УДК 531.38

А. Н. Темнов, Ай Мин Вин

О ДВИЖЕНИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ ПОДВИЖНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поставлены задачи о малых движениях несжимаемой стратифицированной жидкости, полностью или частично заполняющей произвольную полость подвижного твердого тела и приведены решения для полостей эллиптической, сферической и цилиндрической форм.

E-mail: ayeminwin84@gmail.com

Ключевые слова*: *криогенная жидкость, обобщенные потенциалы, момент инерции.

Движение твердого тела, имеющего полость, полностью заполненную однородной несжимаемой жидкостью, исследовали многие ученые [1—4]. Вновь интерес к этой проблеме возник с развитием ракетно-космической техники, о чем свидетельствуют работы [5—8], посвященные движениям твердых тел, имеющих полости, частично заполненные однородной несжимаемой жидкостью.

Дальнейшее освоение космического пространства невозможно без создания орбитальных заправочных станций. Новая американская программа освоения космического пространства планирует доставку криогенного топлива на специально созданные орбитальные заправочные станции. Все криогенные жидкости характеризуются разнородностью плотности и температуры, наблюдаемой во всех режимах хранения и эксплуатации. В результате конвективного перемешивания в резервуаре с криогенной жидкостью образуется слой, в котором имеется значительной градиент плотности и температуры в вертикальном направлении. Такую криогенную жидкость в научной литературе обычно называют стратифицированной жидкостью.

В настоящей работе рассмотрены вопросы взаимодействия криогенной идеальной несжимаемой жидкости и полости подвижного твердого тела, совершающего малые движения. Показано, что гидродинамическое воздействие стратифицированной жидкости создается конечным числом парциальных движений жидкости в эллипсоидальной и сферической полостях, а в случае цилиндрической полости — счетным множеством парциальных движений, определяемых стратификацией жидкости.

Постановка задачи. Линейные уравнения возмущенного движения. Рассмотрим адиабатическое движение жидкости в полости твердого тела, совершающего движение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$ и ускорением $\boldsymbol{a}_0$. Известно [9], что движение идеальной жидкости в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко скрепленной с твердым телом, описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nabla U-\boldsymbol{a}_0-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}-\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r},$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\nabla\rho\cdot\boldsymbol{V}=0;\ \operatorname{div}\boldsymbol{V}=0 \text{ в области } \tau, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{на границе } S.$$

Здесь $\boldsymbol{V}$ — скорость частиц жидкости; ρ — плотность; p — давление; U — потенциал массовых сил; $\boldsymbol{r}=\{x_1, x_2, x_3\}$; $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к смачиваемой поверхности; S — граница области τ, занимаемой жидкостью.

За невозмущенное движение твердого тела принимем движение, характеризуемое постоянными скоростью $\boldsymbol{V}_0$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0=\omega_0\boldsymbol{l}_3$ относительно оси Ox_3. Параметры невозмущенного состояния жидкости $(\boldsymbol{p}_0, \rho_0, \boldsymbol{V}_0, U_0)$ удовлетворяют условиям механического равновесия:

$$\boldsymbol{V}_0=0, \quad \frac{1}{\rho}\nabla p_0=\nabla\left[U_0+\frac{\omega_0^2\left(x_1^2+x_2^2\right)}{2}\right].$$

Пусть в возмущенном движении твердое тело приобретает добавочную мгновенную угловую скорость $\Omega(t)$ и ускорение $\boldsymbol{W}_0$, а жидкость — добавочные поля скоростей $\boldsymbol{V}'$, давления и плотностей ρ'. Считая $\boldsymbol{V}'$, p', ρ', $\boldsymbol{W}_0$, $\Omega(t)$ — величинами первого порядка малости, из выражения (1) получаем следующие уравнения возмущенного движения жидкости в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\boldsymbol{V}'}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{V}'+\nabla p-\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0}\nabla\Pi_0=-\frac{\partial\Omega}{\partial t}\times\boldsymbol{r},\\ \frac{\partial\rho'}{\partial t}+\nabla\rho_0\cdot\boldsymbol{V}'=0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{V}'=0,\ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\Pi_0=U_0+\frac{1}{2}\omega_0^2\left(x_1^2+x_2^2\right)$; ∇p — приведенное давление жидкости,

$$\nabla p=\frac{1}{\rho_0}\nabla p'-\nabla S_1-\nabla U',\ S_1=\omega_0\Omega_3\left(x_1^2+x_2^2\right)-\omega_0\Omega_1x_3x_1-\omega_0\Omega_2x_3x_2$$

(U' — изменение потенциала массовых сил, выраженное в системе координат $Ox_1x_2x_3$).

Формулировка краевой задачи. Для описания вихревого движения вращающейся однородной жидкости обычно используют метод функций состояния, разработанный С.Л. Соболевым [10, 11] либо метод обобщенных потенциалов, предложенный Ф.Л. Черноусько [5]. Однако развитие метода функций состояния на случай неоднородной жидкости с произвольным изменением плотности связано со значительными трудностями. Метод обобщенных потенциалов, основанный на некотором ограничении на изменения переменных от времени, в этом смысле является более приемлемым. Этот метод позволяет наиболее полным образом выделить гидродинамическую задачу из общей задачи механики системы тело—жидкость. Рассмотрим распространение этого метода на случай неоднородной жидкости.

Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально $e^{\lambda t}$, где λ — комплексное число. Тогда уравнения (2) принимают вид

$$\lambda \boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{V} + \nabla p - \frac{1}{\rho_0}\rho\nabla\Pi_0 = \lambda\Omega\times\boldsymbol{r},$$
$$\lambda\rho = -\nabla\rho_0\cdot\boldsymbol{V},\ \nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0 \ \text{ в области } \tau, \tag{3}$$
$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \ \text{ на границе } \boldsymbol{S}.$$

В уравнении (3) и далее штрих опущен. Умножим первое уравнение в выражении (3) на параметр λ и, используя второе уравнение, запишем его в виде

$$A(\lambda)\cdot\boldsymbol{V} = -\lambda g. \tag{4}$$

Здесь тензор-оператор $A(\lambda)$ есть сумма тензоров:

$$A(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda K + N^2,\ \ g = \nabla p + \lambda\Omega\times\boldsymbol{r},$$

где I — единичный тензор; K — гироскопический тензор,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -2\omega_0 & 0 \\ 2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

N^2 – тензор плавучести [12],

$$N^2 = \frac{1}{\rho_0}\nabla\Pi_0\nabla\rho_0;\ N^2 = \boldsymbol{l}_1\boldsymbol{N}_1^2 + \boldsymbol{l}_2\boldsymbol{N}_2^2 + \boldsymbol{l}_3\boldsymbol{N}_3^2;\ \boldsymbol{N}_{ij}^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial x_i}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_j}. \tag{5}$$

Диагональные элементы $N_{11}^2(r), N_{22}^2(r), N_{33}^2(r)$ тензора плавучести определяют собственные частоты колебаний отдельной частицы неоднородной жидкости в направлениях, параллельных осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно.

Отметим, что для слабонеоднородной жидкости $(N^2 \ll 1)$ вместо выражений (5) можно воспользоваться приближенными соотношениями

$$N^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 \nabla \rho_0, \; N_{ij}^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j},$$

где ρ_0^* — некоторое усредненное значение плотности. Тензор плавучести обобщает понятия вектора плавучести $\boldsymbol{N}_3^2$ [5] и частоты плавучести (частоты Вяйсяля) $\boldsymbol{N}_3^2(x_3)$ [13].

Представим однородное уравнение (4) в виде

$$\left(\lambda^2 I + \lambda K + N^2\right) \boldsymbol{V} = 0.$$

Значения λ, при которых $\det \mathrm{A}(\lambda) = 0$ и существуют векторы $\boldsymbol{V} \in \det A(\lambda)$, определяют диапазон частот колебаний идеальной неоднородной вращающейся жидкости в неподвижной полностью заполненной полости. Уравнение $\det A(\lambda) = 0$ или

$$\lambda^2 \left[\lambda^4 + \lambda^2 (N^2 + 4\omega_0^2) + N_{33}^2 4\omega_0^2 \right] = 0 \tag{6}$$

имеет следующие корни:

$$\lambda_1^2 = 0, \; \lambda_{2,3}^2 = -\frac{N^2 + 4\omega_0^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(N^2 + 4\omega_0^2\right)^2}{4} - N_{33}^2 4\omega_0^2}, \tag{7}$$

где $N^2 = N_\Gamma^2 + N_{33}^2 \; \left(N_\Gamma^2 = N_{11}^2 + N_{22}^2\right)$.

При $N^2 = 0$ (однородная вращающаяся жидкость) получаем [5, 10, 11]:

$$\mathrm{Re}\, \lambda = 0, \; |\lambda| \subset \left[0; \, 2\omega_0\right],$$

т. е. все частоты колебаний лежат на отрезке мнимой оси.

Для невращающейся стратифицированной вдоль оси Ox_3 жидкости получаем [13]

$$\mathrm{Re}\, \lambda = 0, \; |\lambda| \subset \left[0; \, N_{33}^0\right], \; N_{33}^0 = \max N_{33}\left(x_3\right), \; N_{33}^2 = -g \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_3}. \tag{8}$$

Согласно соотношениям (7), для невращающейся идеальной неоднородной жидкости (см. (8)) все частоты колебаний образуют множество

$$\mathrm{Re}\, \lambda = 0, \; |\lambda| \subset \left[0; N^0\right], \; N^0 = \max N^0(\boldsymbol{r}), \; N_{ij}^2 = +\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_j},$$

а для вращающейся стратифицированной в плоскости Ox_1x_2 жидкости

$$\operatorname{Re}\lambda = 0,\ \ |\lambda| \in \left[0;\ \sqrt{\left(N_{\Gamma}^{0}\right)^{2} + 4\omega_0^2}\right],\ \ N_{\Gamma}^{0} = \max N_{\Gamma}\left(x_1,\ x_2\right).$$

