ D_{\xi_1} \cdot \frac{3m^2}{4} & D_{\xi_1} \cdot \frac{1}{2} & D_{\xi_2} \cdot \frac{1}{2} \\ D_{\xi_1} \cdot \frac{87m^2}{8} & D_{\xi_1} \cdot \frac{3}{4} & D_{\xi_2} \cdot \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad D_{\Delta b} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \cdot \begin{pmatrix} D_{\xi_3} \\ D_{\xi_3} \cdot \frac{1}{2} \\ D_{\xi_3} \cdot \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

По найденным матрицам дисперсий можно прогнозировать априорные вероятностные границы разброса ошибок идентификации.

Предложенная в работе методика оценивания погрешностей идентификации позволяет получить гарантирующие оценки в смысле учета наиболее неблагоприятного распределения знаков ошибок, но решение любого конкретного алгоритма необходимо сопровождать анализом распространения влияния вычислительных погрешностей. Следует также обращать внимание на наличие малых параметров математической модели, например демпфирующего коэффициента $m_z^{\omega_z}$ в модели короткопериодического движения летательного аппарата [5], устойчивость оценки которого наверняка низкая, и не только по причине использования off-line метода идентификации, но и on-line, такого как адаптивный идентификатор [14].

Моделирование влияния измерительных помех показывает, что в зависимости от числа обусловленности, а оно на различных участках выборки исходных данных может широко изменяться от 10 до 10^7 и более, наследственная погрешность оценивания коэффициентов уравнения моментов адекватно усиливается пропорционально числу обусловленности. При этом было выявлено, что при скачкообразном входном сигнале число обусловленности будет наименьшим на участках, совпадающих с полным переходным процессом по координатам $\dot{\vartheta}$ и α. Эти наблюдения подтверждают необходимость планирования эксперимента с учетом критерия максимума математической обусловленности проблемы обработки экспериментальных данных.

В задачах идентификации приходится обращаться к первичной обработке экспериментальных данных, в частности фильтровать и сглаживать зашумленные выходные процессы, поступающие от датчиков первичной информации. При этом разделение этапов фильтрации и идентификации в случае объектов из класса устойчивых линейных стационарных динамических систем оказывается операцией корректной, что теоретически рассматривалось в работе [15], и моделирование подтвердило этот вывод на примерах off- и on-line алгоритмов идентификации, дополненных включением одинаковых сглаживающих фильтров входного и выходного сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э й к х о ф ф П. Основы идентификации систем управления : пер. с англ. М.: Мир, 1975.
2. Л ь ю н г Л. Идентификация систем. Теория для пользователя : пер. с англ. М.: Наука, 1991.
3. И в а н о в В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1986.
4. Ф о р с а й т Д ж., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений : пер. с англ. М.: Мир, 1969.
5. Л е б е д е в А. А., Ч е р н о б р о в к и н Л. С. Динамика полета. М.: Машиностроение, 1978.
6. Ж у р а в л е в Ю. В. Идентификация линейных стационарных систем методом производящих функций // Исследование, проектирование и расчет технических средств кибернетики, радиосистем и установок летательных аппаратов / Под ред. В.И. Козлова и А.С. Протопопова. Тр. МАИ. Вып. 348. М.: Изд-во МАИ, 1976.
7. L o e b J. M. and C a h e n G. M. Extraction, a partir des enregistrements de mesures, des parameters dynamiques d’un systeme / Automatisme. No. 12. Dec. 1963. P. 479–486.
8. T o k a y a K. The use of H e r m i t e functions for systems identification. IEEE Trans., 1968. AC-13. August. N 4.
9. Ж у р а в л е в Ю. И., Г у р е в и ч И. Б. Распознавание образов и распознавание изображений // Распознавание, классификация, прогноз. 1989. Т. 2. № 5. С. 5–73.
10. Г а л а н и н М. П., С а в е н к о в Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
11. Методы классической и современной теории автоматического управления // Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. Т.2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
12. Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
13. Б р о н ш т е й н И. Н., С е м е н д я е в К. А. Справочник по математике / Лейпциг. Изд-во «Тойнбер», 1979. М.: Наука, 1980.
14. Ж у р а в л е в Ю. В. Синтез адаптивного следящего идентификатора прямым методом Ляпунова // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. № 2. С. 3–15.
15. Ж у р а в л е в Ю. В. О разделимости задач фильтрации и идентификации линейных стационарных динамических систем // Вопросы кибернетики и радиотехники / Под ред. В.И. Козлова. Тр. МАИ. Вып. 426. М.: Изд-во МАИ, 1977. С. 24–28.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.