УДК 517.3

Некоторые нестандартные доказательства и задачи в курсе математического анализа

© А.В. Неклюдов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В настоящей статье рассмотрены несколько вопросов и задач, дополняющих основной курс математического анализа в техническом университете: вычисление несобственного интеграла Пуассона методами интегрального исчисления функций одной переменной, разные подходы к вычислению объема шара в многомерном пространстве, различные, в основном малоизвестные доказательства расходимости гармонического ряда, вычисление сумм рядов Дирихле с помощью бесконечного произведения. В популярных учебниках, как правило, эти вопросы не рассматриваются. Этот материал может быть полезен для преподавателей и хорошо успевающих студентов, факультативной работы, подготовки к олимпиадам по математике и т. п.

Ключевые слова: *интеграл Пуассона, объем n-мерного шара, гармонический ряд, ряды Дирихле.*

I. Вычисление интеграла Пуассона без использования двойных интегралов. Несобственный интеграл Пуассона (Пуассона — Эйлера)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (1)$$

является одним из самых известных в курсе анализа примеров вычисления «неберущегося» несобственного или определенного интеграла. Очень простой и эффективный способ его вычисления с помощью двойного интеграла по всей плоскости $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = I^2$ в полярных координатах рассматривается в большинстве стандартных курсов анализа. Выход с прямой на плоскость при решении сугубо одномерной по формулировке задачи, с одной стороны, дает пример того, как более общая теория позволяет очень просто решить задачу, кажущуюся неприступной в рамках теории более частной. С другой стороны, создается впечатление, что вычисление интеграла Пуассона в принципе может иметь только двумерный характер. Это впечатление усиливается после ознакомления с менее известными способами вычисления интеграла Пуассона, которые, по сути, также имеют двумерный характер. Например, вычисляя двойной интеграл по всей плоскости $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2(1+y^2)} dxdy$ двумя способами (меняя порядок интегрирования), снова получаем равенство $I^2 = \pi$. Хорошо известная связь интеграла Пуассона со значением гамма-функции $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = $ $= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ позволяет, казалось бы, при его вычислении апеллировать к известному значению $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Однако данное значение гамма-функции обычно вычисляется с помощью интеграла Пуассона (см., например, [1]). Есть и другие способы вычисления $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Используя связь гамма- и бета-функций Эйлера, получим

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = 2\arcsin\sqrt{t}\Big|_0^1 = \pi.$$

Однако формула $\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ также доказывает с помощью двойных (повторных) интегралов! Еще одну возможность дает использование формулы дополнения $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$, однако и ее вывод основан либо на связи гамма- и бета-функций, либо на дополнительных очень громоздких (для студентов 1-го курса технического университета, еще только изучающих интегральное исчисление функций одного переменного) выкладках, связанных с преобразованиями гамма-функции и разложением синуса в бесконечное произведение [1]. Связь интеграла Пуассона с двойными интегралами приобретает, таким образом, почти мистический характер. Тем не менее существует, хотя и остается незаслуженно малоизвестным, способ вычисления интеграла Пуассона, в котором используется аппарат интегрального исчисления функций только одного переменного. Ниже приводится это хотя и несколько громоздкое, но по-своему поучительное и, по сути, элементарное решение. Оно использует формулу Валлиса, которая также может быть доказана элементарными методами интегрального исчисления функций одного переменного. Для замкнутости изложения вывод формулы Валлиса дается в конце этого раздела.

Данный метод вычисления интеграла Пуассона (1) основан на представлении подынтегральной функции в виде предела и внесении интеграла под знак предела:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx. \qquad (2)$$

Для возможности такой перестановки при переходе к пределу интегрирования, конечно, необходимо обоснование. Для этого можно использовать известную в теории функций теорему Лебега об ограниченной сходимости. Последовательность $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ мажорируется интегрируемой на всей числовой прямой функцией, так как в силу неравенства Бернулли для любого натурального n имеем

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \le \frac{1}{1+x^2}. \qquad (3)$$