Предположим, что λ не является корнем уравнения (6) и не совпадает ни с одной из собственных частот колебаний жидкости. Используя свойства тензора N^2, выразим из уравнения (4) вектор $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V} = -\frac{\lambda}{\det A(\lambda)} L \cdot g, \tag{9}$$

где тензор

$$L =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\left(\lambda^2 + N_{22}^2 + N_{33}^2\right) & -\lambda N_{12}^2 + 2\omega_0\left(\lambda^2 + N_{33}^2\right) & -(2\omega_0 N_{23}^2 + \lambda N_{13}^2) \\ -\left[\lambda N_{12}^2 + 2\omega_0\left(\lambda^2 + N_{33}^2\right)\right] & \lambda\left(\lambda^2 + N_{11}^2 + N_{33}^2\right) & 2\omega_0 N_{13}^2 - \lambda N_{23}^2 \\ -\lambda N_{13}^2 + 2\omega_0 N_{33}^2 & -(\lambda N_{23}^2 + 2\omega_0 N_{13}^2) & \lambda\left(\lambda^2 + N_{\Gamma}^2 + 4\omega_0^2\right) \end{pmatrix}$$

осуществляет линейное преобразование и обладает очевидными свойствами:

$$L^{\mathrm{T}}(\lambda) = -L(-\lambda),\ \ \boldsymbol{a}\cdot(L\cdot\boldsymbol{b}) = (L^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b},$$

L^{T} — тензор, сопряженный с тензором L; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы.

С помощью преобразования (9), уравнение неразрывности и граничные условия (3) запишем в виде краевой задачи:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\left\{\frac{\lambda}{\det A\left(\lambda\right)} L\cdot\boldsymbol{g}\right\} = 0 \ \text{ в области } \tau, \\ \boldsymbol{n}\cdot\left(L\cdot\boldsymbol{g}\right) = 0 \,\text{на границе } S,\ g = \lambda\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} + \nabla p. \end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, в рассматриваемом общем случае удается свести гидродинамическую задачу (3) к краевой задаче математической физики для функции p. Используя решение задачи (10), поле скоростей неоднородной жидкости можно найти по формуле (9). Следуя работе [5], решение задачи (10) представим в виде

$$p = -\lambda\sum_{j=1}^{3}\Omega_j\varphi_j,\ \ \boldsymbol{V} = \frac{\lambda^2}{\det A\left(\lambda\right)}\sum_{j=1}^{3}\Omega_j L\left(\nabla\varphi_j - \boldsymbol{l}_j\times\boldsymbol{r}\right).$$

Тогда краевая задача (10) принимает вид

$$\operatorname{div}\left\{\frac{\lambda}{\det A\left(\lambda\right)}\left[L\left(\nabla\varphi_j - \boldsymbol{l}_j\times\boldsymbol{r}\right)\right]\right\} = 0 \text{ в области } \tau,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left[L\left(\nabla\varphi_j-\boldsymbol{l}_j\times\boldsymbol{r}\right)\right]=0 \text{ на границе } S. \tag{12}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что при $N_{ij}^2=0$ краевая задача (11), (12) совпадает с краевой задачей для однородной вращающейся жидкости, а функции φ_j преобразуются в обобщенные потенциалы Черноусько. При $N_{ij}=\omega_0=0$ оператор L становится единичным и функции φ_j будут являться потенциалами Жуковского [1]. Соблюдая терминологию, сложившуюся в работах по вращающейся жидкости, будем называть функции φ_j задачи (11), (12) обобщенными потенциалами движения неоднородной $(\omega_0=0)$ или вращающейся неоднородной $(\omega_0\neq 0)$ жидкости.

Определим обобщенные потенциалы движения и оценим влияние неоднородной жидкости на движение системы тело—жидкость при действии однородного силового поля с потенциалом $U_0=-gx_3$.

Вращающаяся эллипсоидальная полость. Пусть твердое тело с эллипсоидальной полостью вращается вокруг неподвижной точки O, находящейся на расстоянии c от геометрического центра полости и лежащей на оси Ox_3 . Предположим, что угловая скорость вращения $(\omega_0=\text{const})$ в невозмущенном движении удовлетворяет условию $\omega_0^2\dfrac{l}{g}\ll 1$ (l — характерный размер) и, следовательно, можно считать, что $\Pi_0=U_0$. Эллипсоидальная полость целиком заполнена неоднородной вращающейся жидкостью, плотность, которой в невозмущенном движении изменяется в соответствии с законом $\rho_0=\rho_0^*(1-\beta x_3)$. Краевые задачи для определения функций φ_j в условиях двойного приближения Буссинеска [5] принимают вид

$$\Delta\varphi_j+\sigma^2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_3^2}=2\chi\delta_{j3},\ j=1,\,2,\,3, \tag{13}$$

$$\left[L\left(\nabla\varphi_j-\boldsymbol{l}_j\times\boldsymbol{r}\right)\right]=0 \text{ на границе } S, \tag{14}$$

где

$$L=\begin{vmatrix}1 & \chi & 0\\ -\chi & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1+\chi^2}{N^2+\lambda^2}\end{vmatrix};\quad \sigma^2=\frac{4\omega_0^2-N^2}{N^2+\lambda^2};\quad N^2=-\frac{g}{\rho_0^*}\frac{d\rho_0}{dx_3};\quad \chi=\frac{2\omega_0}{\lambda},$$

δ_{j3} — символ Кронекера.

