УДК 519.6:532.529.5

В.Д. Сулимов, П.М. Шкапов

МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ И ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрены задачи оптимизации механических и гидромеханических систем с непрерывными не всюду дифференцируемыми многоэкстремальными критериями в скалярной и векторной постановках. Глобальные решения для частных критериев определены с использованием новых гибридных алгоритмов, объединяющих алгоритм Метрополиса при сканировании пространства переменных и детерминированные методы локального поиска. Алгоритмы векторной оптимизации генерируют множество недоминируемых решений, аппроксимирующих фронт Парето. Предложенные гибридные алгоритмы можно использовать в системах вычислительной диагностики, оптимальном проектировании, управлении сложными системами.

E-mail: spm@bmstu.ru

Ключевые слова: *глобальная оптимизация, критериальная функция, условие Липшица, сглаживающая аппроксимация, многокритериальная оптимизация, фронт Парето, гибридный алгоритм.*

Летательные аппараты, реакторные установки АЭС и другие современные изделия области высоких технологий включают в себя механические и гидромеханические системы различного назначения. Создание, отработка и последующая эксплуатация этих систем связаны с поиском решения двух типов экстремальных задач — оптимизации и диагностики. Задачи первого типа возникают при выборе оптимальных параметров систем, а также для реализации оптимального управления системой или процессом. Для обеспечения безопасной и эффективной эксплуатации требуется решать задачи второго типа: коррекции математических моделей и диагностирования систем по результатам косвенных измерений. Входными данными для задач диагностирования являются результаты экспериментального определения некоторых характеристик системы или процесса, например регистрируемые параметры колебательных и ударных процессов. К искомым данным относятся такие характеристики, как коэффициенты уравнений расчетной динамической модели, граничные условия, геометрические и др. В задачах этого типа необходимо учитывать недифференцируемость и многоэкстремальность критериальных функций ввиду наличия кратных частот и неполноты информации, полученной при измерениях. Значительная трудоемкость решения обратных спектральных задач обусловлена их некорректностью, которая чаще всего проявляется в неустойчивости решения относительно погрешностей входных данных.

Оптимизационное исследование сложных объектов основано на разработке и последующем уточнении их математических моделей [1—3]. Усложнение модели объекта, в свою очередь, вызывает необходимость создания новых, более эффективных методов оптимизации [4]. Следует отметить, что спектры колебаний содержат существенную информацию об исследуемом объекте. Задачи определения оптимальных собственных характеристик системы или процесса, а также использования собственных характеристик для коррекции моделей и диагностирования систем изложены в работах [5—7]. В общем случае используют как скалярные, так и векторные критерии [8, 9]. При этом частными критериями в многокритериальных задачах вычислительной диагностики могут быть, вообще говоря, многоэкстремальные функции [10, 11]. Корректная формулировка рассматриваемых задач предполагает применение методов регуляризации [12, 13]. Используемый далее подход основан на разработке и применении математических моделей систем, математических методов расчета основных динамических характеристик систем, методов теории обратных задач, глобальной оптимизации, векторной оптимизации [14—16].

Постановка задач. Рассмотрим изопараметрическую задачу оптимального распределения материала упругого тела, совершающего свободные колебания, в постановке, приведенной в работе [17]. Срединная поверхность (плоскость) тела занимает на плоскости x_1, x_2 область Ω, которая является открытым ограниченным связным множеством в пространстве $\mathbb{R}^2$. Непрерывная липшицева граница $\partial\Omega$ области разделена на две части — $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, граничные условия на которых формулируются независимо. Предполагается, что выделенная область имеет прямоугольную форму:

$$\Omega = \left\{ \left(x_1,\, x_2 \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \in \left(0,\, a \right),\;\; x_2 \in \left(0,\, b \right) \right\}, \tag{1}$$

где a, b — действительные положительные числа;

$$\partial\Omega_1 = \left\{ \left(x_1,\, x_2 \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 0,\, a;\;\; x_2 \in \left[0,\, b \right] \right\},\;\; \partial\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1. \tag{2}$$

Кроме того, переменной управления (проектирования) является функция толщины тела $u = u\left(x_1, x_2\right)$, перемещение тела $y = y\left(u,\, x_1,\, x_2\right)$ зависит от величины u. Целью является определение такой функции $u = u\left(x_1, x_2\right)$, при которой основная (низшая) частота свободных колебаний упругого тела максимальна, а его объем (масса) не изменяется.

