УДК 514.8

О некоторых свойствах бессдвиговых изотропных конгруэнций

© В.Н. Тришин
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследованы свойства бессдвиговых изотропных геодезических конгруэнций (БСК) в пространствах Эйнштейна. Условия интегрируемости для уравнений БСК в спинорном виде использованы для анализа свойств вектора Соммерса, характеризующего конгруэнцию. Получены явные выражения для вектора Соммерса в алгебраически специальных пространствах.

Ключевые слова: *бессдвиговые изотропные конгруэнции, алгебраически специальные метрики, уравнения Эйнштейна.*

Введение. В статье исследованы свойства *бессдвиговых изотропных конгруэнций* – важного класса изотропных геодезических конгруэнций, для которого один из трех оптических скаляров, а именно сдвиг, обращается в ноль [1]. Такие конгруэнции играют важную роль в различных задачах общей теории относительности [2], при поиске точных решений уравнений Эйнштейна [3], при изучении свойств электромагнитных полей на искривленных пространственно-временных многообразиях [4–7].

С математической точки зрения бессдвиговые изотропные конгруэнции в пространстве-времени тесно связаны с понятием CR-структуры: каждое четырехмерное лоренцево многообразие, содержащее БСК, является лифтом некоторого трехмерного CR-многообразия [8–10]. Заметим также, что неаналитические бессдвиговые конгруэнции, которые связаны с CR-структурами, недопускающими вложения, могут иметь важное значение в квантовой гравитации [11].

Существование БСК накладывает определенные ограничения на кривизну метрики. В хорошо известной теореме Гольдберга – Сакса [12] утверждается, что вакуумная (т. е. удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна с нулевым тензором энергии-импульса) метрика содержит бессдвиговую изотропную геодезическую конгруэнцию тогда, и только тогда, когда она является алгебраически специальной, причем кратное *главное изотропное направление* (ГИН) тензора конформной кривизны Вейля [1] совпадает с касательным вектором БСК. Отсюда, в частности, следует, что вакуумные пространства Эйнштейна могут содержать самое большее две такие конгруэнции. В общем случае искривленного неконформно-плоского пространства-времени число различных БСК, проходящих через заданную точку, не может превышать четырех (по числу ГИН), так как каждый луч БСК с необходимостью определяет ГИН тензора Вейля. В конформно-плоских метриках существует бесконечно много БСК.

В данной работе проведено локальное изучение условий интегрируемости уравнений бессдвиговых конгруэнций на четырехмерном многообразии с метрикой $g_{\mu\nu}$ лоренцевой сигнатуры, использован спинорный формализм абстрактных индексов Пенроуза [1].

Условия интегрируемости уравнений БСК. Обозначим через l^{μ} векторное поле, касательное к лучам конгруэнции, а через ξ^{A} – главный спинор БСК. В формализме абстрактных индексов $l^{\mu}=\xi^{A}\xi^{A'}$. Условие нулевого сдвига [1] приводит к уравнениям

$$\xi^{A}\xi^{B}\nabla_{\mathrm{AA'}}\xi_{\mathrm{B}}=0,$$

где $\nabla_{AA'}$ – оператор спинорной ковариантной производной относительно связности Леви – Чивита, а индексы поднимаются $\xi^{A}=\varepsilon^{AB}\xi_{B}$ и опускаются $\xi_{B}=\xi^{A}\varepsilon_{AB}$ с помощью антисимметричного спин-тензора $\varepsilon_{AB}=-\varepsilon_{BA}$ такого, что $g_{\mu\nu}=\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}$. Уравнения БСК инвариантны при конформных преобразованиях метрики и при масштабных преобразованиях $\xi_{A}\to\xi'_{A}=\alpha\xi_{A}$, где $\alpha(x)$ – произвольная комплексная функция, соответствующая репараметризации луча конгруэнции.