Запишем уравнение поверхности эллипсоида в системе координат $Ox_1x_2x_3$ следующим образом:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{\left(x_3+c\right)^2}{a_3^2}=1. \tag{15}$$

Функции φ_j будем искать в виде

$$\varphi_1=\left(b_{11}x_1+b_{12}x_2\right)x_3+b_{13}x_1+b_{14}x_2,\ j=1,$$

$$\varphi_2=\left(b_{21}x_1+b_{22}x_2\right)x_3+b_{23}x_1+b_{24}x_2,\ j=2,$$

$$\varphi_3=b_{31}x_1^2+b_{32}x_2^2+b_{33}x_1x_2,\ j=3,$$

где b_{jk} — неизвестные постоянные, определяемые граничными условиями (14). Отметим, что уравнение (13) выполняется при этом тождественно для j = 1, 2 при любых значениях коэффициентов b_{jk}. Подставим теперь функции φ_j в соотношение (14), учитывая выражения (15) для нормалей к поверхности. Найдем из соотношения (14) однородные многочлены второй и первой степеней относительно координат x_1, x_2, x_3, с помощью которых получим уравнения для определения коэффициентов:

$$b_{32}=\frac{\chi a_1^2}{a_1^2+a_2^2},\ b_{33}=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2},\ b_{31}=\frac{\chi a_2^2}{a_1^2+a_2^2},$$

$$b_{11}=-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_1^2a_3^2},\ b_{12}=\frac{1}{\Delta^*}\frac{a_3^2\left(a_2^2s^2-a_3^2\right)+a_1^2s^2\left(a_2^2s^2-a_3^2\right)}{a_1^2a_2^2a_3^4},$$

$$b_{13}=-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_1^2a_3^2}c,\ b_{14}=\frac{2s^2\left(l^2a_1^2+a_3^2\right)}{\Delta^* a_1^2a_3^4}c,$$

$$b_{21}=\frac{1}{\Delta^*}\frac{a_3^2\left(a_1^2s^2+a_3^2\right)-a_1^2s^2\left(a_2^2l^2+a_3^2\right)}{a_1^2a_2^2a_3^4},\ b_{22}=-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_2^2a_3^2},$$

$$b_{24}=-\frac{2\chi s^2}{\Delta^* a_2^2a_3^2}c,\ b_{23}=-\frac{2s^2\left(l^2a_2^2+a_3^2\right)}{\Delta^* a_2^2a_3^4}c,$$

$$\Delta^*=\frac{a_3^2\left(a_3^2+a_2^2s^2\right)+a_1^2s^2\left(a_3^2+a_2^2l^2\right)}{a_1^2a_2^2a_3^4},\ s^2=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+N^2}.$$

Используя коэффициенты b_{ij}, выражения для величин φ_j, p и $\boldsymbol{V}$, определим давление и поле скоростей жидкости при возмущенном движении твердого тела относительно равномерного вращения. Отметим, что выражение для φ_3 совпадает с соответствующим выражением для вращающейся однородной жидкости. Этого, очевидно, и стоило ожидать, так как плотность жидкости в плоскости, перпендикулярной оси вращения, в рассматриваемом примере остается постоянной. При $\omega_0 = 0$ функции φ_j описывают движение стратифицированной жидкости в эллипсоидальной полости подвижного твердого тела. При $\omega_0 = N = 0$ функции φ_j преобразуются в потенциалы Жуковского для эллипсоидальной полости, геометрический центр которой не совпадает с началом координат Ox_1, x_2, x_3. Из вида функции φ_j ясно, что коэффициенты b_{jk} обращаются в бесконечность при $\Delta^* = 0$. Последнее равенство определяет собственные частоты стратифицированной вращающейся жидкости, которым отвечают парциальные движения жидкости, возбуждаемые движением твердого тела.

Чтобы получить некоторые результаты, сравнимые с имеющимися для однородной жидкости, предположим, что оболочка твердого тела достаточно тонкая и можно пренебречь ее массой, а вращение всей системы происходит относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс неоднородной жидкости. Тогда величину c можно интерпретировать как расстояние от геометрического центра полости до центра масс неоднородной жидкости в невозмущенном состоянии. В то же время для полости с однородной жидкостью под величиной c можно понимать расстояние от геометрического центра полости (или центра масс однородной жидкости) до неподвижной точки, относительно которой вращается безынерционная оболочка с однородной жидкостью. При значении $c = 0$ имеем вращение системы с неоднородной жидкостью вокруг неподвижной точки, являющейся одновременно геометрическим центром полости.