Свободные колебания упругого тела при малых амплитудах описываются линейной эллиптической задачей на собственные значения: требуется найти зависящие от величины u собственные пары $\left(\lambda, y\right)$, удовлетворяющие уравнению

$$A_u y = \lambda B_u y. \tag{3}$$

Здесь λ и y — собственное значение и собственный вектор эллиптического оператора соответственно.

$$A_u = \left(u^3 y_{11}\right)_{11} + \left(u^3 y_{22}\right)_{22} + \nu\left(u^3 y_{11}\right)_{22} +$$

$$+ \nu\left(u^3 y_{22}\right)_{11} + 2\left(1-\nu\right)\left(u^3 y_{12}\right)_{12}, \tag{4}$$

где $y_{ij} = \partial^2 y / \left(\partial x_i \partial x_j\right)$, $y_{j0} = \partial y / \partial x_j$, $i,\ j = 1,\ 2$; ν — коэффициент Пуассона, $0 < \nu < 0,5$.

Оператор B_u определяется следующей формулой:

$$B_u y = uy. \tag{5}$$

Граничные условия имеют вид

$$y = y_{10} = 0, \quad x_1 = 0, a; \tag{6}$$

$$y = y_{22} = 0, \quad x_2 = 0, b. \tag{7}$$

Пусть $\lambda_*\left(u\right) = \lambda_1$ есть наименьшее собственное значение, удовлетворяющее уравнению (3). Требуется найти такую функцию u, которая максимизирует целевой функционал

$$J\left(u\right) = \lambda_*\left(u\right) \tag{8}$$

при ограничениях

$$c_1 \le u \le c_2, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Omega} u dx = c_3. \tag{10}$$

Здесь c_i, $i = \overline{1,3}$, — суть заданные константы, $0 < c_1 < c_2$, $0 < c_3$.

Рассмотрим слабые решения задачи (3)—(7). Введем обозначения

$$\begin{gathered} V = \left\{ v \in H^2\left(\Omega\right) \;\middle|\; v_{|\partial\Omega} = 0,\ v_{10|\partial\Omega_1} = 0 \right\}, \\ U_{ad}^* = \left\{ u \in U \;\middle|\; c_1 < u < c_2, \int\limits_{\Omega} u dx = c_3 \right\}, \end{gathered} \tag{11}$$

где V — линейное подпространство пространства $H^2\left(\Omega\right)$; $H^m\left(\Omega\right)$ — пространство Соболева порядка m, наделенное нормой $\left\|\cdot\right\|_{H^m(\Omega)}$; $U = L^\infty\left(\Omega\right)$ — пространство существенно ограниченных функций. Постоянные c_1, c_2, c_3 в выражениях (9), (10) выбирают так, чтобы множество допустимых функций U_{ad}^* было непусто. Обозначив через $L^2\left(\Omega\right)$ пространство функций, интегрируемых с квадратом на множестве Ω с границей $\delta\Omega$, которые определены с помощью выражений (1), (2), можно получить зависящие от величины u билинейные формы $a_u(y,\varphi): V \times V \to \mathbb{R}$ и $b_u(y,\varphi): L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, порожденные операторами (4) и (5) соответственно.

Прямую задачу (3)—(7) можно записать в эквивалентной слабой форме: найти пары $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times \{V \setminus \{0\}\}$, удовлетворяющие уравнению

$$a_u(y, \varphi) = \lambda b_u(y, \varphi), \quad \forall \varphi \in V. \tag{12}$$

Далее свободные колебания упругого тела будем описывать уравнением (12). Наименьшее собственное значение $\lambda_*(u) = \lambda_1$ задачи (12) можно определить следующим образом [17]:

$$\lambda_*(u) = \inf\left\{ a_u(y,y) / b_u(y,y) \;\middle|\; y \in V,\ y \neq 0 \right\} =$$

$$= \inf\left\{ a_u(y,y) \;\middle|\; y \in V,\ b_u(y,y) = 1 \right\}.$$

Задача оптимального проектирования формулируется как задача максимизации целевого функционала (8) на множестве $U_{ad}^* \subset L^2(\Omega)$: найти

$$\sup\left\{ J(u) \;\middle|\; u \in U_{ad}^* \cap H^1(\Omega) \right\}. \tag{P1}$$

В общем случае задача (P1) не имеет решений на множестве U_{ad}^*. Для того чтобы гарантировать существование оптимальных решений, воспользуемся методикой регуляризации, т. е. добавим к критериальному функционалу (8) регуляризирующий член [12]

$$r_\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации. Таким образом, сформулировано семейство регуляризированных задач оптимального проектирования упругого тела: найти

$$\sup\left\{ J(u) + r_\varepsilon \;\middle|\; u \in U_{ad}^* \cap H^1(\Omega) \right\}. \tag{$\mathrm{P1}_\varepsilon$}$$