Таким образом, в силу теоремы Лебега справедливо равенство (2). При желании можно избежать использования теоремы Лебега, относящейся к курсу теории функций и функционального анализа, и обосновать (2) непосредственно. Действительно, согласно неравенству (3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что будут справедливы неравенства

$$\int_{|x|>N}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} < \frac{\varepsilon}{3},\ n\in\mathbb{N}; \qquad (4)$$

$$\int_{|x|>N} e^{-x^2}\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

Последовательность $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ сходится на отрезке $[-N, N]$ равномерно в силу теоремы Дини о равномерном характере сходимости на отрезке монотонной последовательности непрерывных функций в случае, если предел — непрерывная функция хотя равномерная сходимость может быть установлена и непосредственно. Поэтому существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in [-N, N]$ справедливо неравенство

$$\left|\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} - e^{-x^2}\right| < \frac{\varepsilon}{6N}. \qquad (6)$$

Из (4)–(6) получаем, что при $n > n_0$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2}-\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)dx\right| \le \left|\int_{-N}^{N}\left(e^{-x^2}-\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)dx\right| +$$

$$+\int_{|x|>N}\left(e^{-x^2}+\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)dx \le \frac{\varepsilon}{6N}2N+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Таким образом, справедлив предельный переход (2).

Для вычисления интеграла от рациональной функции $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ воспользуемся формулой понижения

$$\int\frac{dx}{(x^2+A^2)^n}=\frac{x}{2A^2(n-1)(x^2+A^2)^n}+\frac{2n-3}{2A^2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+A^2)^{n-1}}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx = n^n\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+n)^{-n}\,dx =$$

$$=n^n\left(\left.\frac{x}{2n(n-1)(x^2+n)^n}\right|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2n-3}{2n(n-1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+n)^{n-1}}\right)=$$

$$=n^n\frac{2n-3}{2n(n-1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+n)^{n-1}}=n^n\frac{2n-3}{2n(n-1)}\frac{2n-5}{2n(n-2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+n)^{n-2}}=\ldots=$$

$$=n^n\frac{2n-3}{2n(n-1)}\frac{2n-5}{2n(n-2)}\cdots\frac{5}{2n\cdot 3}\frac{3}{2n\cdot 2}\frac{1}{2n\cdot 1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n}=\sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\pi. \tag{7}$$

Здесь, как обычно, через $k!!$ обозначено произведение всех натуральных чисел той же четности, что и k, не превосходящих k. Согласно формуле Валлиса

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{2m}(m!)^2(2m+1)}{((2m+1)!!)^2},$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{2n-1}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Тогда из (2) и (7) получаем

$$I=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}=$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{2n-1}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}\right)=\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\pi}.$$

В заключение этого раздела приведем вывод формулы Валлиса. Докажем сначала вспомогательные утверждения.

Утверждение 1. Для интегралов $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n xdx$ справедливо рекуррентное соотношение

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}. \tag{8}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=$$

$$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\limits_0^{\pi/2}\cos xd(\sin^{n-1}x)=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}I_n,$$

откуда следует (8).

Утверждение 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=1.$

Доказательство. Так как $I_{n+2}<I_{n+1}<I_n<I_{n-1}<I_{n-2}$, то $\frac{I_{n+2}}{I_n}<\frac{I_{n-1}}{I_n}<\frac{I_{n-2}}{I_n}$. В силу (8) крайние члены неравенства при $n\to\infty$ стремятся к 1, следовательно, средняя часть также стремится к 1.

Доказательство формулы Валлиса. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Согласно (8)

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}I_{2m-1}=\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}I_{2m-3}=\ldots=$$

$$=\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\ldots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{2^m m!}{(2m+1)!!}, \tag{9}$$

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}I_{2m-2}=\frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}I_{2m-4}=\ldots=$$

$$=\frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\ldots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Из (9)–(10) получаем

$$\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!!(2m-1)!!}\frac{2}{\pi} = \frac{2^{2m}(m!)^2(2m+1)}{((2m+1)!!)^2}\frac{2}{\pi}.$$

Так как левая часть при $m \to \infty$ стремится к 1, то $\frac{\pi}{2} =$ $= \lim\limits_{m\to\infty} \frac{2^{2m}(m!)^2(2m+1)}{((2m+1)!!)^2}$.

