УДК 536.2

Температурное поле изотропной охлаждаемой пластины, подверженной воздействию осесимметричного осциллирующего теплового потока

© А.В. Аттетков, Л.Н. Власова, И.К. Волков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследован процесс формирования температурного поля в плоской изотропной пластине постоянной толщины, одна из поверхностей которой подвержена воздействию осесимметричного осциллирующего теплового потока с интенсивностью гауссовского типа, а другая — охлаждается внешней средой с постоянным коэффициентом теплоотдачи и температурой, равной начальной температуре пластины. Для описания изучаемого процесса использована двумерная математическая модель нестационарной теплопроводности в цилиндрической системе координат. В результате анализа этой модели установлено, что температурное поле охлаждаемой пластины представляет собой композицию двух температурных полей, первое из которых не имеет предельного стационарного распределения, а второе носит сугубо диффузионный характер. С применением общей теории интегральных преобразований в аналитически замкнутом виде найдены решения соответствующих задач теплопроводности: краевой и смешанной (начально-краевой), определяющие решение исходной задачи нестационарной теплопроводности.

Ключевые слова: *изотропная охлаждаемая пластина, осесимметричное осциллирующее тепловое воздействие, температурное поле, интегральные преобразования.*

Введение. В математической теории теплопроводности [1–3] можно выделить класс задач, связанных с параметрическим анализом систем, находящихся длительное время t (теоретически при $t = +\infty$) под воздействием осциллирующих (импульсно-периодических) пространственно-распределенных тепловых потоков с интенсивностью гауссовского типа [4–10]. Их реализация приводит к специфическим особенностям процесса формирования стационарного температурного поля в анализируемой системе, точнее, к его несуществованию [7, 8]. В данном случае речь может идти лишь о квазистационарном температурном поле, которое формально является проявлением главного значения несобственного интеграла при неограниченном возрастании временного переменного. Обсуждение этого вопроса является основной целью проведенного исследования.

Математическая модель и ее реализация. Рассмотрим задачу об определении температурного поля плоской изотропной пластины постоянной толщины l, одна поверхность которой подвержена воздействию осесимметричного осциллирующего теплового потока с интенсивностью гауссовского типа, а другая — охлаждается внешней средой с коэффициентом теплоотдачи α при постоянной температуре T_c, равной начальной температуре T_0 пластины.

Для решения поставленной задачи в соответствии с исходными допущениями воспользуемся следующей математической моделью:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\theta}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 < x < h, \quad \mathrm{Fo} > 0, \\
\theta(\rho, x, \mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \\
-\frac{\partial\theta\left(\rho, x, \mathrm{Fo}\right)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = Q_0 \exp\left(-k^2\rho^2\right)\left\{1 + \cos\left(\psi\mathrm{Fo}\right)\right\}, \\
\left\{\frac{\partial\theta(\rho, x, \mathrm{Fo})}{\partial x} + \mathrm{Bi}\,\theta(\rho, x, \mathrm{Fo})\right\}\bigg|_{x=h} = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

При этом предположим, что при любых фиксированных значениях числа Фурье $\mathrm{Fo} \geqslant 0$ и $x \in [0, h]$, функционал $\theta(\rho, x, \mathrm{Fo})$ принадлежит классу $L^2_\rho[0, +\infty)$ функций, интегрируемых с квадратом и весом ρ на полубесконечном интервале $[0, +\infty)$. В этом случае обеспечивается возможность применения интегрального преобразования Ганкеля нулевого порядка по пространственному переменному ρ [2, 11];

$$
\rho = \frac{r}{z_*}, \quad x = \frac{z}{z_*}, \quad \mathrm{Fo} = \frac{at}{z_*^2}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad h = \frac{l}{z_*},
$$

$$
\mathrm{Bi} = \frac{\alpha z_*}{\lambda}, \quad Q_0 = \frac{q_0 z_*}{\lambda T_0}, \quad k = K z_*, \quad \psi = \frac{\omega z_*^2}{a},
$$

где $T(r, z, t)$ — температура изотропной пластины в точке (r, z) в момент времени t; λ — коэффициент теплопроводности; a — коэффициент температуропроводности; q_0 — плотность теплового потока; K — коэффициент сосредоточенности теплового потока; z_* — выбранная единица масштаба; Bi — критерий Био.

Решение исходной задачи (1) найдем в виде

$$
\theta\left(\rho, x, \mathrm{Fo}\right) = \mathrm{Re}\left\{\exp(i\psi\mathrm{Fo})\theta_1(\rho, x)\right\} + \theta_2\left(\rho, x, \mathrm{Fo}\right), \tag{2}
$$

где функционал $\theta_1(\rho, x)$ определяется как решение краевой задачи

$$
\begin{aligned}
& i\psi\theta_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 < x < h \\
& -\frac{\partial\theta_1(\rho, x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = Q_0 \exp\left(-k^2\rho^2\right) \\
& \left\{\frac{\partial\theta_1\left(\rho, x\right)}{\partial x} + \mathrm{Bi}\,\theta_1\left(\rho, x\right)\right\}\bigg|_{x=h} = 0; \\
& \theta_1(\rho, x)\big|_{0\leqslant x\leqslant h} \in L^2_\rho[0, +\infty),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

а функционал $\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo})$ — смешанной (начально-краевой) задачи нестационарной теплопроводности

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_2}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 < x < h, \quad \mathrm{Fo} > 0,\\
&\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}=0} = -\mathrm{Re}\{\theta_1(\rho, x)\},\\
&\left\{\frac{\partial\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo})}{\partial x} + \mathrm{Bi}\,\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo})\right\}\Big|_{x=h} = 0,\\
&\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo})\big|_{\substack{\mathrm{Fo}\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant h}} \in L^2_\rho[0, +\infty).
\end{aligned} \tag{4}$$