Рассмотрим общий случай, когда низшее собственное значение прямой задачи (12) является кратным. Это означает, что целевые функционалы в задачах $(\mathrm{P1})$ и $(\mathrm{P1})_\varepsilon$ не всюду дифференцируемы по переменной $u \in U_{ad}$. Дискретизацию задачи $(\mathrm{P1})_\varepsilon$ проведем с использованием метода конечных элементов. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ разобъем на прямоугольные элементы K_i, $i = 1, ..., I,$ так что $\Omega = \bigcup_{i=1}^{I} K_i$.

Пусть h — параметр дискретизации. Целевой функционал (8) и регуляризующий член (13) аппроксимируются как

$$J_h(q) = \lambda_{*h}(q) = \inf\left\{\left(A_h(q)\eta,\ \eta\right)_{\mathbb{R}^M}\ \middle|\ \eta \in \mathbb{R}^M,\ \left(B_h(q)\eta,\ \eta\right)_{\mathbb{R}^M} = 1\right\},$$

$$r_{\varepsilon h}(q) = -\frac{1}{2}\varepsilon\left(C_h q,\ q\right)_{\mathbb{R}^N}.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$; матрицы A_h, B_h, C_h определены в работе [17].

Конечномерная аппроксимация задачи оптимального проектирования $(\mathrm{P1})_\varepsilon$ имеет следующий вид: найти

$$\max\ \left\{J_h(q) + r_{\varepsilon h}(q)\ \middle|\ q \in U_{had}\right\}, \qquad (\mathrm{P1})_{\varepsilon h}$$

если уравнение свободных колебаний (прямая задача) представлено в виде

$$\left[A_h(q) - \lambda_h B_h(q)\right]\eta = 0, \qquad (14)$$

где $\lambda_h \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}^M$, $\eta \neq 0$.

Задача коррекции расчетной динамической модели и диагностирования системы как обратная спектральная задача связана с поиском вектора переменных управления, при котором первые N собственных частот модели совпадают с составляющими некоторого заданного ограниченного спектра или близки к ним. Для оценки уровня рассогласования сравниваемых характеристик объекта используют векторный способ описания. Поскольку информация о формах колебаний объекта зачастую отсутствует или является существенно неполной, рассмотрим только рассогласование между частотными составляющими нормального и заданного спектров. Возможные подходы основаны на минимизации квадратичной функции рассогласования или минимизации максимальной из функций рассогласования спектральных составляющих. Так, для попарно сравниваемых спектральных составляющих можно построить следующее конечное множество критериев рассогласования:

$$f_i(x) = \left|\zeta_i(x) - \zeta_i^*(x)\right|,\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,\ i \in I,$$

где $\zeta_i(x)$, $\zeta_i^*(x)$ — собственные значения, относящиеся к исходному (текущему) и заданному спектрам. Требуется найти такой вектор переменных управления, который приводит к наименьшим отличиям между сравниваемыми спектрами, т. е. следует настроить модель объекта на заданный спектр. Это эквивалентно одновременной минимизации всех N критериев рассогласования: требуется найти

$$\min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x),$$

где векторная целевая функция имеет вид

$$f(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_N(x)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Задача коррекции расчетной динамической модели системы формулируется следующим образом: определить вектор переменных управления $x \in X$, который минимизирует максимальное значение критерия рассогласования, т. е. найти

$$\min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} \max_{i \in I} \left\{f_i(x)\right\}. \qquad (\mathrm{P}2)$$

Решением сформулированной дискретной минимаксной задачи $(\mathrm{P}2)$ является такой вектор $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)^{\mathrm{T}}$, принадлежащий множеству допустимых значений, при котором скалярная критериальная функция $f(x) = \max \left\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\right\}$ принимает минимальное значение. В случае, когда $f\left(x^*\right) = 0$, спектр частот настраиваемой модели полностью совпадает с заданным спектром по N низшим частотам. Последнее условие вследствие неполноты экспериментальных данных и погрешностей, полученных при измерениях, не выполняется. Ниже рассмотрена регуляризованная задача $(\mathrm{P}2)_\varepsilon$ с многоэкстремальной не всюду дифференцируемой критериальной функцией $f(x)$.