II. О вычислении объема четырехмерного шара. Понятие объема (меры) множества в евклидовом пространстве размерности больше трех обычно не входит в курсы математического анализа. Между тем такой объем может быть рассмотрен хотя бы для четырехмерного случая как органическая часть курса анализа и как дополнение к курсу линейной алгебры, в котором изучаются евклидовы пространства произвольной (конечной) размерности. Для рассмотрения четырехмерного объема достаточно понятия определенного интеграла, хотя полезным также является и использование тройного, а также и четырехкратного интеграла. Ниже приведены несколько возможных способов вычисления четырехмерного объема на примере шара. Как дополнение один из способов применяется к шару в *n*-мерном пространстве.

В качестве замечания отметим, что объем шара $V_n(R)$ произвольного радиуса R в $\mathbb{R}^n$ должен иметь вид $V_n(R) = V_n R^n$, где $V_n = V_n(1)$ — объем шара радиусом 1. В частности, $V_4(R) = V_4 R^4$. Поэтому фактически достаточно уметь вычислять объем единичного шара.

1. Объем четырехмерного шара как интеграл от «площадей» (трехмерных объемов) сечений шара гиперплоскостями. Формула $V = \int\limits_a^b S(x)dx$ вычисления объема трехмерного тела по площадям $S(x)$ его сечений плоскостями $x = \text{const}$ может быть перенесена на четырехмерный случай естественным образом. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ введены прямоугольные декартовы координаты $x, y, z, w.$ Если «площадь» (на самом деле трехмерный объем) сечения некоторого тела (области) G (трехмерной) гиперплоскостью $w = \text{const}$ описывается непрерывной функцией $S(w)$, то четырехмерный объем всего тела $V = \int\limits_a^b S(w)dw.$ Рассмотрим шар радиусом 1 с центром в начале координат в $\mathbb{R}^4$ и сечение шара гиперплоскостью $w = \text{const} \in (-1; 1).$ Это сечение представляет собой трехмерный шар, подобно тому, как двумерные круги являются сечениями шара в трехмерном пространстве. Радиус такого трехмерного сечения $R(w)=\sqrt{1-w^2}$. Тогда «площадь» такого трехмерного сечения $\dfrac{4\pi R^3(w)}{3}=\dfrac{4\pi\sqrt{(1-w^2)^3}}{3}$. Отсюда для объема единичного шара в $\mathbb{R}^4$ получаем определенный интеграл, который вычисляем путем замены переменной $x=\sin t$:

$$V_4=\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-w^2)^3}\,dw=\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{1}\cos^4 t dt=\frac{4\pi}{3}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Интеграл по t может быть вычислен с помощью формулы понижения вида

$$I_4=\frac{3}{4}I_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0\,.$$

Таким образом, объем шара радиусом R

$$V_4(R)=\frac{\pi^2R^4}{2}.$$

2. Объем четырехмерного шара как тройной интеграл. Объем тела, ограниченного поверхностями $z=f(x,y)$, $z=0$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, равен двойному интегралу $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где D — двумерная область, находящаяся в основании данного тела. Аналогично объем четырехмерного тела, ограниченного гиперповерхностью $w=f(x,y,z)>0$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OW, которая имеет в основании трехмерную область G, лежащую в гиперплоскости $w=0$, вычисляется по формуле

$$V=\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz.$$

Для шара, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2+w^2=1$, имеем $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$, трехмерный шар $x^2+y^2+z^2<1$ в качестве основания тела. Тогда объем единичного четырехмерного шара находим как удвоенный объем верхнего ($w>0$) полушара G, вычисляя тройной интеграл в сферических координатах:

$$V_4 = 2\iiint_G \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r^2 dr =$$

$$= 2\cdot 2\pi \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = 8\pi \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t) dt = \pi\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3. Объем четырехмерного шара как четырехкратный интеграл. Пусть G — единичный шар с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^4$ переменных $x, y, z, w.$ Тогда его объем может быть вычислен как интеграл кратности 4 по области G. Этот интеграл можно вычислить в сферических координатах $r, \varphi,\ \theta,\ \psi$ в четырехмерном пространстве, которые вводятся следующим образом:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\cos\psi;$$
$$y = r\sin\varphi\cos\theta\cos\psi;$$
$$z = r\sin\theta\cos\psi;$$
$$w = r\sin\psi,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta,\ \psi \le \frac{\pi}{2}.$

Якобиан I перехода к сферическим координатам:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\theta\cos\psi & -r\cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & r\cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\theta\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & 0 & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix}.$$

