УДК 517.57

А.В. Копаев

О ПРИБЛИЖЕНИИ В УГЛЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найдены коэффициенты линейной комбинации действительных и мнимых частей конечного числа экспонент, минимизирующие интеграл энергии разности между данной функцией, гармонической в угле, и этой линейной комбинацией.

E-mail: 5736234@mail.ru

Ключевые слова: *приближение функций, гармонические функции, интеграл энергии.*

Приближению аналитических функций полиномами из экспонент (и разложению в ряды экспонент) посвящено огромное количество работ (например, [1, 2]). Поскольку при действительном λ и комплексном $z = x + yi$

$$\exp(\lambda z) = \exp(\lambda x + \lambda yi) = \exp(\lambda x)\cos(\lambda y) + \exp(\lambda x)\sin(\lambda y)\, i,$$

гармонические функции двух переменных естественно приближать линейными комбинациями (и разлагать в ряды) гармонических функций $\exp(\lambda_m x)\cos(\lambda_m y)$ и $\exp(\lambda_m x)\sin(\lambda_m y)$.

Пусть $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ — возрастающая последовательность положительных чисел. Поскольку ряд экспонент

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp(-\lambda_m z)$$

(где c_m — комплексные числа) сходится в некоторой полуплоскости $\{\mathrm{Re}(z) > x_0\}$ [1], то гармонические функции следовало бы приближать линейными комбинациями функций в полуплоскости:

$$p_m(x, y) = \exp(-\lambda_m x)\cos(\lambda_m y); \;\; q_m(x, y) = \exp(-\lambda_m x)\sin(\lambda_m y).$$

Однако метод Трефтца в этом случае неприменим, так как интеграл Дирихле, который также называют интегралом энергии, от функций $p_m(x, y)$ и $q_m(x, y)$ по указанной полуплоскости бесконечен. Известно, что интеграл Дирихле от функции $u(x, y)$ по области G определяется формулой [3]

$$D_G[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Поэтому мы будем рассматривать не полуплоскость, а угол

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - y_0| < k|x - x_0|,\ k > 0\},$$

учитывая, что объединение всех таких углов при различных k дает полуплоскость.

Поскольку для функции $u(x, y)$, гармонической в угле A, функция $\tilde{u}(x', y') = u(x' + x_0, y' + y_0)$ является гармонической в угле $G = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : |y'| < k|x'|,\ k > 0\}$, а для функции $\tilde{u}(x', y')$, гармонической в угле G, функция $u(x, y) = \tilde{u}(x - x_0, y - y_0)$ будет гармонической в угле A и

$$\exp(-\lambda_m x)\cos(\lambda_m y) = \exp(-\lambda_m (x' + x_0))\cos((\lambda_m (y' + y_0)) =$$

$$= \exp(-\lambda_m x_0)\cos(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x')\cos(\lambda_m y') -$$

$$- \exp(-\lambda_m x_0)\sin(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x')\sin(\lambda_m y'),$$

$$\exp(-\lambda_m x)\sin(\lambda_m y) = \exp(-\lambda_m (x' + x_0))\sin((\lambda_m (y' + y_0)) =$$

$$= \exp(-\lambda_m x_0)\sin(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x')\cos(\lambda_m y') +$$

$$+ \exp(-\lambda_m x_0)\cos(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x')\sin(\lambda_m y'),$$

$$\exp(-\lambda_m x')\cos(\lambda_m y') = \exp(-\lambda_m (x - x_0))\cos((\lambda_m (y - y_0)) =$$

$$= \exp(\lambda_m x_0)\cos(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x)\cos(\lambda_m y) +$$

$$+ \exp(\lambda_m x_0)\sin(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x)\sin(\lambda_m y),$$

$$\exp(-\lambda_m x')\sin(\lambda_m y') = \exp(-\lambda_m (x - x_0))\sin((\lambda_m (y - y_0)) =$$

$$= -\exp(\lambda_m x_0)\sin(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x)\cos(\lambda_m y) +$$

$$+ \exp(\lambda_m x_0)\cos(\lambda_m y_0)\exp(-\lambda_m x)\sin(\lambda_m y),$$

то достаточно ограничиться рассмотрением угла G.