В обобщение постановок экстремальных задач $(\mathrm{P}1)_{\varepsilon h}$ и $(\mathrm{P}2)_\varepsilon$ сформулируем задачу глобальной оптимизации в виде

$$f\left(x^*\right) = \min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x), \qquad (15)$$

где

$$X = \left\{x \in D:\ g_i(x) \le 0,\ i \in I\ \right\}, \qquad (16)$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}^n:\ a_j \le x_j \le b_j,\ j \in J\right\}. \qquad (17)$$

Здесь $f(x)$ — целевая функция; x — вектор переменных управления; $g_i(x)$ — функции ограничений задачи, $i \in I$; $I = \{1, \ldots, m\}$ — конечное множество индексов; X — допустимая область; D — область поиска; x^* — глобальное решение; n — размерность задачи; $J = \{1, \ldots, n\}$; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное линейное пространство. Предположим, что функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in I$, задачи (15)—(17) —

непрерывные липшицевы функции. Кроме того, действительная функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является многоэкстремальной не всюду дифференцируемой и для нее задана вычислительная процедура, позволяющая определять значения функции в точках допустимой области. Необходимо также учесть возможную высокую трудоемкость вычисления критериальных функций, что может потребовать значительных вычислительных ресурсов.

Задачу коррекции модели и диагностирования системы можно сформулировать как задачу многокритериальной оптимизации. Пусть $\widehat{\zeta}_r$ и $\widehat{\varphi}^r \in \mathbb{R}^{N_0}$, $r=1,\ 2,\ ...,\ M_r$, представляют собой модальные данные для диагностируемой системы, полученные при измерениях: $\widehat{\zeta}_r$ — собственное значение, соответствующее r-й частоте собственных колебаний системы; $\widehat{\varphi}^r$ — вектор компонент собственной формы, полученный при измерениях с учетом N_0 степеней свободы; M_r — число наблюдаемых форм колебаний. Рассматриваются классы параметризованных моделей линейных систем, которые используют для моделирования динамического поведения систем. Далее через x обозначен вектор управляющих переменных модели, диагностируемой с использованием измеряемых модальных данных. Указанные переменные обычно связаны с геометрическими и механическими (физическими) характеристиками системы, а также с граничными условиями. Собственные характеристики аналитической модели (собственные значения $\zeta_r(x)$ и собственные векторы $\varphi^r(x)$) для текущего вектора управляющих переменных x получают в результате решения обобщенной задачи на собственные значения (прямая задача), имеющей вид

$$[K(x)-\zeta_r(x)M(x)]\varphi^r(x)=0, \qquad (18)$$

где $K(x)$ и $M(x)$ — глобальные матрицы жесткости и масс модели соответственно.

Цель иследований — определение такого вектора x переменных управления модели, при котором основные собственные характеристики $\zeta_r(x)$, $\varphi^r(x)$, полученные при решении прямой задачи (18), наилучшим образом (в некотором смысле) соответствуют модальным данным $\left\{\widehat{\zeta}_r,\ \widehat{\varphi}^r,\ r=1,\ 2,\ ...,\ M_r\right\}$, найденым экспериментально.

Используя данные вычислительных экспериментов, а также результаты измерений, можно сформировать следующие две критериальные функции:

$$f_1(x)=\frac{1}{M_r}\sum_{r=1}^{M_r}\left|\zeta_r(x)-\widehat{\zeta}_r\right|^2/\left|\widehat{\zeta}_r\right|^2, \qquad (19)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{M_r} \sum_{r=1}^{M_r} \| \varphi^r(x) - a_r \widehat{\varphi}^r \|^2 / \| \widehat{\varphi}^r \|^2, \tag{20}$$

где $a_r(x) = \left(\widehat{\varphi}^r(x)\right)^{\mathrm{T}} \widehat{\varphi}^r / \| \widehat{\varphi}^r \|$. Для решения задачи диагностирования системы с использованием модальных данных, полученных экспериментально, требуется одновременная минимизация критериальных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Таким образом, эта задача диагностирования связана с решением многокритериальной задачи оптимизации; при этом критериальные функции задачи определены в виде (19), (20).

Следует отметить, что минимизация только одного критерия ($f_1(x)$ или $f_2(x)$) связана, в свою очередь, с решением скалярной задачи оптимизации. В задачах такого типа необходимо в общем случае учитывать недифференцируемость и многоэкстремальность минимизируемых критериальных функций ввиду наличия кратных частот и неполноты информации, полученной при измерениях.