Вынося из столбцов 2–4 множитель $r,$ из столбцов 2–3 множитель $\cos\psi,$ а из столбца 2 множитель $\cos\theta,$ получим

$$I = r^3\cos\theta\cos^2\psi \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & 0 & \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{vmatrix}.$$

Прибавив ко второй строке первую, умноженную на $\operatorname{ctg}\varphi$, имеем

$$I = r^3\cos\theta\cos^2\psi\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \dfrac{\cos\theta\cos\psi}{\sin\varphi} & 0 & -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & -\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{\sin\varphi} \\ \sin\theta\cos\psi & 0 & \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r^3\cos\theta\cos^2\psi}{\sin\varphi}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \cos\theta\cos\psi & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & 0 & \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по второму столбцу:

$$I = r^3\cos\theta\cos^2\psi\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta & -\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{vmatrix}.$$

Разложив по третьей строке, получаем

$$I = r^3\cos\theta\cos^2\psi\left(\sin\psi\begin{vmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta\sin\psi \\ \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \end{vmatrix} + \cos\psi\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta \\ \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^3\cos\theta\cos^2\psi\left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\right) = r^3\cos\theta\cos^2\psi.$$

Тогда

$$V_4 = \iiint_G\int dxdydzdw =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\psi d\psi\int_0^1 r^3dr = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. Применение четырехмерного интеграла Пуассона к вычислению объема четырехмерного шара. Предварительно заметим, что поскольку объем шара радиусом R в $\mathbb{R}^n$

$$V_n(R) = \int_0^R dr\int_{S_r} dS = \omega_n\int_0^R r^{n-1}dr = \omega_n\frac{R^n}{n},$$

объем единичного шара $V_n = \omega_n / n$, где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ (здесь S_r — сфера радиусом R). Соответственно при $n = 4$ имеем $V_4 = \omega_4 / 4$. Площадь единичной сферы ω_4 может быть найдена следующим образом. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ функцию $e^{-x^2-y^2-z^2-w^2}$ и проинтегрируем ее по всему пространству $\mathbb{R}^4$ двумя способами: 1) стандартным образом в декартовых координатах; 2) сначала по сфере радиусом r, а затем по r. В результате имеем

$$\iiiint\limits_{\mathbb{R}^4} e^{-x^2-y^2-z^2-w^2} dxdydzdw =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw = (\sqrt{\pi})^4 = \pi^2, \qquad (11)$$

$$\iiiint\limits_{\mathbb{R}^4} e^{-x^2-y^2-z^2-w^2} dxdydzdw = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-r^2} dr \int\limits_{S_r} dS =$$

$$= \omega_4 \int\limits_{0}^{+\infty} r^3 e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2}\omega_4 \int\limits_{0}^{+\infty} r^2 d(e^{-r^2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\omega_4 \left(r^2 e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-r^2} d(r^2) \right) = \frac{1}{2}\omega_4 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-r^2} d(r^2) = \frac{1}{2}\omega_4 .$$

Сравнивая полученный результат с (11), получаем $\pi^2 = \dfrac{\omega_4}{2}$, $\omega_4 = 2\pi^2$, $V_4 = \dfrac{\omega_4}{4} = \dfrac{\pi^2}{2}$.

5. Вычисление объема *n*-мерного шара с помощью многомерного интеграла Пуассона. Рассуждения из п. 4 могут быть перенесены на случай шара в n-мерном пространстве. При этом интеграл по r легко может быть сведен к гамма-функции:

$$\pi^{n/2} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-r^2} dr \int\limits_{S_r} dS =$$

$$= \omega_n \int\limits_{0}^{+\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr \frac{1}{2}\omega_n \int\limits_{0}^{+\infty} t^{n/2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Тогда для площади сферы и объема шара радиусом 1 получаем

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; \quad V_n = \frac{\omega_n}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

В частности,

$$V_5 = \frac{\pi^{5/2}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{\pi^{5/2}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^{1/2}} = \frac{8\pi^2}{15}, \quad V_6 = \frac{\pi^3}{\Gamma(4)} = \frac{\pi^3}{6},$$

$$V_7 = \frac{\pi^{7/2}}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{\pi^{7/2}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^{1/2}} = \frac{16\pi^3}{105}.$$

Таким образом, наблюдается следующая общая закономерность: показатель степени числа π в выражении для V_n увеличивается на 1 при переходе от нечетной размерности к четной и остается прежним при переходе от четной размерности к нечетной. Эта закономерность проявляется уже при переходе от $n=1$ к $n=2$: $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, где V_1 — «объем» одномерного шара радиусом 1, т. е. длина отрезка $[a-1, a+1]$. Другими словами, $V_n = q_n \pi^{[n/2]}$, где q_n — рациональное число; $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$.