Используя свойства спинорной алгебры, уравнения БСК можно записать в следующем виде (круглые скобки у индексов обозначают симметризацию):

$$\nabla_{A'(A}\xi_{B)}=\phi_{A'(A}\xi_{B)},$$

где $\varphi_{AA'}$ – комплексное векторное поле (вектор Соммерса [13]), изменяющееся при масштабных преобразованиях градиентным образом

$$\phi_{AA'}\to\phi'_{AA'}=\phi_{AA'}+\nabla_{AA'}\ln\alpha.$$

Ковариантную производную спинора БСК можно записать одним из двух способов

$$\nabla_{AA'}\xi_{B}=\phi_{A'A}\xi_{B}-\varepsilon_{AB}\zeta_{A'},$$

или

$$\nabla_{AA'}\xi_{B}=\phi_{A'B}\xi_{A}-\varepsilon_{BA}\eta_{A'},$$

где введены вспомогательные спиноры, определяемые уравнениями

$$\xi^B \nabla_{AA'} \xi_B = \xi_A \zeta_{A'},$$
$$\xi^A \nabla_{AA'} \xi_B = \xi_B \eta_{A'}$$

и связанные друг с другом соотношением $\zeta_{A'} + \eta_{A'} = \xi^A \varphi_{AA'}$. Трансформационные свойства этих спиноров существенно различны:

$$\zeta_{A'} \to \zeta'_{A'} = \alpha \zeta_{A'}$$
$$\eta_{A'} \to \eta'_{A'} = \alpha(\eta_{A'} + \xi^A \nabla_{AA'} \ln \alpha).$$

В частности, спинор $\zeta_{A'}$ масштабными преобразованиями невозможно обратить в ноль. Напротив, если спинор БСК ξ_A определяет кратное ГИН тензора Вейля, то спинор $\eta_{A'}$ путем изменения масштаба вдоль луча конгруэнции всегда можно обратить в ноль [14, 15].

Для нахождения условий интегрируемости уравнений БСК вычислим коммутатор ковариантных производных главного спинора ξ_A и разложим его на неприводимые представления группы Лоренца. В результате получим систему уравнений

$$\Psi_{ABCD} \xi^D = \varphi_{(AB} \xi_{C)},$$
$$6\Lambda \xi_A = 3(\nabla_{AA'} - \phi_{AA'})\zeta^{A'} - 2\varphi_{AB} \xi^B,$$
$$\Phi_{A'B'CD} \xi^D = \left(\nabla_{C(A'} - \phi_{C(A'}\right)\zeta_{B')} + \tilde{\varphi}_{A'B'} \xi_C,$$

где Ψ_{ABCD} – конформный спинор Вейля; $\Phi_{A'B'CD}$ – спинор Риччи; $\Lambda = R/24$; R – скалярная кривизна метрики. Спин-тензоры $\tilde{\varphi}_{A'B'} = \nabla_{C(A'} \phi^C_{B')}$ и $\varphi_{AB} = \nabla_{C'(A} \phi^{C'}_{B)}$ соответствуют самодуальной и антисамодуальной частям комплексного бивектора

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi_\nu - \nabla_\nu \phi_\mu = \varepsilon_{AB} \tilde{\varphi}_{A'B'} + \varepsilon_{A'B'} \varphi_{AB}.$$

Из первого уравнения следует, что $\Psi_{ABCD} \xi^A \xi^B \xi^C \xi^D = 0$, т. е. получим хорошо известный результат [1], что каждый касательный вектор БСК является ГИН тензора Вейля. Кроме того, в случае алгебраически вырожденной метрики типа N ($\Psi_{ABCD} \xi^D = 0$) или конформно-плоской метрики ($\Psi_{ABCD} = 0$) бивектор $+F_{\mu\nu}$ является самодуальным ($\varphi_{AB} = 0$) и, следовательно, удовлетворяет вакуумным уравнениям Максвелла в этом пространстве.