Пусть заданы функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, $x \in \mathbb{R}^n$, образующие векторный критерий $f(x) = \left(f_i(x), ..., f_m(x)\right)$ некоторой многокритериальной задачи оптимизации. Требуется найти

$$\min f(x) \tag{21}$$

при ограничениях

$$x \in X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; g_j(x) \le 0, \; j \in J \right\}, \tag{22}$$

где x — вектор переменных управления; $g_j(x)$ — функции ограничений; $J = \left\{ j \;\middle|\; j = 1, ..., k \right\}$. Задача векторной оптимизации (21), (22) сформулирована в предположении, что частные критерии и функции ограничений являются непрерывными не всюду дифференцируемыми функциями. В общем случае критериальные функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, векторной задачи оптимизации являются многоэкстремальными.

Методы решения прямой задачи. Основные собственные характеристики исследуемой механической системы определяются в результате решения обобщенной задачи на собственные значения (14). Обычно требуется найти не все, а только ограниченное число низших собственных пар. При решении задач средней сложности с симметрическими матрицами применяют, например, методы Ланцоша, Крона, итерации подпространства [18]. Так, метод итераций подпространства основан на использовании свойства собственных векторов, согласно которому они образуют B-ортонормальный базис p-мерного подпространства матричных операторов A и B. Это подпространство обозначают как E_∞. Начальное подпространство E_1 натянуто на линейно независимые векторы начального приближения, которые уточняются в процессе итераций до тех пор, пока не будет достигнуто приближение к подпространству E_∞ с достаточной точностью. Общее число требуемых итераций определяется тем, насколько начальное подпространство E_1 близко к подпространству E_∞. Следовательно, в данном методе процедура выбора начального подпространства имеет важное значение с точки зрения оценки эффективности решения. Можно отметить, что численная процедура на основе метода Ланцоша эффективна, если число векторов, образующих подпространство, существенно превышает число искомых собственных пар. Некоторые методы решения задач больших размерностей на собственные значения представлены в работах [19, 20].

Методы глобальной оптимизации. Детерминированные методы решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций к настоящему времени достаточно хорошо разработаны и широко применяются. Так, версия алгоритма TRUST [21] была реализована в работе [22] для диагностирования фазового состава теплоносителя в контуре сложной гидромеханической системы. Следует отметить, что эффективность детерминированных алгоритмов существенно ограничена их зависимостью от размерности задачи. В случае большого числа переменных применяют алгоритмы стохастической глобальной оптимизации. К ним относятся алгоритмы моделируемого отжига, генетические, управляемого случайного поиска и др. Вместе с тем чувствительность к выбору параметров алгоритмов этого типа, устанавливаемых пользователем или заданных в задаче, во многом определяет скорость сходимости итерационного процесса. Этого недостатка лишен алгоритм PCA [23] — один из наиболее мощных современных стохастических алгоритмов глобальной оптимизации. Существенным шагом алгоритма является сравнительная оценка качества решения, определяемого текущей и предшествующей конфигурацией системы. Пробное приближение принимается с определенной вероятностью, что исключает сходимость к локальному минимуму при поиске глобального решения. Алгоритм PCA удобен для реализации и может использоваться при решении как непрерывных, так и дискретных задач оптимизации. В работе [24] предложен более мощный алгоритм M-PCA. Работа современных стохастических алгоритмов PCA и M-PCA основана на использовании аналогии с физическими процессами абсорбции и рассеяния частиц при ядерных реакциях. В алгоритме PCA для исследования области поиска используется одна частица. На начальном шаге выбирается пробное решение (Old_Config), которое затем модифицируется посредством стохастического возмущения (Perturbation()), что позволяет найти новое решение (New_Config). С помощью функции Fitness() дается сравнительная оценка нового и предыдущего решений, на основании которой новое решение может быть принято или отвергнуто. Если новое решение отвергнуто, происходит переход к функции Scattering(), реализующей алгоритм Метрополиса. Для сканирования области, перспективной на минимум, применяются функции Perturbation() и Small_Perturbation(). Новое решение принимается, если оно лучше предыдущего (абсорбция); если найденное решение хуже предыдущего, происходит переход в отдаленную область пространства поиска (рассеяние), что позволяет преодолевать локальные минимумы. Эффективность описанного поиска глобального решения алгоритмом PCA может быть значительно повышена за счет одновременного использования большого числа частиц. Такой подход реализует алгоритм M-PCA, который непосредственно ориентирован на применение в среде параллельных вычислений. В отличие от алгоритма PCA в разработанном позднее алгоритме M-PCA используются одновременно несколько частиц для сканирования пространства поиска. Наилучшее решение определяется с учетом данных о всех частицах, участвующих в процессе. Единственным задаваемым параметром для алгоритма M-PCA является число итераций. При этом общее число итераций должно быть разделено на число частиц, используемых в решении, что приводит к значительной экономии компьютерного времени.