Итак, будем решать следующую задачу. Пусть функция $u(x, y)$ является гармонической в угле G и имеет по области G конечный интеграл Дирихле. Найти коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, минимизирующие интеграл Дирихле от гармонической в угле G функции

$$r(x, y) = u(x, y) - \sum_{m=1}^{n} [a_m p_m(x, y) + b_m q_m(x, y)].$$

Непосредственным подсчетом находим интегралы Дирихле для каждой из функций $p_m(x,y)$ и $q_m(x,y)$ $(m=1,2,\dots,n)$ и для каждой пары функций $p_m(x,y)$ и $q_l(x,y)$ $(m, l = 1, 2, \dots, n)$:

$$D_G[p_m] = D_G[q_m] = k/2;$$

$$D_G[p_m, p_l] = D_G[q_m, q_l] = \frac{2k\lambda_m\lambda_l}{(\lambda_m+\lambda_l)^2 + k^2(\lambda_m-\lambda_l)^2}, \quad m \neq l;$$

$$D_G[p_m, q_l] = 0.$$

Отметим, что интеграл Дирихле для пары функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определяется формулой [3]

$$D_G[u,v] = \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Функции $p_1(x,y), p_2(x,y), \dots, p_n(x,y)$ линейно независимы. Действительно, предположим, что эти функции линейно зависимы. Тогда существуют числа $c_1, c_2, \dots, c_n,$ не все равные нулю, и такие, что $c_1 p_1(x,y) + c_2 p_2(x,y) + \dots + c_n p_n(x,y) \equiv 0$. Поскольку

$$\exp(-\lambda z) = \exp(-\lambda x - \lambda y i) = \exp(-\lambda x)\cos(\lambda y) - \exp(-\lambda x)\sin(\lambda y) i,$$

получаем

$$\mathrm{Re}(c_1 \exp(-\lambda_1 z) + c_2 \exp(-\lambda_2 z) + \dots + c_n \exp(-\lambda_n z)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 \exp(-\lambda_1 z) + c_2 \exp(-\lambda_2 z) + \dots + c_n \exp(-\lambda_n z) = ci,$$

где c — действительное число.

Продифференцировав последнее равенство, находим

$$-\lambda_1 c_1 \exp(-\lambda_1 z) - \lambda_2 c_2 \exp(-\lambda_2 z) - \dots - \lambda_n c_n \exp(-\lambda_n z) = 0,$$

откуда следует, что функции $\exp(-\lambda_1 z), \exp(-\lambda_2 z), \dots, \exp(-\lambda_n z)$ линейно зависимы. Но это не так, потому что определитель Вронского этой системы функций

$$\begin{vmatrix} \exp(-\lambda_1 z) & \exp(-\lambda_2 z) & \dots & \exp(-\lambda_n z) \\ -\lambda_1 \exp(-\lambda_1 z) & -\lambda_2 \exp(-\lambda_2 z) & \dots & -\lambda_n \exp(-\lambda_n z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-\lambda_1)^{n-1} \exp(-\lambda_1 z) & (-\lambda_2)^{n-1} \exp(-\lambda_2 z) & \dots & (-\lambda_n)^{n-1} \exp(-\lambda_n z) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \ldots & -\lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-\lambda_1)^{n-1} & (-\lambda_2)^{n-1} & \ldots & (-\lambda_n)^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как последний определитель есть определитель Вандермонда для попарно различных отрицательных чисел $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$.

Аналогично доказывается линейная независимость функций

$$q_1(x, y) = -\operatorname{Im}(\exp(-\lambda_1 z)), \ \ldots, \ q_n(x, y) = -\operatorname{Im}(\exp(-\lambda_n z)).$$

Таким образом, функции $p_1(x, y), p_2(x, y), \ldots, p_n(x, y)$ образуют базис в своей линейной оболочке, а функции $q_1(x, y)$, $q_2(x, y)$, …, $q_n(x, y)$ — в своей.

Построим новый базис $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ в линейной оболочке функций $p_1(x, y), p_2(x, y), \ldots, p_n(x, y)$, такой, что

$$D_G[\varphi_m, \varphi_l] = 0, \ m, l = 1, 2, \ldots n, \ m \neq l.$$

Положим $\varphi_1(x, y) = p_1(x, y)$, а $\varphi_2(x, y) = p_2(x, y) + \gamma \varphi_1(x, y)$ и найдем γ из условия $D_G[\varphi_2, \varphi_1] = 0$. Имеем

$$D_G[p_2 + \gamma\varphi_1, \varphi_1] = D_G[p_2, \varphi_1] + \gamma D_G[\varphi_1] = 0,$$

откуда

$$\gamma = -\frac{D_G[p_2, \varphi_1]}{D_G[\varphi_1]}.$$

Отметим, что $\varphi_2(x, y) \neq 0$, иначе функции $p_2(x, y)$ и $p_1(x, y) = \varphi_1(x, y)$ были бы линейно зависимы. Кроме того, $\partial\varphi_2/\partial x \neq 0$ и $\partial\varphi_2/\partial y \neq 0$.