Вектор Соммерса в пространствах Эйнштейна. Рассмотрим свойства бессдвиговых конгруэнций в случае вакуумных пространств Эйнштейна, т. е. когда $\Phi_{A'B'AB} = \Lambda = 0.$ По теореме Гольдберга – Сакса главный спинор БСК ξ_A определяет кратное ГИН тензора Вейля, и пространство-время является алгебраически специальным, т. е. типа II, D, III или N по Петрову. В этом случае существует специальная калибровка [14], в которой главный спинор конгруэнции удовлетворяет

$$\xi^A \nabla_{AA'} \xi_B = 0,$$

а вспомогательные спиноры –

$$\zeta_{A'} = \xi^A \varphi_{AA'} = \nabla^A_{A'} \xi_A, \quad \eta_{A'} = 0.$$

Выражение для ковариантной производной главного спинора принимает вид

$$\nabla_{AA'} \xi_B = \phi_{BA'} \xi_A,$$

что позволяет интерпретировать его как условие ковариантного постоянства касательного вектора БСК относительно эффективной связности Вейля – Картана [14].

Тогда система условий интегрируемости в калибровке $\xi^A \nabla_{AA'} \xi_B = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned}
&\Psi_{ABCD} \xi^D = \varphi_{(AB} \xi_{C)}, \\
&12\Lambda \xi_A = 2\varphi_{AB} \xi^B - 3\xi_A \left(\nabla_{CC'} \phi^{CC'} + \phi_{CC'} \phi^{CC'} \right), \\
&2\Phi_{A'B'}{}^{A}{}_{B} \xi^B = \tilde{\varphi}_{A'B'} \xi^A - 2\left(\nabla^{(A}_{(A'} \phi^{C)}_{B')} - \phi^{(A}_{(A'} \phi^{C)}_{B')} \right) \xi_C.
\end{aligned}$$

Отметим, что из второго уравнения системы после свертки с ξ^A с учетом первого уравнения получим $\Psi_1 = \dfrac{1}{3} \varphi_{AB} \xi^A \xi^B = 0$, т. е. спинор БСК ξ_A должен быть кратным ГИН тензора Вейля.

Получим выражения для вектора Соммерса $\phi_{AA'}$ в случае алгебраически специальных метрик различного типа, используя вакуумные тождества Бианки $\nabla^A_{A'} \Psi_{ABCD} = 0.$ Компоненты конформного спинора Вейля обозначим $\Psi_0, \cdots, \Psi_4$ и главный спинор ξ^A выберем в качестве одного из спиноров базисной диады. Заметим, что $\Psi_0 = \Psi_1 = 0,$ поскольку ξ_A задает кратное ГИН.

Тип N. Конформный спинор Вейля имеет вид

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_4 \xi_A \xi_B \xi_C \xi_D.$$

Применяя оператор $\nabla^A_{A'}$ к Ψ_{ABCD} данного вида, с учетом тождеств Бианки и равенства $\zeta_{A'} = \nabla^A_{A'}\xi_A$ получим соотношение $\zeta_{A'} = \xi^A \nabla_{AA'} \ln \Psi_4$, откуда

$$\phi_{AA'} = \xi_A \chi_{A'} + \nabla_{AA'} \ln \Psi_4.$$

Тип III. Конформный спинор Вейля имеет вид

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(A} \xi_B \xi_C \xi_{D)}, \ \Psi_A \xi^A = 4\Psi_3.$$

Вычисляя $\xi^B \nabla^A_{A'} \Psi_{ABCD}$ и приравнивая полученный результат к нулю, с учетом соотношения $\xi^A \xi^B \nabla_{AA'} \Psi_B = 4\xi^A \nabla_{AA'} \Psi_3$ получим $\zeta_{A'} = \xi^A \nabla_{AA'} \ln \Psi_3^{1/2}$, откуда

$$\phi_{AA'} = \xi_A \chi_{A'} + \nabla_{AA'} \ln \Psi_3^{1/2}.$$

Тип II *или D.* Конформный спинор Вейля имеет вид

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(AB} \xi_C \xi_{D)}, \ \Psi_{AB} \xi^A \xi^B = 6\Psi_2.$$