В целом применение стохастических алгоритмов глобальной оптимизации требует значительных вычислительных ресурсов. Одним из путей повышения эффективности таких алгоритмов является совершенствование процедуры локального поиска. В работе [25] представлен гибридный алгоритм MNPCA, объединяющий стохастический алгоритм PCA и детерминированный симплекс-метод Нелдера — Мида. Общий поиск в допустимой области проводится с помощью стохастического алгоритма, а при локальном поиске в перспективной на глобальный экстремум области — с помощью симплекс-метода. При этом не возникает необходимости вычисления призводных критериальных функций. На примере решения задачи оптимального проектирования ядерного реактора показана более высокая эффективность алгоритма MNPCA по сравнению с генетическим алгоритмом. Однако метод Нелдера — Мида не всегда обеспечивает сходимость к стационарной точке [26], что в целом снижает надежность алгоритма MNPCA.

В связи с этим предложен новый гибридный алгоритм PCALMS, построенный на основе алгоритма PCA в сочетании с детерминированным методом линеаризации [27] при локальном поиске. Градиентная информация, используемая в гибридном алгоритме, позволяет получить локально оптимальное, а следовательно, и глобальное решение задачи (если оно существует) при меньших вычислительных затратах по сравнению с алгоритмом PCA. При локальном поиске для многомерных не всюду дифференцируемых критериальных функций вводят двухпараметрические сглаживающие аппроксимации [28, 29]. В терминах сглаживающих аппроксимаций сформулированы необходимые условия оптимальности и доказана сходимость результирующего алгоритма к локальному минимуму. Следует отметить, что при решении задач большой размерности в фазе локального поиска можно непосредственно использовать методы недифференцируемой оптимизации [30].

Методы многокритериальной оптимизации. Для решения многих современных практических задач, связанных с идентификацией и диагностированием сложных систем, обеспечением безопасности, оптимальным проектированием, управлением, применяют методы многокритериальной оптимизации. При наличии нескольких критериев целью оптимизации является поиск множества недоминируемых решений, образующих оптимальный фронт Парето. В настоящее время значительное внимание уделяют разработке и реализации гибридных алгоритмов [31]. Перспективным является подход на основе одного из эффективных методов численного решения многокритериальных задач — векторного варианта метода линеаризации [32]. Существенно, что отдельные критерии могут представлять собой многоэкстремальные не всюду дифференцируемые функции. В общем случае поиск глобального решения для такой критериальной функции представляет собой самостоятельную сложную задачу. Этим обусловлена актуальность разработки гибридных алгоритмов решения задач векторной оптимизации с многоэкстремальными негладкими критериями. При локальном поиске для многомерных не всюду дифференцируемых критериальных функций вводят сглаживающие аппроксимации. Вместе с тем существует класс оптимизационных задач, в которых применение градиентной информации затруднено или требует значительных вычислительных затрат. Этим объясняется интерес к разработке алгоритмов, в которых не используются производные критериальные функции по переменным задачи оптимизации. Такой гибридный алгоритм построен на основе алгоритма Метрополиса в сочетании с детерминированным методом редукции исходной многомерной задачи к эквивалентной одномерной. Редукция размерности пространства проводится при локальном поиске с использованием метода построения кривой, заполняющей пространство, по схеме Пеано — Гильберта. Решение задач глобальной оптимизации для отдельных критериев позволяет определить множество недоминируемых решений многокритериальной задачи, аппроксимирующих искомый фронт Парето [33].

Версии гибридных алгоритмов многокритериальной оптимизации реализованы в виде прикладных программ. Программная реализация каждого алгоритма включает в себя: модули ввода исходной информации; модуль, реализующий основной цикл алгоритма, в том числе фазу случайных возмущений для перехода в новую область поглощения частицы, фазу исследования области поглощения, фазу возмущений в области рассеяния, фазу исследования решения в области рассеяния; модуль локального поиска методом редукции размерности; модуль вычисления текущего значения частного минимизируемого критерия; модуль формирования фронта Парето; модуль вывода результатов решения. Для определения параметров возмущения на соответствующих шагах гибридных алгоритмов используются стандартные встроенные генераторы случайных чисел. С целью получения оценки вычислительных затрат в программном обеспечении во всех случаях предусмотрены счетчики числа обращений к подпрограммам вычисления текущих значений критериальной функции. Проведено тестирование разработанного программного обеспечения и получены оценки вычислительной эффективности гибридных алгоритмов многокритериальной оптимизации.