С применением общей теории интегральных преобразований [11] найдены решения задач (3) и (4) для функционалов $\theta_1(\rho, x)$ и $\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo})$ соответственно, определяющих решение исходной задачи (1) и имеющих следующий аналитически замкнутый вид:

$$\theta_1(\rho, x) = \left(\frac{1 + \mathrm{Bi}\,h}{\mathrm{Bi}} - x\right)\left[Q_0 \exp\left(-k^2\rho^2\right)\right] -$$

$$-\frac{Q_0}{2k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^2(\lambda_n)}{\lambda_n^2}H_0^{-1}\left[\frac{\left[p^2(p^2+\lambda_n^2)+\psi^2\right] + i\psi\lambda_n^2}{(p^2+\lambda_n^2)^2+\psi^2}\exp\Bigl(-\frac{p^2}{4k^2}\Bigr)\right]\cos(\lambda_n x),$$

$$\theta_2(\rho, x, \mathrm{Fo}) = \left(\frac{1 + \mathrm{Bi}\,h}{\mathrm{Bi}} - x\right)\left[Q_0 \exp\left(-k^2\rho^2\right)\right] -$$

$$-\frac{Q_0}{2k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^2(\lambda_n)}{\lambda_n^2}\left\{H_0^{-1}\left[\frac{p^2}{p^2+\lambda_n^2}\exp\left(-\frac{p^2}{4k^2}\right)\right] + \right.$$

$$+ H_0^{-1}\left[\left(2 - \frac{\lambda_n^2\psi^2}{(p^2+\lambda_n^2)\left[\left(p^2+\lambda_n^2\right)^2+\psi^2\right]}\right)\exp\left[-\frac{(1+4k^2\mathrm{Fo})\,p^2}{4k^2}\right]\right] \times$$

$$\left. \times \exp\left(-\lambda_n^2\mathrm{Fo}\right)\cos(\lambda_n x)\right\},$$

где $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ — корни характеристического уравнения

$$\mathrm{tg}(\lambda_n h) = \frac{\mathrm{Bi}}{\lambda_n}, \quad 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

$$C(\lambda_n) = \left\{\frac{h}{2} + \frac{\mathrm{Bi}}{2(\lambda_n^2 + \mathrm{Bi}^2)}\right\}^{-1/2};$$

$$H_0^{-1}[\,\cdot\,] \equiv \int_0^{\infty} \cdot\, pJ_0(p\rho)\,dp$$

— формула обращения интегрального преобразования, задаваемого оператором преобразования Ганкеля нулевого порядка по пространственному переменному ρ [2, 11]:

$$H_0[\,\cdot\,] \triangleq \int\limits_0^\infty \cdot\, \rho J_0\,(p\rho)\, d\rho;$$

$J_0\,(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Заключение. Температурное поле изотропной охлаждаемой пластины в изучаемом осциллирующем режиме внешнего теплового воздействия, согласно равенству (2), можно представить как композицию двух температурных полей, первое из которых не имеет предельного стационарного распределения и характеризует процесс незатухающих температурных колебаний относительно нуля с частотой, определяемой безразмерным параметром ψ, а второе имеет сугубо диффузионный характер, зависящий от этого безразмерного параметра. Это позволяет теоретически оценить характерное время значимого влияния ψ на диффузионную составляющую анализируемого температурного поля, не учитывая при этом осциллирующий характер реализуемого режима теплового воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва, Наука, 1964, 488 с.

[2] Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. Москва, Высш. шк., 1967, 600 с.

[3] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Москва, Высш. шк., 2001, 550 с.

[4] Зарубин В.С. *Расчет и оптимизация термоизоляции*. Москва, Энергоатомиздат, 1991, 192 с.

[5] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки с покрытием, подверженной локальному импульсно-периодическому нагреву. *Инженерно-физический журнал*, 2001, т. 74, № 6, с. 82–87.

[6] Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Оптимальная толщина охлаждаемой стенки с покрытием при локальном импульсно-периодическом нагреве. *Теплофизика высоких температур*, 2005, т. 43, № 3, с. 466–473.

[7] Аттетков А.В., Власова Л.Н., Волков И.К. Установившееся температурное поле системы при наличии внешнего осциллятора. Необратимые процессы в природе и технике. *Тр. Шестой Всерос. конф.*, ч. 2. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, с. 18–21.

[8] Аттетков А.В., Власова Л.Н., Волков И.К. Особенности формирования температурного поля в системе под воздействием осциллирующего теплового потока. *Тепловые процессы в технике*, 2012. т. 4, № 12, с. 553–558.

[9] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием импульсно-периодического теплового потока. *Известия РАН. Энергетика*, 2012, № 5, с. 71–80.

[10] Формалев В.Ф., Кузнецова Е.А. *Тепломассоперенос в анизотропных телах при газодинамическом нагреве*. Москва, Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010, 308 с.

[11] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов Н.Н. *Уравнения в частных производных математической физики*. Москва, Высш. шк., 1970, 708 с.

Статья поступила в редакцию 20.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Аттетков А.В., Власова Л.Н., Волков И.К. Температурное поле изотропной охлаждаемой пластины, подверженной воздействию осесимметричного осциллирующего теплового потока. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8*. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/882.html

Аттетков Александр Владимирович — канд. техн. наук, доц. кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: fn2@bmstu.ru

Власова Людмила Николаевна — канд. техн. наук, доц. кафедры “Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Волков Игорь Куприянович — д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mathmod@bmstu.ru