Вычислим силу и момент, действующие со стороны жидкости на оболочку:

$$\bar{F} = \rho_0^* \int_\tau \nabla p \, d\tau, \ \bar{M} = \rho_0^* \int_\tau \boldsymbol{r} \times \nabla p \, d\tau.$$

После подстановки в функции p функций φ_j и элементарных вычислений в проекции на оси получаем

$$F_1 = \bar{m}\left(-b_{21}c + b_{23}\right)\Omega_2, \ \bar{m} = \frac{m}{\rho_0^*},$$

$$F_2 = \overline{m}\left(-b_{12}c + b_{14}\right)\Omega_1,\;\; F_3 = 0,\;\; M_3 = \frac{b_{33}}{5}\Omega_3\left(a_1^2 - a_2^2\right)V_{\text{эл}},$$

$$M_1 = \left(\frac{b_{12}}{5}\Omega_1 + \frac{b_{22}}{5}\Omega_2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)V_{\text{эл}} - cV_{\text{эл}}\left(\Omega_1 b_{14} + \Omega_2 b_{24}\right),$$

$$M_2 = \left(\frac{b_{11}}{5}\Omega_1 + \frac{b_{21}}{5}\Omega_2\right)\left(a_3^2 - a_1^2\right)V_{\text{эл}} + cV_{\text{эл}}\left(\Omega_1 b_{13} + \Omega_2 b_{23}\right).$$

Рассмотрим случай сферической полости, полагая $a_1 = a_2 = = a_3 = a$. Для шаровой полости

$$\boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_c,\; \boldsymbol{r}_c = c\boldsymbol{l}_3, M_3 = 0,$$

$$M_1 = -mc^2\left[\dot{\Omega}_1 \frac{4\lambda^4 + 2\lambda^2 N^2 + 8\omega_0^2\lambda^2}{\left(2\lambda^2 + N^2\right)^2 + 4\omega_0^2\lambda^2} - \dot{\Omega}_2 \frac{\left(\lambda^2 + N^2\right)4\omega_0\lambda}{\left(2\lambda^2 + N^2\right)^2 + 4\omega_0^2\lambda^2}\right],$$

$$M_2 = mc^2\left[\dot{\Omega}_1 \frac{\left(\lambda^2 + N^2\right)4\omega_0\lambda}{\left(2\lambda^2 + N^2\right)^2 + 4\omega_0^2\lambda^2} + \dot{\Omega}_2 \frac{4\lambda^4 + 2\lambda^2 N^2 + 8\omega_0^2\lambda^2}{\left(2\lambda^2 + N^2\right)^2 + 4\omega_0^2\lambda^2}\right]. \tag{16}$$

При $N = 0,\; \omega_0 = 0$ имеем случай безвихревого движения однородной жидкости в сферической полости, тогда

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}_0,\;\; M_1 = -mc^2\dot{\Omega}_1,\;\; M_2 = -mc^2\dot{\Omega}_2,$$

т. е. движение твердого тела не влияет на безвихревое движение жидкости. Влияние жидкости в этом случае подобно влиянию добавочного твердого тела с массой, равной массе жидкости, т. е. сводится лишь к увеличению соответствующих моментов инерции твердого тела. Это совпадает с результатами, полученными в работе [14]. При $c = 0$ имеем $F = M = 0$.

Теперь пусть $N = 0,\; \omega_0 \neq 0$ — случай вращающейся однородной жидкости. Положив $\lambda = j\beta$ и введя комплексные величины $M = M_1 + jM_2,\; \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_1 + j\dot{\Omega}_2,$ получим

$$M_1 = -mc^2\left(1 + \omega_0\left(\sigma + \omega_0\right)^{-1}\right)\dot{\Omega}.$$

Откуда следует, что влияние жидкости и в этом случае сводится лишь к количественному изменению моментов инерции несущего тела, хотя и зависит от числа σ. При совпадении неподвижной точки с центром масс однородной жидкости снова получаем $F = M = 0,$ что также совпадает с результатами работ [5, 15].

Рассмотрим случай, когда $N \neq 0, \omega_0 = 0.$ Практически этот случай может быть осуществим при раскрутке больших емкостей жидкости, когда основная масса жидкости находится еще в незакрученном состоянии. Из формул (16) имеем

$$M_1 = -mc^2 \left(1 + N^2 \left(2\sigma^2 - N^2\right)^{-1}\right)\dot{\Omega}. \tag{17}$$

Согласно выражению (17), следует, что $M \to \infty$ при $\sigma^2 \to 0,5N^2$, где $0,5N^2$ — квадрат собственной частоты колебаний стратифицированной жидкости в неподвижной сферической полости. Следовательно, движение оболочки в этом случае индуцирует единственное парциальное движение жидкости. Движение жидкости создает совокупность сил гидродинамического воздействия, момент которых может повлиять на движение всей системы. Используя комплексные переменные M, $\dot{\Omega}$, перепишем равенства (16) в виде

$$M_1 = -mc^2\dot{\Omega}_1 \left[1 + \frac{4\omega_0\sigma^2\left(\sigma - \omega_0\right) + N^2\left(2\sigma^2 - N^2\right) - 4\sigma\omega_0 N^2}{\left(\sigma^2 - \sigma_1^2\right)\left(\sigma^2 - \sigma_2^2\right)}\right], \tag{18}$$

где σ^2, σ_2^2 — корни уравнения

$$\left(2\sigma^2 - N^2\right)^2 - 4\omega_0^2\sigma^2 = 0, \tag{19}$$

определяющие собственные частоты вращающейся стратифицированной жидкости в неподвижной сферической полости, которым соответствуют парциальные движения, возбуждаемые движением твердого тела. При $N \neq 0,\ \omega_0 \neq 0$ из уравнения (19) следует, что число таких парциальных движений равно двум.