Параллельные алгоритмы глобальной оптимизации. В последнее десятилетие наблюдается значительный рост сложности практических задач глобальной оптимизации, включая приложения к динамике систем. Как следствие, время решения экстремальных задач (вычислительная стоимость) также существенно возросло. Одним из путей преодоления возникших затруднений является разработка параллельных методов решения как прямых, так и оптимизационных задач, и их эффективная реализация в среде параллельных вычислений [34, 35]. Предложен новый параллельный гибридный алгоритм M-PCASFC, который объединяет стохастический алгоритм M-PCA, используемый при сканировании области поиска, и детерминированный метод кривой, заполняющей пространство, при локальном поиске [29]. Выбор метода редукции размерности задачи, который предназначен собственно для поиска глобального экстремума, обусловлен тем, что во многих случаях градиентные алгоритмы сходятся медленно, и в то же время при очень больших областях поиска метод редукции оказывается недостаточно эффективным. Гибридный алгоритм обеспечивает сужение области поиска, что повышает вычислительную эффективность метода. Для решения задачи липшицевой минимизации исходную многомерную задачу редуцируют к эквивалентной одномерной с использованием кривой Пеано, которую строят по схеме Гильберта. Кроме того, если исходная многомерная функция редуцируемой задачи удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой, минимизируемая одномерная функция удовлетворяет на единичном интервале условию Гельдера. Следует отметить, что построенная численными методами кривая аппроксимирует теоретическую кривую Пеано — Гильберта с точностью, определяемой заданной плотностью развертки. Метод редукции многомерных задач обладает рядом важных свойств, таких как непрерывность и сохранение равномерной ограниченности разностей функций при ограниченной вариации аргумента. К недостаткам можно отнести потерю части информации о близости точек в исходном многомерном пространстве. Предложенный подход не требует вычисления производных критериальных функций по переменным модели, что позволяет расширить применение гибридного алгоритма на класс задач глобальной недифференцируемой оптимизации.

Таким образом, представлены основные методы и новые алгоритмы решения задач скалярной и векторной оптимизации с многоэкстремальными негладкими критериями для механических и гидромеханических систем. При определении глобальных оптимумов частных критериев используются гибридные методы, объединяющие алгоритм Метрополиса и детерминированные методы локального поиска. Предложенный параллельный алгоритм M-PCASFC имеет преимущества при решении задач минимизации критериальных функций, в которых использование градиентной информации неэффективно или требует значительных вычислительных затрат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ по поддержке научных исследований ведущих научных школ РФ, код НШ-4748.2012.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pulecchi T., Casella F., Lovera M. Object-oriented modelling for spacecraft dynamics: Tools and applications // Simulation Modelling and Theory. 2010. Vol. 18. No 1. P. 63—86.
2. Viana F.A., Steffen J.V., Butkewitsch S., de Freitas L.M. Optimization of aircraft structural components by using nature-inspired algorithms and multi-fidelity approximations // Journal of Global Optimization. 2009. Vol. 45. No 3. P. 427—449.
3. Avramova M.N., Ivanov K.N. Verification, validation and uncertainty quantification in multi-physics modeling for nuclear reactor design and safety analysis // Progress in Nuclear Energy. 2008. Vol. 52. No. 4. P. 861—867.
4. Sacco W.F., Filho H.A., Henderson N., de Oliveira C.R.E. A Metropolis algorithm combined with Nelder-Mead Simplex applied to nuclear reactor core design // Annals of Nuclear Energy. 2008. Vol. 35. No. 5. P. 861—867.
5. Huijberts H., Michiels W., Nijmeijer H. Stabilizability via time-delayed feedback: An eigenvalue optimization approach // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2009. Vol. 8. No. 1. P. 1—20.
6. Bai Z.-J. Constructing of physical parameters of a damped vibrating system from eigendata // Linear Algebra and its Applications. 2008. Vol. 428. No. 2, 3. P. 625—656.
7. Göge D. Automatic updating of large aircraft models using experimental data from ground vibration testing // Aerospace Science and Technology. 2003. Vol. 7. No 1. P. 33—45.
8. Sinha J.K., Friswell M.I. The use of model updating for reliable finite element modelling and fault diagnosis of structural components used in nuclear plants // Nuclear Engineering and Design. 2003. Vol. 223. No. 1. P. 11—23.
9. Christodoulou K., Ntotsios E., Papadimitriou C., Panetsos P. Structural model updating and prediction variability using Pareto optimal models // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008. Vol. 198. No. 1. P. 138—149.
10. Jain K., Manghirmalani P., Dongardive J., Abraham S. Computational diagnosis of learning disability // International Journal of Resent Trends in Engineering. 2009. Vol. 2. No. 3. P. 64—66.