В общем случае объем единичного шара может быть записан следующим образом:

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}$$

— для четного $n = 2k$,

$$V_{2k+1} = \frac{\pi^{k+1/2}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{k+1/2}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^{1/2}} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}$$

— для нечетного $n = 2k+1$.

Отметим, что площадь ω_n сферы в n-мерном пространстве описана в курсе уравнений математической физики как коэффициент, входящий в выражение для фундаментального решения n-мерного оператора Лапласа. Приведенный выше вывод выражения для ω_n, видимо, впервые (во всяком случае на русском языке) опубликован в 2001 г. в работе [2], а вероятностная интерпретация того же по существу вывода приведена позже в работах [3] и [4].

III. Доказательства расходимости гармонического ряда. Гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{12}$$

рассматривают в курсе математического анализа обычно в самом начале изучения раздела «Ряды» как пример расходящегося ряда, для которого выполняется необходимое условие сходимости — стремление общего члена ряда к 0 при $n \to \infty.$ Обычно дается доказательство расходимости, сводящееся к оценке снизу сколь угодно далеких кусков ряда, например

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}.$$

Фактически при этом используется то, что для ряда (12) не выполняется условие Коши (фундаментальность последовательности частичных сумм). Однако существуют различные доказательства расходимости гармонического ряда, в том числе в которых используются лишь определение суммы ряда и простейшие свойства рядов — вынесение общего множителя за знак суммы и т. п. Приведем некоторые из таких доказательств, следуя в основном англоязычному обзору [5], носящему поэтическое название «Гармонический ряд расходится снова и снова». Рассмотрим только элементарные доказательства, в которых не используются интегралы, степенные ряды и т. п.

Доказательство 1. Предположим, что ряд (12) сходится, тогда его сумма — некоторое положительное число $S,$ т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=S.$$

Разобьем сумму ряда на сумму нечетных и четных слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=S.$$

Очевидно, что вторая сумма в левой части $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}S.$ Но тогда и первая сумма должна быть равна $\frac{1}{2}S,$ т. е. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}S.$ Таким образом

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

что невозможно, так как каждое слагаемое первого ряда больше соответствующего слагаемого второго ряда. Таким образом ряд (12) не может сходиться.

Вероятно, это доказательство расходимости ряда (12) является самым элементарным из всех существующих. Удивительным образом оно, тем не менее, является мало известным даже среди преподавателей высшей математики. На русском языке оно, возможно, вообще публикуется впервые (если не считать Интернета). Согласно обзору [5], впервые оно опубликовано только в 1979 г. [6] и затем переопубликовано в 1997 г. [7]. Причина расходимости ряда (из положительных слагаемых) — слишком медленное убывание общего члена — в данном случае находит свое выражение в том, что четные слагаемые «забирают» себе половину всей суммы, что невозможно. Такое же доказательство можно провести и для ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ с показателем $\alpha<1$; в этом случае доля четных слагаемых была бы даже больше половины всей суммы.

Доказательство 2. Пусть

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

— частичная сумма ряда (12). Используя неравенство $e^x > 1+x$, справедливое для всех $x>0$, получим оценку снизу

$$e^{S_n} = e^1\cdot e^{1/2}\cdot e^{1/3}\ldots e^{1/(n-1)}\cdot e^{1/n} > 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n}{n-1}\frac{n+1}{n} = n+1,$$

таким образом $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Заметим, что одновременно была получена оценка снизу для частичных сумм $S_n > \ln(n+1)$. Это доказательство, согласно [5], впервые опубликовано в 1976 г. [8]. Такое же по существу доказательство можно провести, используя неравенство $x>\ln(1+x)$: $S_n > \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$. Кроме того, также можно вместо неравенства использовать эквивалентность $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n},\ n\to\infty.$