Вычисляя $\xi^B \xi^C \nabla^A_{A'} \Psi_{ABCD}$ и приравнивая полученный результат к нулю с учетом соотношения $\xi^A \xi^B \xi^C \nabla_{AA'} \Psi_{BC} = 6\xi^A \nabla_{AA'} \Psi_2,$ получим $\zeta_{A'} = \xi^A \nabla_{AA'} \ln \Psi_2^{1/3}$, откуда

$$\phi_{AA'} = \xi_A \chi_{A'} + \nabla_{AA'} \ln \Psi_2^{1/3}.$$

Заключение. В работе получено представление для вектора Соммерса бессдвиговых изотропных конгруэнций в алгебраически специальных пространствах Эйнштейна в зависимости от типа пространства по Петрову. Данное представление может быть использовано для анализа гравитационного излучения в задачах ОТО. Также определены условия интегрируемости для уравнений нулевого сдвига с использованием вектора Соммерса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время*. В 2 т. Т. 2: *Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*. Москва, Мир, 1988, 572 с.

[2] *Точные решения уравнений Эйнштейна*. Шмутцер Э., ред. Москва, Энергоиздат, 1980, 416 с.

[3] Фролов В.П. Метод Ньюмена – Пенроуза в общей теории относительности. *Тр. ФИАН СССР*, 1977, т. 96, с. 72–180.

[4] Lind R. Shear-free, Twisting Einstein–Maxwell Metrics in the Newman–Penrose Formalism. *General Relativity and Gravitation*, 1974, vol. 5. pp. 25–47.

[5] Newman E. Maxwell fields and Shear-free Null Geodesic Congruences. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21, pp. 3197–3221.

[6] Newman E., Silva-Ortigoza G. Twisting Null Geodesic Congruences and the Einstein – Maxwell Equations. *Classical and Quantum Gravity*, 2006, vol. 23, pp. 91–113.

[7] Kozameh C., Newman E., Silva-Ortigoza G. The Geometry of Regular Shear-free Null Geodesic Congruences, CR Functions and Their Application to the Flat-Space Maxwell Equations. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, vol. 24, pp. 5479–5494.

[8] Lewandowski J., Nurowski P. Algebraically Special Twisting Gravitational Fields and CR Structures. *Classical and Quantum Gravity*, 1990, vol. 7, pp. 309–328.

[9] Trautman A. Robinson Manifolds and Cauchy–Riemann Spaces. *Classical and Quantum Gravity*, 2002, vol. 19, pp. R1–R10.

[10] Hill C.D., Lewandowski J., Nurowski P. Einstein's Equations and the Embedding of 3-dimensional CR Manifolds. *Indiana Univ. Math. Journal*, 2008, vol. 57, pp. 3131–3176.

[11] Penrose R. Physical Space-time and Nonrealizable CR-structures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 8, pp. 427–448.

[12] Goldberg J.N., Sachs R.K. A Theorem on Petrov Types. *Acta Phys. Polon. Supp*, 1962, vol. 22, pp. 13–23.

[13] Sommers P. Properties of Shear-free Congruences of Null Geodesics. *Proceedings of the Royal Society London A*, 1976, vol. 349, pp. 309–318.

[14] Kassandrov V.V., Trishin V.N. Effective Connections and Fields Associated with Shear-free Null Congruences. *General Relativity and Gravitation*, 2004, vol. 36, pp. 1603–1612.

[15] Кассандров В.В., Тришин В.Н. Бессдвиговые геодезические и ассоциированные электромагнитные поля на искривленных многообразиях. *Тр. объедин. междун. конф. «Новая геометрия природы»*, Казань: КГУ, 2003, т. 4, с. 77–84.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тришин В.Н. О некоторых свойствах бессдвиговых изотропных конгруэнций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/843.html

Тришин Владимир Николаевич родился в 1977 г., окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 2000 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор семи научных работ в области математических методов в общей теории относительности. e-mail: trishinvn@bmstu.ru