11. Zio E., Bazzo R. Multiobjective optimization of the inspection intervals of a nuclear safety system: a clustering-based framework for reducing the Pareto front // Annals of Nuclear Energy. 2010. Vol. 37. No. 1. P. 798—812.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
13. Li X.Y., Law S.S. Adaptive Tikhonov regularization for damage detection based on nonlinear model updating // Mechanics Systems and Signal Processing. 2010. Vol. 24. No. 8. P. 1646—1664.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы математического моделирования и вычислительной диагностики. М.: Изд-во Московского университета, 1990.
15. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
16. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
17. Myslinsky A. Bimodal optimal design of vibrating plates using theory and methods of nondifferentiable optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 1985. Vol. 46. No. 2. P. 187—203.
18. Golub G.H., van der Vorst H.A. Eigenvalue computation in the 20th century // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 123. No. 1, 2. P. 35—65.
19. Van der Vorst H.A. Computational methods for large eigenvalue problems // Handbook of Numerical Analysis. 2002. Vol. 8. P. 3—179.
20. Gao X.-B., Golub G.H., Liao L.-Z. Continuous methods for symmetric generalized eigenvalue problems // Linear Algebra and its Applications. 2008. Vol. 428. No. 2, 3. P. 676—696.
21. Cetin B.C., Barhen J., Burdic J.W. Terminal repeller unconstrained subenergy tunneling (TRUST) for global optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 1993. Vol. 77. No. 1. P. 97—126.
22. Kinelev V.G., Shkapov P.M., Sulimov V.D. Application of global optimization to VVER-1000 reactor diagnostics // Progress in Nuclear Energy. 2003. Vol. 43. No. 1—4. P. 51—56.
23. Sacco W.F., de Oliveira C.R.E. A new stochastic optimization algorithm based on particle collisions // Proceedings of the 2005 ANS Annual Meeting. Transactions of the American Nuclear Society, 2005. Vol. 92. P. 657—659.
24. Luz E.F.P., Becceneri J.C., de Campos Velho H.F. A new multiparticle collision algorithm for optimization in a high performance environment // Journal of Computational Interdisciplinary Sciences, 2008. Vol. 1. P. 3—10.
25. Sacco W.F., Filho H.A., Henderson N., de Oliveira C.R.E. A Metropolis algorithm combined with Nelder-Mead Simplex applied to nuclear reactor core design // Annals of Nuclear Energy. 2008. Vol. 35. No. 5. P. 861—867.
26. McKinnon K.I.M. Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a non-stationary point // SIAM Journal of Control and Optimization. 1999. Vol. 9. No. 2. P. 148—158.
27. Pshenichnyj B.N. The Linearization Method for Constrained Optimization. Berlin et al.: Springer-Verlag, 1994.
28. Сулимов В.Д. Локальная сглаживающая аппроксимация в гибридном алгоритме оптимизации гидромеханических систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2010. № 3. С. 3—14.
29. Сулимов В.Д. Гибридные алгоритмы оптимизации динамических характеристик гидромеханических систем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 324—326.
30. Karmitsa N., Mäkelä M.M. Limited memory bundle method for large bound constrained optimization: convergence analysis // Optimization Methods & Software. 2010. Vol. 25. No. 6. P. 895—916.

31. Gao J., Wang J. A hybrid quantum-inspired immune algorithm for multiobjective optimization // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 217. No. 5. P. 4754—4770.
32. Пшеничный Б.Н., Сосновский Р.Б. Метод линеаризации для решения многокритериальной задачи оптимизации // Кибернетика. 1987. № 6. С. 107—109.
33. Sulimov V.D., Shkapov P.M. Hybrid algorithms for multiobjective optimization of mechanical and hydromechanical systems // Journal of Mechanics Engineering and Automation. 2012. Vol. 2. No. 3. P. 190—196.
34. Auckenthaler T., Bungartz H.-J., Huckle T., Krämer L., Lang B., Willems P. Developing algorithms and software for the parallel solution of the symmetric eigenvalue problem // Journal of Computational Science. 2011. Vol. 2. No. 3. P. 272—278.
35. Olenšek J., Tuma T., Puhan J., Bürmen A. A new asynchronous parallel global optimization method based on simulated annealing and differential evolution // Applied Soft Computing. 2011. Vol. 11. No. 1. P. 1481—1489.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012