Анализируя уравнение, аналогичное (19) для общего случая $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ (эллипсоид), приходим к выводу, что число парциальных движений, возбуждаемых движением оболочки, также равно двум.

Таким образом, наличие устойчивой стратификации приводит к росту конечного числа рассматриваемых парциальных движений вращающейся жидкости. Для эллипсоидальной полости число движений увеличивается на единицу, для шаровой — на две единицы по сравнению с соответствующими движениями вращающейся однородной жидкости [15].

Положим в формуле (18) значение $c = 0.$ Это означает, что неподвижная точка совпадает с геометрическим центром сферической полости и $F = M = 0.$ Движение неоднородной жидкости в этом случае не влияет на движение твердого тела, и уравнения движения системы оказываются «развязанными» [16]. Влияние жидкости сказывается только на изменении реакции неподвижной точки.

Движение жидкости в цилиндрической полости. Пусть твердое тело, имеющее коаксиальную цилиндрическую полость, частично заполненную стратифицированной жидкостью, высотой $2h$ движется в невозмущенном состоянии параллельно вектору градиента массовых и инерционных сил, обладающих суммарно-потенциальной функцией $U_0 = -JX_5$. В невозмущенном движении свободная поверхность жидкости перпендикулярна вектору ∇U_0, и плотность жидкости в невозмущенном движении изменяется по закону $\rho_0 = \rho_0^*\left(1-\beta x_3\right)$. Определим сначала движение жидкости в цилиндрической полости при возмущенном движении твердого тела. Затем оценим влияние подвижной жидкости на инерционные характеристики системы тело—жидкость. Пусть в возмущенном движении твердое тело вращается с угловой скоростью Ω вокруг неподвижной точки O, находящейся на расстоянии c от середины столба невозмущенной жидкости в цилиндре.

Краевые задачи для определения обобщенных потенциалов неоднородной жидкости в системе координат $Ox_1y_1z_1$ имеют вид

$$\Delta_2\varphi_j + s^2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_1^2} = 0 \text{ в области } \tau,\ \boldsymbol{n}\cdot\Big(L\cdot\big(\Delta\varphi_j - \boldsymbol{l}_j\times\boldsymbol{r}\big)\Big) = 0 \text{ на границе } S, \tag{20}$$

где

$$s^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+N^2},\ N^2 = -\frac{1}{\rho_0^*}\frac{d\rho_0}{dx_3}g;\ L = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{Bmatrix},$$

а граничное условие на свободной невозмущенной поверхности Σ, т. е. при $x_3 = c+h$, запишем как

$$\frac{N^2+\lambda^2}{\mathrm{g}}\varphi_j + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_3} - \boldsymbol{l}_3\left(\boldsymbol{l}_j\times\boldsymbol{r}\right) = 0. \tag{21}$$

Найдем обобщенный потенциал в виде

$$\varphi_1 = F_1\left(r,\ \eta,\ x_3\right) - x_3 r\sin\eta,$$

где функция $F_1\left(r,\ \eta,\ x_3\right)$ — решение следующей задачи:

$$\Delta F_1 - \frac{N^2}{N^2+\lambda^2}\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_0,\ r = \gamma r_0,\ \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right|_{x_3 = c-h} = 2r\sin\eta,$$

$$\frac{N^2+\lambda^2}{\mathrm{g}} F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{N^2+\lambda^2}{\mathrm{g}} x_3 r \sin\eta + 2r\ \sin\eta \text{ на поверхности } \sum.$$

Определив функцию $F_1(r,\ \eta,\ x_3)$, запишем обобщенный потенциал $\varphi_1 = (x_3,\ r,\ \eta,\ \lambda)$ как

$$\varphi_1 = ie^{i\eta} r_0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n R(r) \frac{1}{\Delta} \times$$

$$\times \left\{ \frac{N^2+\lambda^2}{g} \left[\frac{2}{\mu} \mathrm{sh}\mu_n (c+h-x_3) - (h+c) ch\mu_n (c-h-x_3) \right] + \right.$$

$$\left. + 4\,\mathrm{sh}\,\mu_n h \mathrm{sh}\,\mu_n (c-x_3) \right\} - x_3 r \sin\eta,$$

где $\Delta = \frac{N^2+\lambda^2}{g} \mathrm{ch}\,\mu_n 2h + \mu_n\,\mathrm{sh}\,\mu_n 2h,\ \ \mu_n^2 = \frac{K_n^2}{s^2}.$

Перейдем к определению обобщенного потенциала φ_2. Функцию φ_2 будем искать в виде

$$\varphi_2 = F_2(x_3,\ r,\ \eta,\ \lambda) + x_3 r \sin\eta.$$

Нахождение функции $F_2(x_3,\ r,\ \eta,\ \lambda)$ вполне идентично определению функции F_1, т. е. можно записать

$$F_2(x_3, r,\ \eta,\ \lambda) = -iF_1(x_3,\ r,\ \eta,\ \lambda).$$

Обобщенный потенциал φ_3 для рассматриваемой полости равен нулю. Это означает, что при вращении твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью симметрии полости, неоднородная идеальная жидкость с рассматриваемым законом плотности не вовлекается в движение.