Действительно,

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -\lambda_2 \exp(-\lambda_2 x)\cos(\lambda_2 y) - \gamma\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 y);$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -\lambda_2 \exp(-\lambda_2 x)\sin(\lambda_2 y) - \gamma\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)\sin(\lambda_1 y).$$

Поэтому, если $\partial\varphi_2/\partial x \equiv 0$, то функции $\exp(-\lambda_2 x)\cos(\lambda_2 y)$ и $\exp(-\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 y)$ линейно зависимы, что неверно. Аналогично, если

$\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \equiv 0,$ то функции $\exp(-\lambda_2 x)\sin(\lambda_2 y)$ и $\exp(-\lambda_1 x)\sin(\lambda_1 y)$ линейно зависимы, что также неверно. Следовательно, $D_G[\varphi_2] \neq 0.$

Продолжим этот процесс, напоминающий процесс ортогонализации Грама — Шмидта:

$$\varphi_m(x,y) = p_m(x,y) + \gamma_1 \varphi_1(x,y) + \gamma_2 \varphi_2(x,y) + \ldots + \gamma_{m-1}\varphi_{m-1}(x,y).$$

Коэффициенты γ_1 , γ_2 , … , γ_{m-1} находим из условий

$$D_G[\varphi_m, \varphi_1] = D_G[\varphi_m, \varphi_2] = \ldots = D_G[\varphi_m, \varphi_{m-1}] = 0.$$

Для $l < m$ получаем

$$D_G[\varphi_m, \varphi_l] = D_G[p_m + \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + \ldots + \gamma_{m-1}\varphi_{m-1}, \varphi_l] =$$

$$= D_G[p_m, \varphi_l] + \gamma_l D_G[\varphi_l] = 0.$$

Отсюда

$$\gamma_l = -\frac{D_G[p_m, \varphi_l]}{D_G[\varphi_l]}.$$

Аналогично строим новый базис $\psi_1(x,y), \psi_2(x,y), \ldots, \psi_n(x,y)$ в линейной оболочке функций $q_1(x,y), q_2(x,y), \ldots, q_n(x,y)$, такой, что

$$D_G[\psi_m, \psi_l] = 0, \;\; m \neq l.$$

Поскольку $D_G[p_m, q_l] = 0,$ то $D_G[\varphi_m, \psi_l] = 0.$

Теперь рассмотрим задачу, к которой сводится поставленная ранее задача: найти коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, минимизирующие интеграл Дирихле от гармонической в угле G функции

$$r(x,y) = u(x,y) - \sum_{m=1}^{n}[\alpha_m \varphi_m(x,y) + \beta_m \psi_m(x,y)].$$

Имеем

$$D_G[r] = D_G[u] - 2\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m D_G[u,\varphi_m] + \beta_m D_G[u,\psi_m]) +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\left(\alpha_m^2 D_G[\varphi_m] + \beta_m^2 D_G[\psi_m]\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial D_G[r]}{\partial \alpha_m} = -2D_G[u,\varphi_m] + 2\alpha_m D_G[\varphi_m] = 0;$$

$$\frac{\partial D_G[r]}{\partial \beta_m} = -2D_G\left[u,\psi_m\right] + 2\beta_m D_G\left[\psi_m\right] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_m = \frac{D_G[u,\varphi_m]}{D_G[\varphi_m]}; \quad \beta_m = \frac{D_G[u,\psi_m]}{D_G[\psi_m]};$$

$$\min D_G[r] = D_G\left[u\right] - \sum_{m=1}^{n}\left[\frac{\left(D_G\left[u,\varphi_m\right]\right)^2}{D_G[\varphi_m]} + \frac{\left(D_G\left[u,\psi_m\right]\right)^2}{D_G[\psi_m]}\right].$$

Отметим, что коэффициенты α_m, β_m не зависят от числа n $(n > m)$ (как и функции $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots, \varphi_m(x,y)$ и $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, …, $\psi_m(x,y)$). Например,

$$\varphi_1(x,y) = \exp(-\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 y), \quad \psi_1(x,y) = \exp(-\lambda_1 x)\sin(\lambda_1 y);$$

$$\varphi_2(x,y) = \exp(-\lambda_2 x)\cos(\lambda_2 y) - \frac{4\lambda_1\lambda_2 \exp(-\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 y)}{(\lambda_1+\lambda_2)^2 + k^2(\lambda_1-\lambda_2)^2};$$

$$\psi_2(x,y) = \exp(-\lambda_2 x)\sin(\lambda_2 y) - \frac{4\lambda_1\lambda_2 \exp(-\lambda_1 x)\sin(\lambda_1 y)}{(\lambda_1+\lambda_2)^2 + k^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. – М.: Наука, 1968. – 207 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012