Доказательство 3. (Я. Бернулли, 1689 г.). Так как

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2} > (n^2-n)\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2} > 1,$$

то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots\frac{1}{25}\right)+\ldots \ge 1+1+1+\ldots$

Доказательство 4. В этом доказательстве, как и в предыдущем, оценивается снизу далекий отрезок ряда, на этот раз состоящий из слагаемых с номерами от $(k-1)!+1$ до $k!$:

$$\frac{1}{(k-1)!+1}+\frac{1}{(k-1)!+2}+\ldots+\frac{1}{k!}>\left(k!-(k-1)!\right)\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{k}.$$

Отсюда для частичной суммы порядка $n!$ имеем

$$S_{n!}>1+\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)>n-(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, частичные суммы ряда (12) не ограничены.

Следующие доказательства основаны на получении для суммы ряда (12) (в предположении, что он сходится) оценки вида $S>S$ и т. п. Фактически получение такой оценки также выражает то, что члены ряда убывают слишком медленно, и «внутри» ряда можно выделить часть, превышающую сумму ряда целиком.

Доказательство 5. Предположим, что ряд (12) сходится и его сумма равна S. Тогда

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots>\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=S.$$

Доказательство 6. Снова предположим сходимость ряда (12) к сумме S.

Так как при $n=2,\,3,\,\ldots$

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}=\frac{2n}{n^2-1}>\frac{2}{n},$$

то

$$S=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)+\ldots>1+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)+$$
$$+\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n}\right)+\ldots=1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)=1+S.$$

Доказательство 7. Поскольку

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} \ldots =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots \right) + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}. \qquad (13)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n},$$

тогда из (13) следует

$$S > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + S.$$

Доказательство 8.

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} + \frac{4}{10} + \frac{5}{15} + \ldots + \frac{n}{n(n+1)/2} + \ldots =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots \frac{1}{n+1} + \ldots \right) = 2(S-1).$$

Из неравенства $S > 2(S-1)$ следует $S < 2$. Однако $S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} > 2.$ Получаем противоречие.

IV. О суммировании рядов Дирихле различной кратности. Суммы однократных рядов Дирихле для четных значений показателя (т. е. значения дзета-функции Римана в четных точках)

$$\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}, \quad p \in \mathbb{N},$$

могут быть найдены с помощью рядов Фурье. Например, используя разложение в ряд Фурье функции, коэффициенты Фурье которой эквивалентны $1/n^2$ при $n \to \infty$, или используя равенство Парсеваля для функции с коэффициентами Фурье порядка $1/n$, несложно получить значение

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Множество других способов вычисления $\zeta(2)$ разной степени громоздкости приведено в работе [9].

Остановимся на доказательстве, в котором используется разложение синуса в бесконечное произведение, и тот же способ, получим суммы других, в том числе двойных и тройных, рядов Дирихле. Эйлеровское разложение синуса имеет вид [1]

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots \qquad (14)$$

Разложим в ряд по степеням x обе части (14), раскрывая при этом скобки в бесконечном произведении:

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots=x\left(1-\left(\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{x^2}{4\pi^2}+\frac{x^2}{9\pi^2}+\ldots\right)+\ldots\right).$$

Приравняем коэффициенты при третьих степенях x:

$$-\frac{1}{6}=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right),$$

т. е. $\zeta(2)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$.

Приравняем коэффициенты при пятых степенях в (14). Получим равенство $\frac{1}{120}=\frac{1}{\pi^4}\sum\limits_{\substack{m,n\\1\le m<n}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}$. Таким образом, найдена сумма двойного ряда

$$\sum_{\substack{m,n\\1\le m<n}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\frac{\pi^4}{120}.$$

Отсюда можно найти значение $\zeta(4)$:

$$\zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2-2\sum_{\substack{m,n\\1\le m<n}}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\frac{\pi^4}{36}-\frac{\pi^4}{60}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Приравняв коэффициенты при седьмой степени x в (14), получим

$$-\frac{1}{7!}=-\frac{1}{\pi^6}\sum_{1\le m<n<k}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2k^2}\Rightarrow\sum_{1\le m<n<k}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2k^2}=\frac{\pi^6}{7!}. \qquad (15)$$