При вращении твердого тела вокруг осей, перпендикулярных оси симметрии полости, жидкость придет в движение, которое можно описать с помощью обобщенных потенциалов φ_1, φ_2. Из вида функций φ_1, φ_2 следует, что при таком движении твердого тела в жидкости возбуждаются также парциальные движения, которым соответствуют все формы колебаний жидкости в неподвижной полости, за исключением форм колебаний, соответствующих числам $m = 2, 3, 4$ и т. д.

Теперь определим качественное влияние движения жидкости на инерционные характеристики системы тело — жидкость. Для этого достаточно вычислить момент инерции жидкости I_1 при вращении твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью x_1. Расчет проведем для частного случая, когда $j=1$ и ось вращения твердого тела лежит в плоскости невозмущенной свободной поверхности $c=-h$. Чтобы получить результат, сравнимый с известным для однородной жидкости, воспользуемся многозначностью разложения движения жидкости со свободной поверхностью на элементарные составляющие. Это означает, что можно подобрать бесконечное множество комбинаций из гиперболических функций, удовлетворяющих граничным условиям и уравнению (21).

Момент инерции

$$I_1 = I_{11} + iI_{12}.$$

Моменты инерции I_{jk} рассчитаем по следующей формуле [5]:

$$I_{jk} = \rho_0 \int_Q \left(l_j \times r\right)\left[L\left(\nabla \varphi_k - l_k \times r\right)\right] dQ.$$

Вычислив интегралы и воспользовавшись соотношениями для чисел ξ_n, получим

$$I_1 = mr_0^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2} \times$$

$$\times \left[\frac{8r_0}{h}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2+N^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{th}\mu_n h}{\xi_n^3\left(\xi_n^2-1\right)} - 1 + \frac{2r_0}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}\mu_n 2h - 1}{\xi_n^2\left(\xi_n^2-1\right)\mathrm{ch}\mu_n 2h} \frac{\dot{\chi}_n}{\Omega_1}\right],$$

$$m = \pi r_0^2 2h \rho_0^H,$$

где $\dot{\chi}_n$ — обобщенная координата волновых движений свободной поверхности жидкости в связанной системе координат.

С учетом высоты заполнения H при $N^2 = 0$ выражение для I_1 совпадает по виду с соответствующим выражением для разности между эффективным моментом инерции [17] и моментом инерции «затвердевшей» жидкости [6]. Однако в рассматриваемом случае по смыслу параметр χ_n отличается от соответствующего параметра χ_n^k [6]. При таком подходе к решению подобной задачи для однородной жидкости это различие обусловлено разными системами координат, выбранными для описания движения жидкости. В работе [6] была использована абсолютная система координат, в настоящей работе — связанная система. Для движений однородной жидкости количественное различие между обобщенными координатами χ_n и χ_n^k определяется следующей формулой:

$$\chi_n^k = \chi_n + a\vartheta, \quad a = r_0\left(\lambda^2 r \mathrm{g}^{-1} + \xi_n \operatorname{th} k_n 2h\right)^{-1}.$$

Получим формулы для вычисления значений I_1. Для этого положим $\lambda = j\sigma.$ Тогда при $\sigma^2 > N^2$ имеем

$$\overline{I}_1 = \frac{I_1}{mr_0^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}\left(8\frac{r_0}{h}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\left(\xi_n \dfrac{h}{r_0}\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}\right)}{\xi_n^3\left(\xi_n^2 - 1\right)} -$$

$$-1 + \frac{2r_0}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(\xi_n \dfrac{2h}{r_0}\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}} - 1\right)}{\xi_n^2\left(\xi_n^2 - 1\right)\operatorname{ch}\left(\xi_n \dfrac{2h}{r_0}\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}\right)}\frac{\chi_n}{\Omega_1}, \tag{22}$$

где

$$\frac{\chi_n}{\Omega_1} = \frac{\left(\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\mathrm{g}}\right)r_0 \dfrac{2}{\xi_n}\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}}\operatorname{th}\left(\xi_n \dfrac{h}{r_0}\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}\right)}{\left(\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\mathrm{g}}\right)r_0 + \dfrac{\xi_n\sqrt{\sigma^2 - N^2}}{\sigma} - \operatorname{th}\left(\xi_n \dfrac{2h}{r_0}\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}\right)};$$

при $\sigma^2 < N^2$;

$$\overline{I}_1 = \frac{I_1}{mr_0^2} = \frac{\sigma^2}{N^2 - \sigma^2}\left(8\frac{r_0}{h}\sqrt{\frac{\sigma^2}{N^2 - \sigma^2}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\left(\xi_n \dfrac{h}{r_0}\sqrt{\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}\right)}{\xi_n^3\left(\xi_n^2 - 1\right)} +$$

$$+ 1 + \frac{2r_0}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\xi_n \dfrac{2h}{r_0}\sqrt{\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}} - 1\right)}{\xi_n^2\left(\xi_n^2 - 1\right)\cos\left(\xi_n \dfrac{2h}{r_0}\sqrt{\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}\right)}\frac{\chi_n}{\Omega_1}, \tag{23}$$

где

$$\frac{\chi_n}{\Omega_1} = \frac{\left(\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\mathrm{g}}\right)r_0 \dfrac{2}{\xi_n}\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}}\operatorname{tg}\left(\xi_n \dfrac{h}{r_0}\sqrt{\dfrac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2}}\right)}{\left(\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\mathrm{g}}\right)r_0 - \dfrac{\xi_n\sqrt{N^2 - \sigma^2}}{\sigma} - \operatorname{tg}\left(\xi_n \dfrac{2h}{r_0}\sqrt{\dfrac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2}}\right)}.$$

Из формулы (22) следует, что при $\sigma^2 > N^2$, особенно для значений h, при которых $\operatorname{th}(k_n h) \approx 1$, значение $\overline{I}_1$ мало отличается от значения $\overline{I}_1$ для однородной жидкости. График изменения $\overline{I}_1$ при увеличении числа $r_0\sigma^2 g^{-1}$ качественно совпадает с графиком для однородной жидкости. Значительное различие наблюдается на частотах, близких к частоте N^2. При $\sigma^2 < N^2$ мероморфная функция $\overline{I}_1$ не имеет графического изображения, поскольку принимает значения, равные бесконечности в точках сегмента $[0, N^2]$, совпадающих с собственными частотами внутренних волн в неподвижной цилиндрической полости. В работе [12] доказано, что спектр внутренних волн стратифицированной по произвольному закону жидкости, заполняющей цилиндрическую полость, образует плотное множество на отрезке $[0, N]$. В то же время такое поведение функции (22) на частотах $\sigma^2 < N^2$ означает, что в стратифицированной жидкости, частично или полностью заполняющей цилиндрическую полость, на низких частотах $\sigma^2 < N^2$ возникает бесконечное счетное множество парциальных движений с отличным от нуля моментом гидродинамического воздействия. Отметим, что в однородной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую полость, число таких движений равно нулю.

При равенстве частот σ^2 и N^2 дифференциальное уравнение (20) в частных производных для обобщенного потенциала становится параболическим, и формулы (22), (23) для этого случая непригодны.

Пусть жидкость не имеет свободной поверхности. Тогда в формулах (22), (23) следует положить $\chi_n = 0$, чтобы получить моменты инерции стратифицированной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую емкость. В частном случае при $\overline{h} = 1$ и $\sigma \to \infty$ имеем

$$\lim \frac{I_1}{m r_0^2} = \lim \left\{ \frac{1}{1 - \dfrac{N^2}{\sigma^2}} \left[8 \frac{r_0}{h} \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{N^2}{\sigma^2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}\left(\xi_n \dfrac{h}{r_0} \sqrt{1 - \dfrac{N^2}{\sigma^2}} \right)}{\xi_n^3 \left(\xi_n^2 - 1 \right)} - 1 \right] \right\} = \tag{24}$$

$$= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\xi_n)}{\xi_n^3 \left(\xi_n^2 - 1 \right)} - 1 = -0{,}48803.$$

К результату, полученному по формуле (24), прибавим безразмерный момент инерции затвердевшей однородной жидкости, который равен 7/12. Таким образом, значение момента инерции эквивалентного тела $\overline{I}_1 = 0{,}0953$ совпадает со значением, полученным Н.Е. Жуковским [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: собр. соч. Т. II. М.: Гостехиздат, 1948.
2. Слудский Ф.А. Le la rotation de la terre suppose fluide a son interieus. Bulletin de la Societe des naturalists de Moscow, 1895. Vol. IX. P. 285—318.
3. Houqh. Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing Fluid. Pfril Transactions (A), Vol. 186. 1. 1895.
4. Poincare`H. Sur la precession des corps deformables. Bulletin astronomique, t. XXVII, 1910.
5. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
6. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003.
7. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975.
8. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.
10. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журнал прикл. мех. и техн. физ. 1960. № 3. С. 20—55.
11. Копачевский Н.Д. Применение метода С.Л.Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости // ЖВМ и МФ. Т. 16. № 2. 1976. С. 426—439.
12. Темнов А.Н. Малые колебания идеальной неоднородной самогравитирующей жидкости // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2002. № 2. С. 25—35.
13. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1984.
14. Моисеев. Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
15. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Журнал прикл. мех. и техн. физ. 1960. № 3. С. 65—75.
16. Темнов А.Н. Об уравнениях сферического движения твердого тела с неоднородной жидкостью // Труды МВТУ. 1979. № 306. С. 32—40.
17. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. I. С. 3—20.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012