Используя это значение, можно вычислить сумму следующих рядов Дирихле кратностью 1 и 2: $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$, $B=\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{1}{m^4n^2}$. Действительно,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+3\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{1}{m^4n^2}+6\sum_{1\le m<n<k}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2k^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{1}{m^4n^2}.$$

Используя значения $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ и сумму тройного ряда (15), для A и B получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+3B=\pi^6\left(\frac{1}{6^3}-\frac{6}{7!}\right);\\ A+B=\pi^6\left(\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{6}\right),\end{cases}$$

решив которую, имеем

$$A=\zeta(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\quad B=\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{1}{m^4n^2}=\frac{\pi^6}{1260}.$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при произвольной нечетной степени x^{2k+1} в (14), получим

$$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^k}{\pi^{2k}}\sum_{1\le m_1<m_2<\ldots<m_k}^{\infty}\frac{1}{m_1^2m_2^2\ldots m_k^2},$$

т. е. сумму кратного ряда Дирихле

$$\sum_{1\le m_1<m_2<\ldots<m_k}^{\infty}\frac{1}{m_1^2m_2^2\ldots m_k^2}=\frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Заметим, что возможность формального раскрытия скобок и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях в (14) следует из допустимости дифференцирования под знаком бесконечного произведения (14) любое число раз, которая, в свою очередь, вытекает из равномерной сходимости в окрестности нуля последовательностей производных частичных произведений $x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$.

Заключение. Отметим, что нахождение суммы даже однократных рядов Дирихле с *нечетным* показателем — задача до сих пор нерешенная. Более того, до сих пор неизвестно, являются ли значения $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9),\ldots$ рациональными или иррациональными числами. Лишь в 1978 г. была доказана иррациональность $\zeta(3)$ [10]. Относительно иррациональности значений дзета-функции в остальных нечетных точках известно лишь следующее: среди чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$ — бесконечное число иррациональных, хотя бы одно из чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально и т. п. [11].

Нестандартные доказательства теорем и примеры, относящиеся к курсу математического анализа и другим математическим курсам, позволяют иногда взглянуть с неожиданной стороны на, казалось бы, довольно прозаические и рутинные вопросы. Искусство преподавателя — использовать нестандартные подходы так, чтобы показать внутреннюю красоту математики, связи, иногда неожиданные, между ее различными областями, раскрыть природу математических рассуждений как подлинного творчества.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зорич В.А. *Математический анализ*. Т. 2, Москва, Наука, 1984.

[2] Шубин М.А. *Лекции об уравнениях математической физики*. Москва, МЦНМО, 2001.

[3] Яремко Н.Н. Вероятностные методы в математическом анализе. *Изв. Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского*, 2008, № 12, с. 57–62.

[4] Заславский А.А. О вычислении объема *n*-мерного шара. *Математическое просвещение*, сер. 3, 2008, вып. 12, с. 270–271.

[5] Kifowit S.J., Stamps T.A. The Harmonic Series Diverges Again and Again. *The AMATYC Review*, 2006, vol. 27, pp. 31–43. http://prairiestate.edu/skifowit/harmapa.pdf

[6] Cohen T., Knight W.J. Convergence and divergence of $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$. *Mathematics Magazine*, 1979, vol. 52(3), p. 178.

[7] Ecker M.W. Divergence of the harmonic series by rearrangement. *College Mathematics J*. 1997, 28(3), pp. 209–210.

[8] Honsberger R. Mathematical Gems II. *The Mathematical Association of America*, 1976, p. 98.

[9] Кохась К.П. Сумма обратных квадратов. *Математическое просвещение*, сер. 3, 2004, вып. 8, с. 142–163.

[10] Aperi R. Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Societe Matematique de France Asterisque*, 1979, vol. 61, pp. 11–13.

[11] Зудилин В.В. Об иррациональности значений дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. Математическая*, 2002, № 66:3, с. 49–102.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Неклюдов А.В. Некоторые нестандартные доказательства и задачи в курсе математического анализа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/743.html

Неклюдов Алексей Владимирович родился в 1962 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных статей по уравнениям с частными производными, в основном посвященных поведению решений уравнений эллиптического типа, в том числе нелинейных, в неограниченных областях и отсутствию решений нелинейных уравнений в неограниченных областях; учебных пособий для студентов, а также нескольких публикаций по литературоведению. e-mail: nekl5@yandex.ru